

論 文

행열변환에 의한 통신망의 신뢰도
계정에 관한 연구

準會員 金 永 根* 正會員 吳 英 煥**

A Study on the Reliability Evaluation of
Communication Networks by Matrix
Transformation

Young Geun KIM*, Young Hwan OH** *Regular Members*

要 約 본 논문에서는 통신망의 2-상태 스위칭 실패함수를 구하기 위한 알고리즘과 단점간 신뢰도 계정방법을 제시하였다. 통신망을 그래프로 모형화하고 이 그래프에 대한 일련의 행열변환을 함으로서 모든 통신동료를 차단하는 최소컷-셀행열을 구하였으며 최소 컷-셀행열로부터 2-상태 스위칭 실패함수를 구하였다. 또한 2-상태 스위칭 실패함수에 확률변수를 대응시켜 통신망의 단점간 신뢰도를 계정하였다. 제안된 알고리즘을 설명하기 위하여 몇가지 예를 보았으며 복잡하고 규모가 큰 망에 대한 단점간 신뢰도를 계정하기 위해서 전산기 프로그램을 제시하였다.

ABSTRACT In this paper, an algorithm for obtaining 2-state switching failure function and a terminal pair reliability evaluation method in a communication network are proposed. The communication network is modeled by a graph. By using the sequence of matrix transformations for the graph, minimal cut-set matrix representing all minimal cut-sets which completely interrupt the communication path is determined and 2-state switching failure function is then obtained from the minimal cut-set matrix. The terminal pair reliability of the communication network is evaluated by corresponding the random variables to 2-state switching failure function. Illustrative examples are provided to demonstrate the algorithm. A computer program evaluating the terminal pair reliability in a complex and large network has also been developed.

I. 서 론

통신시스템과 전송로로 구성되는 통신망의 2

-상태 스위칭함수(2-state switching function)를 구하기 위해서 통신시스템을 접합점으로, 전송로를 지로로 대응시켜 그래프로 모형화한다. 여기서 전송로는 성공(success) 혹은 실패(failure)의 2-상태만으로 구성되는데 성공인 상태에서는 정보가 전송될 수 있으나 실패인 상태에서는 정보가 전송될 수 없다.

*, ** 光云大學校 電子通信工學科
Dept. of Telecommunication Engineering
Kwang Woon Univ.
論文番號 : 88 - 38(接受 1988. 7. 6)

또한 2-상태 스위칭함수란 망내의 특정한 접합점쌍 사이의 모든 단순통로(simple path)의 합을 나타내는데 스위칭함수의 각 인자(factor)를 지로의 상태를 나타내는 확률변수로 대치하면 통신망의 단점간 신뢰도(terminal pair reliability) 즉, 시점(source node)에서 종점(terminal node)으로 통신할 수 있는 확률값을 구할 수 있다.

반대로 2-상태 스위칭함수가 주어졌을 때 망을 설계하는 합성(synthesis) 문제를 고려할 수 있으나 본 논문에서는 해석적인 면만을 고찰하였다.

지금까지 통신망의 신뢰도 계정방법에 대해서는 많은 연구가 이루어지고 있는데 Fratta 및 Montanari⁽¹⁾, Bennetts⁽²⁾ 등은 부울 대수를 이용한 통로 추적법(path tracing method)을 채택하였고, Wu 및 Chan⁽³⁾은 기본 타이-셀행렬을 이용하여 최소 타이-셀을 구하는 알고리즘을 제시하였다. 또한 Satyanarayana⁽⁴⁾는 팩토링정리(factoring theorem)를 망 신뢰도 계정에 적용하였고 임윤구, 오영환⁽⁵⁾은 에지 제거법(Edge Removal)과 직·병렬 감축법을 이용하여 방향성 망에서 시점에 연결되어 있는 에지들에 팩토링 정리를 반복적으로 적용하여 단점간 신뢰도를 계정하는 알고리즘을 제시하였다. Nelson 및 Batts, Beadles⁽⁶⁾는 비방향성 망에서 타이-셀행렬로부터 최소 컷-셀을 구하는 알고리즘을 제시하였고, Heidmann⁽⁷⁾, Locks⁽⁸⁾, Shier 및 Whited⁽⁹⁾는 Inversion에 의해 최소 타이-셀로부터 최소 컷-셀을 구하는 방법을 채택하였다. 그러나 이러한 방법들은 최소 컷-셀을 구하기 위하여 최소 타이-셀을 구하는 과정이 선행되어야 하고 논리식 처리에 수반되는 어려움을 갖고 있다.

본 논문에서는 통신망의 2-상태 스위칭 실패함수(2-state switching failure function)를 구하기 위해 연결행렬(incidence matrix)로부터 최소 컷-셀행렬(minimal cut-set matrix)을 구하는 행열변환 알고리즘을 제시하고, 스위칭 실패함수에 확률변수를 대응시켜 망의 단점간 신뢰도를 계정하였다.

II. 통신망의 스위칭 실패함수 및 단점간 신뢰도 계정에 관한 이론

II-1. 가정 및 기호

신뢰도 계정에 있어서 그래프에 대한 기본적인 가정과 논리식 처리에 사용될 기호를 다음과 같이 정의한다.

