韓國通信學會論文誌 '88-10 Vol. 13 No. 5

論 文

이산시간 학습제어 시스템의 설계법

正會員 崔 淳 哲*

A Design Method of Discrete Time Learning Control System

Soon Churl CHOI* *Regular Member*

要 約 반복 학습제어시스템은 시행을 반복함으로써 유한시간의 목표출력에 대하여 추종해 가도록 하는 것이다. 본 논문에서는 이산시간 시스템에 있어서의 이산 시간 학습제어 입력을 구하는 방법을 제안한다. 여기서 현재시행의 제어입력은 바로 전시행에서 입력 sequence와 time-shift된 error sequence의 선형조합에 의하여 구해진다. 컴퓨터로 제어되는 이산시간 시스템에서 error신호의 미분조작이 필요한 연속시간 Betterment Process에 비하여 error sequence의 time-shift 조작은 보다 간단해지며 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 그 유효성을 확인하였다.

ABSTRACT An iterative learning control system is a control system which makes system outputs follow desired outputs by iterating its trials over a finite time interval. In a discrete time system, we propose one method in which present control inputs can be obtained by a linear combination of the input sequence and time-shifted error sequence at previous trial. In contrast with a continous time learning control system which needs differential operation of an error signal, the time shift operation of the error sequence is simpler in a computer control system and its effectiveness is shown by a simulation.

I. 서 론

메모리 소자를 가지는 학습제어시스템[(2), (3), (4), (5)]이나 주기신호 발생 장치를 제어시스템 내부에 포함하고 있는 반복제어시스템[(6), (7)]은 모두 유한시간의 목표출력에 대하여 시행을 반복함으로써 시스템출력이 추종하도록 하는 제어기이다. 하지만 학습제어시스템은, 전 시행의 최종상태값이 다음시행의 초기상태로 되는 반복제어시스템과는 달리 매 시행마다 초기 상태값이 일정하게 정하여 진다는 의미에서 서로 다르다.

* 韓國機械研究所
Industrial Technology Training Institute
論文番號 : 88-42 (接受 1988. 8. 9)

이러한 학습제어시스템 중에서, 특히 연속시간 Betterment Process[3]은 시스템 파라미터를 정확히 모를 때에도 제어대상이 robot인 경우와 같은 비선형시스템에 적용가능하였다. 그러나 연속시간 Betterment Process는 그 제어알고리즘에서 미분조작이 필요하게 되는데 미분조작은 A/D, D/A 변환기에서의 sampling time을 작게 함으로써 컴퓨터의 계산에 의한 차분식으로 해결되었다.

본 논문에서는 미분조작이 필요한 연속시간 Betterment Process와는 달리 미분조작이 필요없는, 단지 메모리 번지만을 shift 시켜 주는 방법만으로도 학습제어시스템의 성질을 나타내는 이산시간 Betterment Process를 제안한다. 이산시간 학습제어시스템에 관한 논의는 이미 [4]에서 다루어져 있기는 하지만 그것은 시스템의 delay에 따라서 시스템의 출력과 목표출력사이에 delay가 항상 존재하고 그 알고리즘이 좀 더 복잡하다. 본 논문에서는 시스템의 delay 가 1인 대상에 국한한다고 할 때 목표출력과 시스템출력 사이의 delay가 존재하지 않게 되며 제어 입력식이 보다 간단해진다. 이산시간 제어대상 시스템에 대하여 이산시간 학습제어 알고리즘이 성립됨을 증명하였고 그에 대한 타당성을 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 확인하였다.

Ⅱ. 제어대상과 제어목적

다음과 같은 안정한 MIMO 이산시간 시불변 선형시스템을 제어대상으로 한다.

$$X_k(t+1) = AX_k(t) + BU_k(t) \tag{1}$$

$$Y_k(t) = C^T X_k(t) \tag{2}$$

$t = 0, 1, 2, \cdots\cdots, T \qquad 0 \leq ht \leq T'$
(h : sampling time, $T = T'/h$)

여기서 $X_k(t)$, $U_k(t)$, $Y_k(t)$ 는 각각 k회 시행에 대한 $n\times 1$벡터 상태 sequence, $r\times 1$벡터 입력 sequence, $r\times 1$벡터 출력 sequence이고 시스템 파라미터 A, B, C는 각각 $n\times n$행렬, $n\times r$ 행렬, $n\times r$행렬이다. 또한 첨자k는 시행횟수를 표시하는 것으로서 유한시간 동안 입력과 출력이 주어진다고 하자. 그리고 초기상태 $X_k(0)$는 매 시행마다 0으로 정해진다고 하면 k회 시행의 t 일때의 상태 sequence는

$$X_k(t) = \sum_{i=0}^{t-1} A^{t-i-1} B\, U_k(i) \tag{3}$$

이다.