(1)가 정

- 1) 통신시스템의 모든 요소는 항상 작동상태에 있다.
- 2) 편의상 통신시스템을 나타내는 접합점의 신뢰도는 1 이고, 전송로를 나타내는 지로의 신뢰도는 통계적 독립(statistical-independence)이다.
- 3) 지로와 망의 상태는 성공과 실패의 두 상태만으로 구분된다.
- 4) 모든 그래프는 셀프 루프(self loop)가 없으며 연결 그래프(connected graph)라 한다.
- 5) 모든 그래프는 평면 그래프(planar graph)라 한다.
- 6) 편의상 지로를 나타내는 기호를 지로에 해당하는 확률변수로 사용한다.

(2)기 호

- 1) G : 그래프 $G \equiv (N, E)$
- 2) N, E : 접합점의 집합, 지로의 집합
- 3) E_n, E_n' : 지로 E_n 의 성공, 실패인 상태를 나타내는 확률변수
- 4) P_n, Q_n : 지로 E_n 이 성공, 실패일 확률 ($Q_n = 1 - P_n$)
- 5) S, T : 시점, 종점
- 6) U_{st}, R_{st} : 단점간 비신뢰도, 단점간 신뢰도
- 7) F, F (disjoint): 스위칭 실패함수, 이접된 식으로 변형된 스위칭 실패함수
- 8) L, L (disjoint): 스위칭 함수, 이접된 식으로 변형된 스위칭 함수
- 9) A, B, Q : 연결행렬, 기본 타이-셀행렬, 기본 컷-셀행렬
- 10) Q_a : 기본 컷-셀들의 ring sum에 의해 구해진 컷-셀행렬
- 11) MCM: 최소 컷-셀행렬
- 12) comb: Q_a 의 행수

- 13) OA, OAS : odd-addition, odd-addition-subtraction
- 14) $d(N_n)$: 접합점 N_n 의 차수

II - 2. 기본 이론

본 논문에서는 행렬변환을 이용하여 스위칭 실패함수를 구하고 이로부터 단점간 비신뢰도와 단점간 신뢰도를 구하는데 그 기본이론은 다음과 같다.

(1) 연결행렬에서 기본 컷-셀행렬로의 변환

n 개의 접합점과 e 개의 지로를 가지는 그래프 G 에서 연결행렬 A , 기본 타이-셀행렬 B_f , 기본 컷-셀행렬 Q_f 의 열들이 같은 지로순으로 배열되어 있으며, 다음의 직교(orthogonal) 관계가 성립한다.

$$A \cdot B_f^T = 0 \tag{1}$$

$$Q_f \cdot B_f^T = 0 \tag{2}$$

또한 A, B_f, Q_f 는 다음과 같은 형태로 분리할 수 있다.

$$A = [A_{11} \ A_{12}] \tag{3}$$

$$B_f = [U_m \ B_{f12}] \tag{4}$$

$$Q_f = [Q_{f11} \ U_r] \tag{5}$$

여기서 A_{11}, U_m, Q_{f11} 의 열은 spanning tree의 link에 대응하며 A_{12}, B_{f12}, U_r 의 열은 spanning tree의 twig에 대응한다. 또한 U_m, U_r 은 각각 차원이 $e-n+1, n-1$ 인 정방행렬이다.

식 (1)~(5)로부터,

$$Q_f = A_{12}^{-1} \cdot A \tag{6}$$

식 (6)은 A 에서 Q_f 로의 변환을 가능하게 한다.

비방향성 그래프에 대한 연산은 mod-2 algebra에 의해 행렬 계산에는 mod-2 연산이 이용되고 계산결과 얻어진 모든 행열은 원소가 0, 1만으로 구성되는 이진(binary) 행열이다. 그러나 방향성 그래프에 대한 연산은 integer algebra에 의한다.

Q_f 는 spanning tree의 선정을 기본으로 하는데 본 알고리즘에서는 시점과 종점의 차수가 1이고 중간 접합점의 차수가 2인 spanning tree 중에서 임의로 선정하게 된다.

그림 1의 그래프 G 에서 선정 가능한 spanning tree는 그림 2의 (a), (b)와 같다.

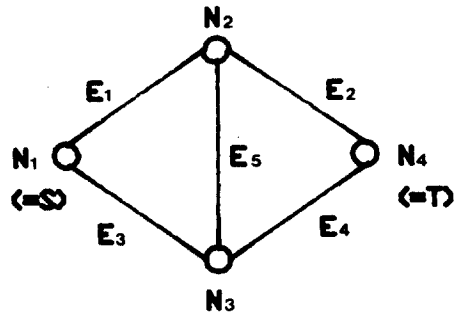
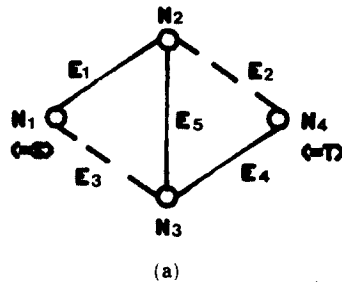
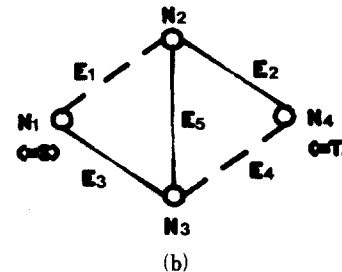


그림 1 그래프 G Graph G.



(a)



(b)

그림 2 그림 1의 spanning tree Spanning tree of Fig. 1.

한 예로서 그림 2의 (a)를 spanning tree로 선정하여 접합점의 차수를 구하여 보면 다음과 같다.

$$N_1 : d(N_1) = 1, \quad N_2 : d(N_2) = 2$$

$$N_3 : d(N_3) = 2, \quad N_4 : d(N_4) = 1$$

그림 1의 그래프 G에서 기준 접합점을 N_4 로 취해서 A를 구하면,

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} E_2 & E_3 & E_1 & E_4 & E_5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

식 (6)으로부터 Q_r 를 구하면,

$$Q_r = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & c_1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & c_2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & c_3 \end{array} \right]$$

(2) 최소 컷-셀

최소 컷-셀은 $E' \subseteq E$ 가 다음의 조건을 만족해야 한다.

1. 그래프 $G' \equiv (N, E - E')$ 는 S에서 T로의 어떠한 path도 가지지 않는다. (즉, E' 는 "S-T 컷셀")
2. E' 의 어떠한 진부분집합도 이러한 성질을 가지지 않는다.

Q_r 의 각 행은 spanning tree에 대한 기본 컷-셀들을 의미하며 컷-셀들의 ring sum은 컷-셀이나 컷-셀들의 edge-disjoint union을 형성하게 된다.

Q_r 의 행들 간에 모든 가능한 OA(odd-addition)를 해서 컷-셀들을 얻었으며 이러한 컷-셀들을 나타내는 행렬이 Q_a 이다.

Q_r 의 행수를 $r (=n-1)$ 이라 할 때 Q_a 의 행수는,

$$\text{comb} = \sum_{i=1,3,5,\dots}^r \binom{r}{i}, \quad r \text{ 이 홀수일 때}$$

$$\sum_{i=1,3,5,\dots}^{r-1} \binom{r}{i}, \quad r \text{ 이 짝수일 때}$$

방향성 그래프인 경우에는 Q_r 의 행들 간에 모

든 가능한 OAS(odd-addition-subtraction)를 해서 Q_a 를 구한다.

$$\text{comb} = \sum_{i=1,3,5,\dots}^r \binom{r}{i} \binom{i}{m}, \quad r \text{ 이 홀수일 때}$$

$$\sum_{i=1,3,5,\dots}^{r-1} \binom{r}{i} \binom{i}{m}, \quad r \text{ 이 짝수일 때}$$

여기서 $m = (i+1)/2$

결과적으로 Q_a 는 차원이 $\text{comb} \times e$ 인 행렬이 된다.

$$Q_a = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & c_1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & c_2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & c_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & c_1 + c_2 + c_3 \end{array} \right]$$

다음에 최소 컷-셀을 구하기 위해 Q_a 의 행들을 비교하여 중복된 행들을 제거함으로써 최소 컷-셀행렬 MCM을 구하게 된다. 결과적으로 MCM의 행수는 원 그래프의 최소 컷-셀의 수를 나타낸다.

방향성 그래프인 경우, 컷의 기준 방향을 시점에서 종점으로의 방향으로 취할 때 컷의 방향과 반대방향의 지로는 최소 컷-셀에서 제외되어야 하므로 Q_a 의 원소가 -1인 경우는 0으로 대체시키는 과정이 필요하다.

$$\text{MCM} = \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

(3) 스위칭 실패 함수

MCM의 각 행은 스위칭 실패함수의 항을 나타내며 열 E_i 의 원소가 "1"이라는 것은 i 번째 지로의 실패사상을 나타낸다.

스위칭 실패함수 F는,

$$F = E_1' E_3' + E_2' E_4' + E_2' E_3' E_5' + E_1' E_4' E_5' \quad (7)$$

식 (7)을 샤프(SHARP)연산⁽¹⁰⁾을 이용하여 이 접된 식으로 변형하면,

$$F(\text{disjoint}) = E_1' E_3' + E_1 E_2' E_4' + E_1' E_2' E_3 E_4' + E_1 E_2' E_3' E_4 E_5' + E_1' E_2 E_3 E_4' E_5' \quad (8)$$

이접된 F에 각각의 지로가 가지는 확률값을 대입하여 단점간 비신뢰도 U_{st} 를 구하면,

$$U_{st} = Q_1 Q_3 + P_1 Q_2 Q_4 + Q_1 Q_2 P_3 Q_4 + P_1 Q_2 Q_3 P_4 Q_5 + Q_1 P_2 P_3 Q_4 Q_5 \quad (9)$$

시점과 종점 사이에 통신이 이루어질 확률인 단점간 신뢰도 R_{st} 는 다음과 같다.

$$R_{st} = 1 - U_{st} \quad (10)$$

III. 알고리즘 및 신뢰도 계정 계산 예

III - 1. 알고리즘

[단계 0] Spanning Tree의 선정

: 그래프 N에서 시점과 종점의 차수가 1이고, 중간 접합점의 차수가 2인 spanning tree 중에서 임의로 선정한다.