목표출력 sequence $Y_d(t)$ ($r\times 1$ 벡터 sequence)가 유한시간 $[0, T']$동안 주어진다고 할때, k회 시행에 대한 시스템출력 $Y_k(t)$ 와의 error ($r\times 1$ 벡터 sequence) 는

$$E_k(t) = Y_d(t) - Y_k(t) \tag{4}$$

이고, 시행횟수를 증가시킴에 따라 즉 $k\rightarrow\infty$에서

$$E_k(t) \rightarrow 0 \tag{5}$$

$$Y_k(t) \rightarrow Y_d(t) \tag{6}$$

로 되도록 하는 학습제어입력 $U_k(t)$를 구한다.

3. 학습제어입력의 생성

시스템 delay가 1인 시스템에 대한 이산시간 예측 error에 의한 학습제어입력은 다음과 같이 구해진다.

$$U_{k+1}(t) = U_k(t) + \Gamma\cdot E_k(t+1) \tag{7}$$

여기서 Γ는 $r\times r$행렬이다. 이것은 k+1회 시행시의 제어입력은 k회 시행시의 제어 입력과 1만큼 time-shift 된 error의 선형조합에 의하여 구하여짐을 의미한다.

정리 :

다음의 3가지 조건이 모두 만족된다면

(i) $\|I - C^T B\Gamma\|_\infty < 1$

(ii) 매 시행 마다의 초기상태$X_k(0)$는 0으로 한다.

(iii) 시행구간 [0, T'] 밖의 입력과 출력은 모두 0이다.

아래와 같은 의미에서 error가 0으로 수렴 한다.

$$\|E_{k+1}\|_\epsilon \leq \beta \|E_k\|, \quad 0 \leq \beta < 1 \tag{8}$$

즉,

$$\|E_{k+1}\| \leq \beta^k \|E_1\|, \quad 0 \leq \beta < 1 \tag{9}$$

로 부터

$$\lim_{k \to \infty} E_k(t) \to 0 \tag{10}$$

이 된다. 이것은 $k \to \infty$에 따라

$$Y_k(t) \to Y_d(t) \tag{11}$$

가 됨을 의미하는 것이다.

〔증명〕

식(4)로 부터

$$\begin{aligned} E_{k+1}(t+1) &= Y_d(t+1) - Y_{k+1}(t+1) \\ &= Y_d(t+1) - Y_k(t+1) + Y_k(t+1) - Y_{k+1}(t+1) \\ &= E_k(t+1) + C^T\{X_k(t+1) - X_{k+1}(t+1)\} \end{aligned}$$

식(3)을 적용하면

$$\begin{aligned} &= E_k(t+1) + C^T \sum_{i=0}^{t} A^{t-i} B \{U_k(i) - U_{k+1}(i)\} \\ &= E_k(t+1) - C^T \sum_{i=0}^{t} A^{t-i} B \Gamma E_k(i+1) \\ &= E_k(t+1) - C^T B \Gamma E_k(t+1) - C^T \sum_{i=0}^{t-1} A^{t-i} B \Gamma E_k(i+1) \\ &= (I - C^T B \Gamma) E_k(t+1) - C^T \sum_{i=0}^{t-1} A^{t-i} B \Gamma E_k(i+1) \end{aligned} \tag{12}$$

이 때 Schwartz의 부등식을 적용하고 ϵ-norm을 취함으로써 정리의 조건(iii)에 의하여

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \{\epsilon^t \|E_{k+1}\|_\infty\} \leq \|I - C^T B \Gamma\|_\infty \sup_{0 \leq t \leq T} \{\epsilon^t \|E_k\|_\infty\} + \Phi \left[\sum_{i=0}^{T-1} \epsilon^{T-i} \|A\|_\infty^{T-i} \sup_{0 \leq i \leq T-1} \{\epsilon^i \|E_k\|_\infty\} \right] \tag{13}$$

이고, 여기서

$$\Phi = \|C\|_\infty \|B\|_\infty \|\Gamma\|_\infty \tag{14}$$

로 정하고, 만일 $0 \leq \epsilon \ll 1$이라고 하면

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \{\epsilon^t \|E_k\|_\infty\} \simeq \sup_{0 \leq t \leq T-1} \{\epsilon^t \|E_k\|_\infty\}$$