[단계 1] 연결행렬 A의 구성

: N에서 임의의 접합점을 기준 접합점으로 선정해서 연결행렬 A를 구한다.

$$A = [A_{11}, A_{12}]$$

[단계 2]

: 다음 식을 이용하여 A로부터 기본 컷 - 셀행렬 Q_r 를 구한다.

$$Q_r = A_{12}^{-1} \cdot A$$

비방향성 그래프인 경우에는 [단계 3 a]를 수행한다.

방향성 그래프인 경우, Q_r 에서 시점이나 종점에 연결된 지로에 대응하는 열에 -1의 원소를 가지는 행이 존재하지 않으면 [단계 3 b]를 수행하고, 그렇지 않을 경우에는 그 행에 -1을 곱해서 결과적인 행렬을 Q_r' 라 하고 [단계 3 c]를 수행한다.

[단계 3 a]

: Q_r' 의 행들 간에 모든 가능한 OA를 해서 Q_a 를 구한다. 다음에 [단계 4 a]를 수행한다.

[단계 3 b]

: Q_r' 의 행들 간에 모든 가능한 OAS를 해서 Q_a 를 구한다. 다음에 [단계 4 b]를 수행한다.

[단계 3 c]

: Q_r' 의 행들 간에 모든 가능한 OAS를 해서 Q_a 를 구한다. 다음에 [단계 4 b]를 수행한다.

[단계 4 a]

: Q_a 의 행들을 비교하여 중복된 행들을 제거함으로써 최소 컷 - 셀행렬 MCM을 구한다. 다음에 [단계 5]를 수행한다.

[단계 4 b]

: -1의 모든 원소를 0으로 대치시킨후 0, 1 이외의 값을 가지는 모든 행을 제거한다. 결과적인 행렬을 Q_a' 라 하고, Q_a' 의 행들을 비교하여 중복된 행들을 제거함으로써 MCM을 구한다. 다음에 [단계 5]를 수행한다.

[단계 5] MCM → F

: MCM의 각 행은 스위칭 실패함수 F의 항을 나타내며 열 E_i 의 원소가 "1"이라는 것은 i번째 지로의 실패사상을 나타낸다.

[단계 6] $F \rightarrow F(\text{disjoint})$

: 샤프 연산을 이용하여 F를 이접된 식으로 변형한다.

[단계 7]

: 이접된 F에 각각의 지로가 갖는 확률값을 대입하여 그래프 N의 단점간 비신뢰도 U_{st} 를 구한다. 그리고 단점간 신뢰도 R_{st} 는 다음과 같이 구한다.

$$R_{st} = 1 - U_{st}$$

III - 2. 단점간 신뢰도 계정 계산 예

III - 2 - 1. 비방향성 그래프에서의 단점간 신뢰도 계정 계산 예

그림 3 과 같은 비방향성 그래프에 알고리즘을 적용하면 다음과 같다.

1) [단계 0]에 의하여 그림 3 에서 시점과 종점의 차수가 1 이고, 중간 점합점의 차수가 2인 spanning tree 중에서 임의로 spanning tree를 선정한다. 여기서는 그림 4 와 같은 spanning tree를 선정한다.

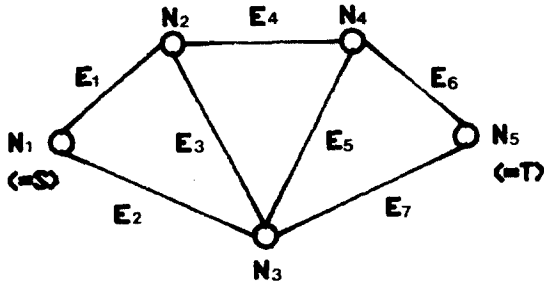


그림 3 비 방향성 그래프
Undirected graph.

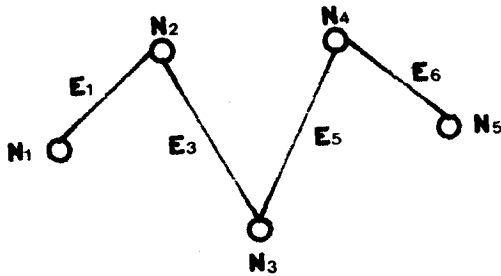


그림 4 그림 3 의 spanning tree
Spanning tree of Fig. 3.

2) 그림 3 에서 임의의 점합점을 기준 점합점으로 선정해서 A를 구한다. 여기서는 N₅를 기준 점합점으로 선정한다.

$$A = [A_{11}, A_{12}] = \begin{bmatrix} E_2, E_4, E_7 & E_1, E_3, E_5, E_6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3) 다음의 식을 이용하여 A로부터 Q_f를 구한다.

$$Q_f = A_{12}^{-1} \cdot A$$

$$Q_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{matrix}$$

4) Q_f의 행들 간에 모든 가능한 OA를 해서 Q_a를 구한다.

$$Q_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_1 + c_2 + c_3 \\ c_1 + c_2 + c_4 \\ c_1 + c_3 + c_4 \\ c_2 + c_3 + c_4 \end{matrix}$$

5) Q_a의 행들을 비교하여 중복된 행들을 제거함으로써 MCM을 구한다.

$$MCM = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

6) MCM에서 F를 구한다.

$$F = E_1' E_2' + E_2' E_3' E_4' + E_4' E_5' E_7' + E_6' E_7' + E_1' E_3' E_5' E_6' + E_2' E_3' E_5' E_6'$$

7) 샤프 연산을 이용하여 F를 이접된 식으로 변형하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 F(\text{disjoint}) = & E_1' E_2' + E_1 E_6' E_7' + E_1' E_2 E_6' E_7' \\
 & + E_1 E_2' E_3' E_4' E_6 + E_1 E_2' E_3' \\
 & E_4' E_6' E_7 + E_1 E_2 E_4' E_5' E_6 E_7' \\
 & + E_1 E_2' E_3 E_4' E_5' E_6 E_7' + E_1' E_2 \\
 & E_4' E_5' E_6 E_7' + E_1' E_2 E_3' E_4' E_5' E_6 E_7' \\
 & + E_1 E_2' E_3' E_4' E_5' E_6' E_7
 \end{aligned}$$

이상에서와 같은 일련의 행렬변환을 이용하여 스위칭 실패함수 F를 구할 수 있으며 이접된 논리적 표현식에 각각의 지로가 갖는 확률값을 대입하면 그림 3의 그래프에 대한 단점간 비신뢰도를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 U_{st} = & Q_1 Q_2 + P_1 Q_6 Q_7 + Q_1 P_2 Q_6 P_7 + P_1 Q_2 Q_3 Q_4 P_6 \\
 & + P_1 Q_2 Q_3 Q_4 Q_6 Q_7 + P_1 P_2 Q_4 Q_5 P_6 Q_7 + \\
 & P_1 Q_2 P_3 Q_4 Q_5 P_6 Q_7 + Q_1 P_2 Q_4 Q_5 P_6 Q_7 + \\
 & + Q_1 P_2 Q_3 P_4 Q_5 P_6 Q_7 + P_1 Q_2 Q_3 P_4 Q_5 Q_6 P_7
 \end{aligned}$$

Q

그리고 단점간 신뢰도 R_{st}는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 R_{st} = & 1 - U_{st} \\
 = & 1 - \{ Q_1 Q_2 + P_1 Q_6 Q_7 + Q_1 P_2 Q_6 P_7 \\
 & + P_1 Q_2 Q_3 Q_4 P_6 + P_1 Q_2 Q_3 Q_4 Q_6 Q_7 \\
 & + P_1 P_2 Q_4 Q_5 P_6 Q_7 + P_1 Q_2 P_3 Q_4 Q_5 P_6 Q_7 \\
 & + Q_1 P_2 Q_4 Q_5 P_6 Q_7 + Q_1 P_2 Q_3 P_4 Q_5 P_6 Q_7 \\
 & + P_1 Q_2 Q_3 P_4 Q_5 Q_6 P_7 \}
 \end{aligned}$$

III-2-2. 방향성 그래프에서의 단점간 신뢰도 계정 계산 예

그림 5와 같은 방향성 그래프에 알고리즘을 적용하면 다음과 같다.

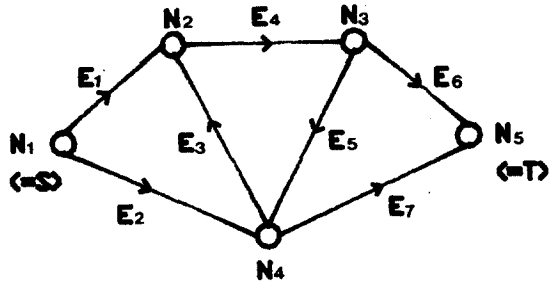


그림 5 방향성 그래프 Directed graph.

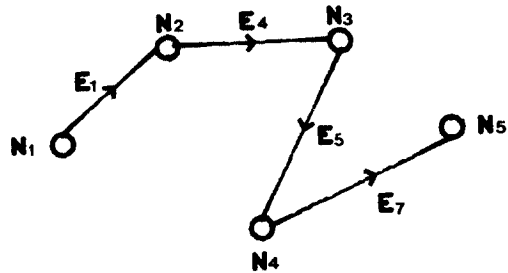


그림 6 그림 5의 spanning tree Spanning tree of Fig. 5.