라고 할 수 있으므로

$$\begin{aligned} \|E_{k+1}\|_\epsilon &\leq \|I - C^T B \Gamma\|_\infty \|E_k\|_\epsilon + \Phi \sum_{i=0}^{T-1} \epsilon^{T-i} \|A\|_\infty^{T-i} \|E_k\|_\epsilon \\ &= \left(\|I - C^T B \Gamma\|_\infty + \Phi \sum_{i=0}^{T-1} \epsilon^{T-i} \|A\|_\infty^{T-i} \right) \|E_k\|_\epsilon \\ &= \beta \|E_k\|_\epsilon \end{aligned} \tag{15}$$

으로 된다. 여기서

$$\beta = \|I - C^T B \Gamma\|_\infty + \Phi \sum_{i=0}^{T-1} \epsilon^{T-i} \|A\|_\infty^{T-i} \tag{16}$$

이다. 윗식에서 $0 \leq \epsilon \ll 1$이라고 하면 제 2 항

은 무시될 수 있어서

$$\beta = \|I - C^T B \Gamma\|_\infty \tag{17}$$

로 되고

$$0 \leqq \beta < 1 \tag{18}$$

이 되는 Γ가 존재한다면

$$\lim_{k=\infty} E_k(t) \rightarrow 0 \tag{19}$$

이 성립한다.

(증명끝)

(여기서, $\|E\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq r} |E^i|$: E는 r× 1 벡터 $\|\Gamma\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq r} \{\sum_{r=1}^{r} |\Gamma^{ij}|\}$: Γ 는 r×r 행렬에서

$$\|E_k\|_\epsilon = \sup_{0 \leq t \leq T} \{\epsilon^t \|E_k(t)\|_\infty\}, \quad 0 \leqq \epsilon \ll 1$$

는 ϵ-norm이라 부르기로 한다.

그리고 제어대상 시스템의 delay가 1 이어야 하는 이유는 시스템의 delay가 2 이상인 경우에는 $C^T B = 0$ 이 되어 정리의 조건(i)의 부등식을 만족하는 Γ가 존재할 수 없다. 왜냐하면 펄스전달함수

$$H(z) = C^T (zI - A)^{-1} B$$

$$= 1/z \; C^T (I - A/z)^{-1} B$$

$$= 1/z C^T (I + A/z + A^2/z^2 + \cdots) B$$

$$= 1/z C^T B + 1/z^2 C^T A B + 1/z^3 C^T A^2 B \cdots$$

에서 $C^T B = 0$ 이면 H(z)의 z에 관한 분모차수와 분자차수의 차이는 2 이상으로 되기 때문이다.

연속시간 Betterment Process는 k+ 1 회 시행시의 제어입력이 k회 시행시의 제어입력과 오차의 시간 미분에 의하여 다음과 같이 구해진다.

$$U_{k+1}(t') = U_k(t') + \Gamma' \frac{de_k(t')}{dt'}$$

(여기서 t'는 연속시간)

여기서 Γ' 값은 이산시간 Betterment Process에서와 같은 부등식에 의하여 결정된다.)

Ⅳ. 컴퓨터 시뮬레이션과 결과검토

(1) 제어대상

이산시간 Betterment Process의 유효성을 확인하기 위하여 다음과 같은 delay가 1인 간단한 SISO 2차 시스템을 제어대상으로 한다.

$$X_k(t+1) = A K_k(t) + b\, u_k(t)$$

$$y_k(t) = c^T X_k(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.9976 & 0.0464 \\ -0.0928 & 0.8584 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0.0012 \\ 0.0464 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

sampling time h : 0.05초
시스템 구동시간 : t = 0, 1, 2, ⋯, 40

(2) 목표출력과 error

목표출력 : $y_d(t) = \sin(\pi h t)$, t = 0, 1, 2, ⋯, 40
error : $e_k(t) = y_d(t) - y_k(t)$

(3) 학습제어입력

제어입력은 $U_{k+1}(t) = U_k(t) + \Gamma \cdot e_k(t+1)$ 로 되고 여기서 정리의 (i)에 의하여

(i) $\Gamma = 2.075$일때
(ii) $\Gamma = 3.114$일때

(iii) $\Gamma=4.151$일때

매 시행에 있어서 각 Sample 당의 error 의 평균을 구한다. 한편 시행의 반복횟수는 100 회로 한다. (k=100)

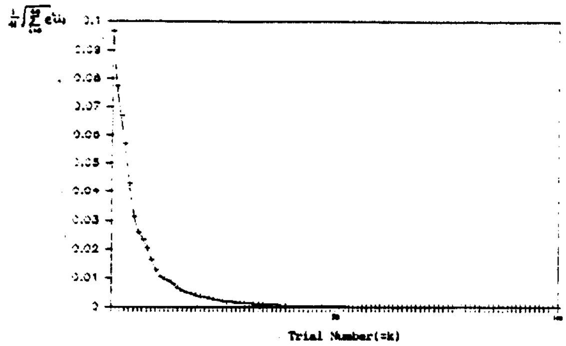


그림 1 $\Gamma=2.075$일 때 시행횟수에 대한 평균 Error.
Average Error vs. Trial Number for $\Gamma=2.075$.