- 1) [단계 0]에 의하여 그림 6과 같은 spanning tree를 선정한다.
- 2) 그림 5에서 N₅를 기준 접합점으로 선정해서 A를 구한다.

$$A = [A_{11}, A_{12}] \left[\begin{array}{ccc|cccc} E_2 & E_3 & E_6 & E_1 & E_4 & E_5 & E_7 \\ \hline .1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

- 3) 다음의 식을 이용하여 A로부터 Q_r를 구한다.

$$Q_r = A_{12}^{-1} \cdot A$$

$$Q_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{matrix}$$

4) Q_1 의 행들 간에 모든 가능한 OAS를 해서 Q_a 를 구한다.

$$Q_a = \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right] \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_1 + c_2 - c_3 \\ c_1 - c_2 + c_3 \\ -c_1 + c_2 + c_3 \\ c_1 + c_2 - c_4 \\ c_1 - c_2 + c_4 \\ -c_1 + c_2 + c_4 \\ c_1 + c_3 - c_4 \\ c_1 - c_3 + c_4 \\ -c_1 + c_3 + c_4 \\ c_2 + c_3 - c_4 \\ c_2 - c_3 + c_4 \\ -c_2 + c_3 + c_4 \end{matrix}$$

5) 위에서 구한 Q_a 에서 -1의 모든 원소를 0으로 대체시킨 후 0, 1 이외의 값을 가지는 모든 행을 제거시킴으로서 Q'_a 를 구한다.

$$Q'_a = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

6) Q'_a 의 행들을 비교하여 중복된 행들을 제거함으로서 MCM을 구한다.

$$MCM = \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

7) MCM에서 F를 구한다.

$$F = E_1' E_2' + E_2' E_4' + E_2' E_5' E_6' + E_6' E_7' + E_1' E_3' E_7' + E_4' E_7'$$

8) 샤프 연산을 이용하여 F를 이점된 식으로 변형하면 다음과 같다.

$$F(\text{disjoint}) = E_1' E_2' + E_1' E_2' E_4' + E_1' E_2' E_4' E_5' E_6' + E_1' E_2' E_6' E_7' + E_1' E_2' E_4' E_5' E_6' E_7' + E_1' E_2' E_3' E_6' E_7' + E_1' E_2' E_4' E_6' E_7' + E_1' E_2' E_3' E_4' E_6' E_7'$$

9) 위에서 구한 F(disjoint)에 각각의 지로가 갖는 확률값을 대입하면 그림 5의 그래프에 대한 단점간 비신뢰도를 구할 수 있다.

$$U_{st} = Q_1 Q_2 + P_1 Q_2 Q_4 + P_1 Q_2 P_4 Q_5 Q_6 + P_1 P_2 Q_6 Q_7 + P_1 Q_2 P_4 P_5 Q_6 Q_7 + Q_1 P_2 Q_6 Q_7 + Q_1 P_2 Q_3 P_6 Q_7 + P_1 P_2 Q_4 P_6 Q_7 + Q_1 P_2 P_3 Q_4 P_6 Q_7$$

그리고 단점간 신뢰도는 다음과 같다.

$$R_{st} = 1 - \{ Q_1 Q_2 + P_1 Q_2 Q_4 + P_1 Q_2 P_4 Q_5 Q_6 + P_1 P_2 Q_6 Q_7 + P_1 Q_2 P_4 P_5 Q_6 Q_7 + Q_1 P_2 Q_6 Q_7 + Q_1 P_2 Q_3 P_6 Q_7 + P_1 P_2 Q_4 P_6 Q_7 + Q_1 P_2 P_3 Q_4 P_6 Q_7 \}$$

IV. 단점간 신뢰도 계정을 위한 전산기 수행

통신망의 그래프에서 단점간 신뢰도를 계정할 때 그래프가 간단한 경우에는 필산으로도 가능하나 복잡한 경우에는 계산량이 방대해지기 때문에 전산기 처리를 해야한다.

본 논문에서 제안한 프로그램은 그래프를 구성하는 접합점에 라벨(label)을 붙여 각각의 지로가 갖는 확률변수와 접합점 라벨, spanning tree를 데이터로 입력한다. 본 프로그램에서는 이러한 데이터가 최소 컷-셀을 구하기 위한 행렬변환 알고리즘과 스위칭 실패함수를 이점된 식으로 변형하기 위한 사프연산에 이용된다. 전산기 수행결과 출력으로 얻은 논리식에 각 지로가 갖는 확률값을 대입하면 그래프에서 단점간 신뢰도를 구할 수 있다.

전산기 수행을 위한 알고리즘의 흐름도(flow chart)는 다음과 같다.

V. 검 토

단점간 신뢰도를 구하기 위한 기존의 제시된 방법과 본 알고리즘을 비교하기 위하여 그림 1의 그래프에 대하여 단점간 신뢰도를 구하면 다음과 같다. 각 지로의 성공, 실패인 확률은 $p=0.9$, $q=0.1$ 로 하였다.

(1) 통로추적법^{(1),(2)}에 의한 단점간 신뢰도 계정
통로추적법에 의하여 네 개의 단순통로는 (E_1, E_2) , (E_3, E_4) , (E_2, E_3, E_4) , (E_1, E_4, E_3) 이며 이로부터 스위칭 함수를 구하면,

$$L = E_1 E_2 + E_3 E_4 + E_2 E_3 E_4 + E_1 E_4 E_3 \quad (11)$$

식 (11)을 이점된 형태로 변형하면,

$$L(\text{disjoint}) = E_1 E_2 + E_1 E_4 E_3 + E_1 E_2 E_3 E_4 + E_1 E_4 E_3 E_2 E_3 + E_1 E_4 E_3 E_2 E_3 E_4 E_3 \quad (12)$$

식 (12)로부터 단점간 신뢰도를 구하면,

$$R_{st} = p^2 + p^2 q + p^3 q + 2p^3 q^2 = 0.97848$$

(2) 팩토링 정리⁽⁴⁾에 의한 단점간 신뢰도 계정
그래프 G에서, K-terminal 신뢰도는 다음과 같이 표시된다.

$$R_K(G) = P_e \cdot R_K(G_e) + (1 - P_e) \cdot R_K(G - e) \quad (13)$$

여기서, 그래프 G_e 는 그래프 G에서 지로 e를 단락시키고 그래프 $G - e$ 는 그래프 G에서 지로 e를 개방함으로써 얻은 그래프이다.

$|K|=1$ 인 그림 1의 그래프에서 E_3 를 단락, 개방함으로써 식 (13)을 적용하면,

$$R_{st} = p^2 + p^2 q + p^3 q + 2p^3 q^2 = 0.97848$$

(3) 최소 컷-셀⁽⁷⁾⁻⁽⁹⁾에 의한 단점간 신뢰도 계정

그림 1로부터 최소 컷-셀은 (E_1, E_3) , (E_2, E_4) , (E_2, E_3, E_4) , (E_1, E_4, E_3) 이다. 따라서 스위칭 실패함수 F는,

$$F = E_1' E_3' + E_2' E_4' + E_2' E_3' E_4' + E_1' E_4' E_3' \quad (14)$$

식 (14)를 이점된 형태로 변형하면,

$$F(\text{disjoint}) = E_1' E_3' + E_1 E_2' E_4' E_3' + E_1' E_2' E_3' E_4' + E_1 E_2' E_3' E_4' E_3' + E_1' E_2 E_3 E_4' E_3' \quad (15)$$

식 (15)로부터 단점간 신뢰도는,

$$R_{st} = 1 - (q^2 + pq^2 + pq^2 + 2p^2 q^2) = 0.97848$$

(4) 본 알고리즘에 의한 단점간 신뢰도 계정
식(8)에 지로의 성공, 실패 확률을 대입하여 단점간 신뢰도를 구하면,

$$R_{st} = 1 - (q^2 + pq^2 + pq^2 + 2p^2 q^2) = 0.97848$$

이상에서 기존의 제시된 방법으로 구한 단점간 신뢰도와 본 알고리즘으로 구한 단점간 신뢰도는 동일하다는 것을 보였다. 기존의 제시된 방법에

비하여 본 알고리즘은 스위칭 실패함수가 주어졌을 때 스위칭 실패함수를 구하기 위한 행열변

환의 역변환을 함으로서 망을 합성할 수 있다는 특징을 가진다.