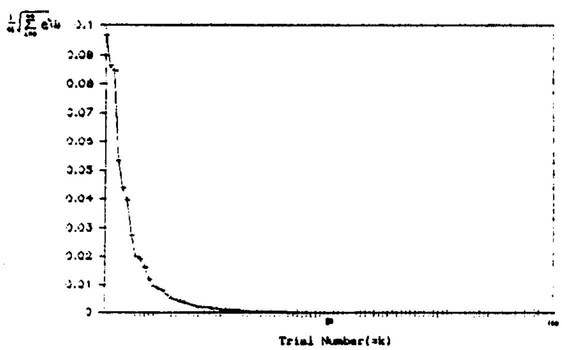


그림 2 $\Gamma=3.114$일 때 시행횟수에 대한 평균 Error.
Average Error vs. Trial Number for $\Gamma=3.114$.

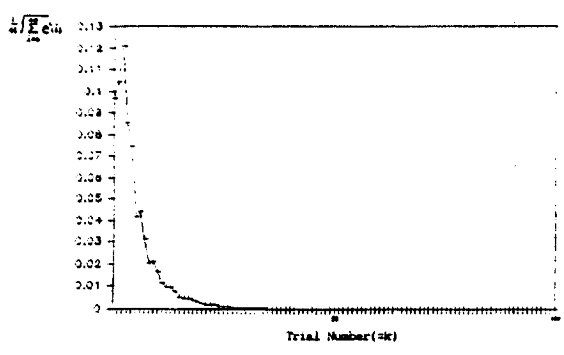


그림 3 $\Gamma=4.151$일때 시행횟수에 대한 평균 Error
Average Error vs. Trial Number for $\Gamma=4.151$

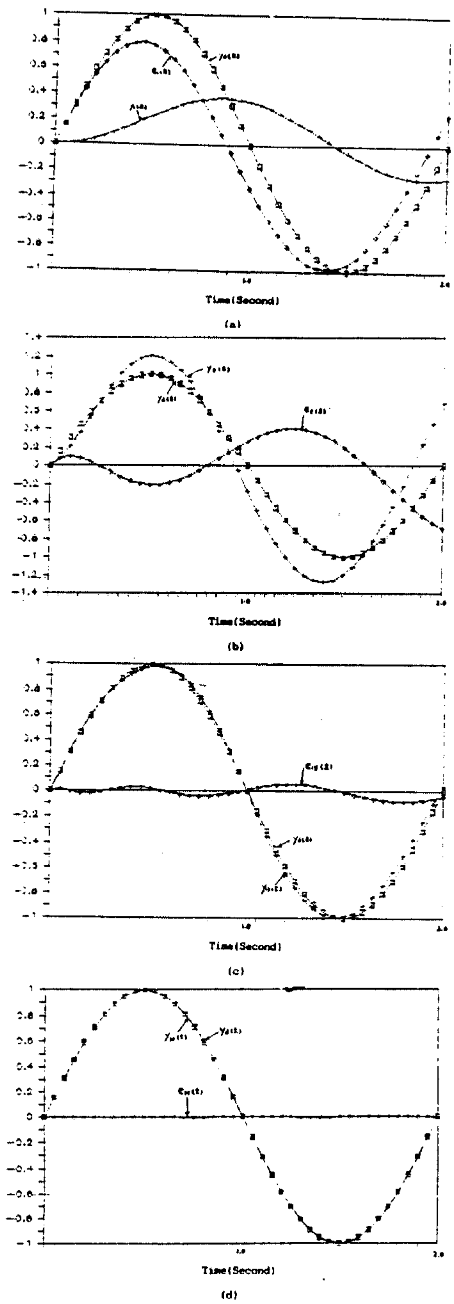


그림 4 $\Gamma=3.114$일때, 1 회(a), 5 회(b), 15회(c), 35회(d) 시행시의 목표출력, 시스템출력과 e ror.
Desired Output, System Output & error at 1 st(a), 5 th(b), 15th(c), 35th(d) Trial for $\Gamma=3.114$