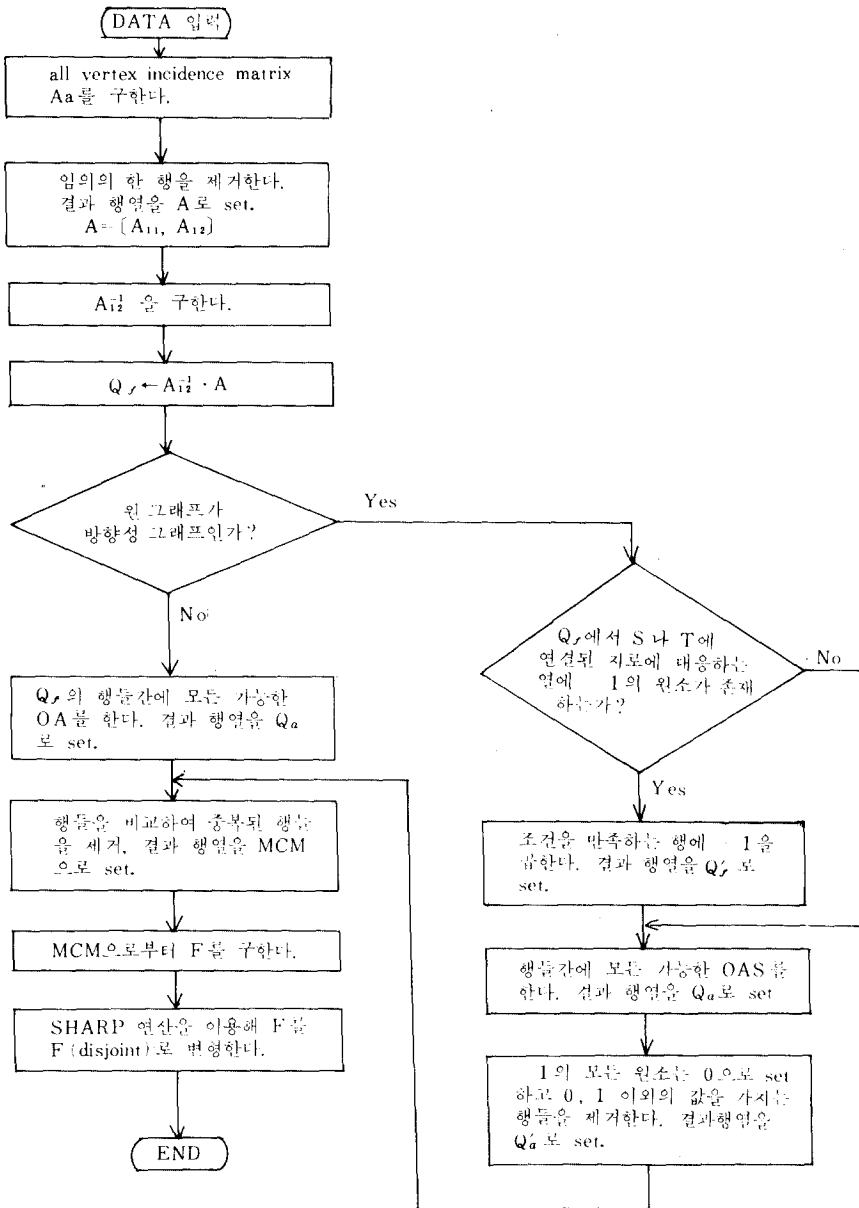


그림 7 신뢰도 계정을 위한 알고리즘의 흐름도
The flow chart of algorithm for evaluating the reliability.

VI. 결 론

본 논문에서는 행렬변환을 이용하여 통신망의 스위칭 실패함수를 구하는 알고리즘과 신뢰도 계정 방법을 제시하였다.

스위칭 실패함수를 구하기 위해 그래프의 연결행렬에서 기본 컷-셀행렬로 변환하고 비방향성 그래프인 경우에는 행들간의 OA에 의하여, 방향성 그래프인 경우에는 OAS에 의하여 Q_a 를 얻었으며 이 행렬에서 중복된 행들을 제거함으로써 최소 컷-셀행렬을 구하였다.

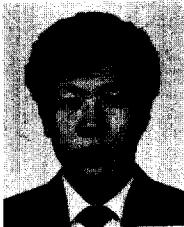
최소 컷-셀을 구하기 위한 기존의 방법에서는 먼저 최소 타이-셀을 구하고 이의 Inversion에 의해 최소 컷-셀을 구하였으며 논리식 처리에 수반되는 어려움을 갖고 있었다. 본 알고리즘에서는 최소 타이-셀을 구하는 과정이 불 필요하여 직접 스위칭 실패함수를 구할 수가 있다.

그러나 스위칭 실패함수가 주어졌을 때 본 알고리즘에서 이용한 행렬변환의 역변환을 함으로써 망을 합성하는 문제는 계속 연구되어야 한다.

參 考 文 獻

1. L. Fratta and V.G. Montanari, "A Boolean algebra method for computing the terminal reliability in a communication network", IEEE Trans. on Circuit Theory Vol.C-20, pp.203-211, May 1973.
2. R.G. Bennetts, "Analysis of reliability block diagram by Boolean techniques", IEEE Trans. on Reliability. Vol.R-31, pp.159-166, June 1982.
3. M.Y. Wu and S.P. Chan, "On the properties of directed switching networks", Networks, Vol.17, pp.201-226, 1987.
4. A. Satyanarayana and M.K. Chang, "Network reliability and factoring theorem", Networks, Vol. 13, pp.107-120, 1983.
5. 임윤구, 오영환, "방향성 통신망의 신뢰도 계정에 관한 예시제거 알고리즘" 한국통신학회논문지, Vol. 13, no. 3, pp. 63-73, Feb. 1988.
6. A.C. Nelson, J.R. Batts, R.L. Beadles, "A computer program for approximating system reliability", IEEE Trans. on Reliability, Vol.R-19, pp.61-65, May 1970.
7. K.D. Heidmann, "Inverting path and cuts of 2-state system", IEEE Trans. on Reliability, Vol. R-32, pp.469-471, Dec. 1983.
8. M.O. Locks, "Inverting and minimizing Boolean functions, minimal paths and minimal cuts: Non-coherent system analysis", IEEE Trans. on Reliability, Vol.R-28, pp.373-375, Dec. 1979.
9. D.R. Shier, D.E. Whited, "Algorithms for generating minimal cutsets by inversion", IEEE Trans. on Reliability, Vol.R-34, pp.314-319, Oct. 1985.
10. Oh. Young Hwan, "A study of the method for evaluating the symbolic reliability in a communication network", Kwang Woon University, 1983.

1. L. Fratta and V.G. Montanari, "A Boolean algebra method for computing the terminal reliability in



金永根(Young Geun KIM) 準會員
1964年12月2日生
1983年3月~1987年2日:光云大學校電子通信工學科 工學士
1987年3月~現在:光云大學院 電子通信工學科 在學中



吳英煥(Young Hwan OH) 正會員
1947年12月28日生
1975年2月:仁荷大學校電子工學科卒業
1977年2月:仁荷大學校大學院 碩士過程 卒業
1983年2月:仁荷大學校 大學院 博士過程 修了
1980年3月~現在:光云大學電子通信工學科 副教授.