정하여진 Γ값에 의하여 평균 error의 수렴속도가 다르다는 것을 그림 1, 그림 2, 그림 3으로 부터 알 수 있다. 평균error가 연속적으로 감소해 가는 것은 그림 1과 그림 2인데 Γ값이 더 클때 평균 error의 수렴속도가 빨라진다. 그러나 그림 3은 좀더 큰 Γ값에 대하여 평균 error가 잠시 증가했다가 다시 감소해감을 나타내고 있다. Γ값의 한계치는 계산상으로 $C^T B=0.0482$이므로 정리의 조건(i)로 부터 41.493이하이면 평균 error는 단조적으로 감소해 가야하나 Γ가 약 3.2이상이면 과도시행단계(평균 error가 비교적 급격히 변화하는 단계)에서 평균error의 증가현상이 나타났다. 가장 빨리 평균error가 연속적으로 감소해 가면서 0으로 수렴해 가는 것은 그림 2임을 알 수 있는데, 이때 1회시행, 5회 시행, 15회시행, 35시행시의 목표출력 $\sin(\pi ht)$와 시스템출력 그리고 error에 대한 것은 그림 4로부터 시행횟수가 반복됨에 따라서 목표출력과 시스템출력이 거의 일치되어 감을 나타내고 있어서 이산시간형 Betterment Process의 유효성을 입증하고 있다.

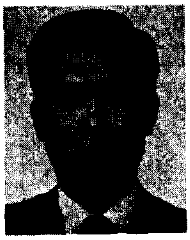
V. 결 론

본 논문에서 제안한 이산시간 Betterment Process는 메모리소자를 반드시 포함하는 학습제어계로서 제어대상 시스템에 A/D, D/A 변환기를 부착하여 모든 제어 시스템의 신호가 이산적으로 존재한다는 것에 착안하여 연속시간 Betterment Process에서의 미분조작을 메모리소자의 번지를 shift시켜주는 동작만으로 대치될 수 있도록 하였다.또한 실시간 동작에 대한 증명도 가능하였고 이 제어알고리즘의 타당성을 확인하는 시뮬레이션의 결과로 보아 어떠한 유한 시간의, 일정한 형태의 목표출력에 대하여 시스템출력이 시행을 여러번 반복(연습시행) 함으로써 과도시행 단계를 거쳐서 거의 정확히 추종해 갈 수 있다는 것을 알 수 있었다.

그러나 Γ값의 결정에 있어서 시스템의 delay가 2이상이면 $C^T B=0$이 되어 정리의 조건(i)를 만족하는 Γ가 존재하지 않음으로 하여 위의 제어 알고리즘의 적용은 불가함을 알 수 있었고 조건을 만족하더라도 Γ값이 어떤 한계이상이면 error가 단조적으로 감소해가지 않는것이 나타났다. 이에 대한 연구가 앞으로의 과제로 되었다.

參 考 文 獻

1. K.J. ASTROM, B. WITTENMARK "Computer Controled Systems-Theory and Design-" Prentice Hall, Inc., 1984.
2. S. KAWAMURA, F. MIYAZAKI, S. ARIMOTO "System Theoretic Study on Learning Control Method" 일본 계측 자동제어학회 논문집, Vol.21, No.5, pp.445-450, 1985.
3. S. KAWAMURA, F. MIYAZAKI, S. ARIMOTO "Proposal of Betterment Process: A Learning Control Method for Dynamical Systems" 일본계측자동제어학회논문집, Vol.22, No.1, pp.56-62, 1986.
4. T. SUGIE, T. ONO "On A Learning Control Law" 일본 시스템과 제어, Vol.31, No.2, pp. 129-135, 1987.
5. Y. MIYASATO, Y. OSHIMA "A Design Method of Learning Control Systems" 일본계측자동제어학회 논문집, Vol.23, No.5, pp.576-583, 1987.
6. S. HARA, T. OMATA, M. NAKANO "Stability Condition and Synthesis Methods for Repetitive Control Systems" 일본계측자동제어학회논문집, Vol.22, No.1, pp.36-42, 1986.
7. T. ISHIHARA, K. ABE, H. TAKEDA "A Design of Discrete Time Repetitive Control Systems" 일본계측자동제어학회논문집 Vol.22, No.1, pp.43-49, 1986.



崔 淳 哲(Soon Churl CHOI) 正會員
1945年 3月 1日生
1967年：漢陽工大 電氣科 卒業
1981年：漢陽大 大學院 卒業
現在：漢陽大 大學院 博士課程,
韓國機械研究所