

論 文

동기식 주파수 도약 대역확산 다중출입
통신의 채널용량

正會員 朴 尚 奎*

Channel Capacity of Coherent Frequency
Hopped Spread Spectrum Multiple
Access Communication

Sang Kyu PARK* *Regular Member*

要 約 동기식 대역확산 다중출입 통신의 오류 확률을 특성함수를 이용하여 구했으며 변조 방식으로는 PSK가 사용되었다. 채널용량을 이용하여 성능을 분석하였고 신뢰성 있는 통신을 위한 최소 비트 신호대 잡음비율 계산을 하였다.

ABSTRACT The error probability for coherent frequency-hopped spread-spectrum multiple-access communications is computed by using characteristic function method. We employ PSK as a modulation scheme. The channel capacity is performance measure and the minimum bit signal-to-noise ratio for reliable communications is obtained.

I. 서 론

무선 통신에서 하나의 채널을 다수의 이용자가 공동으로 사용할 때는 상호간에 다중출입 간섭(multiple access interference) 신호가 생긴다. 이러한 방해 신호의 영향을 감소시키기 위하여 오랫동안 주파수 분할(Frequency Division

Multiplexing) 및 시간 분할 (Time Division Multiplexing) 방식이 사용되어 왔으나 최근에는 부호분할 다중출입 방식(Code Division Multiple Access:CDMA)이 관심을 끌고 있다. 이 방식은 각각의 이용자에게 유일한 부호를 할당하여 통신시 상호 간섭을 배제하는 것으로서 대역확산 통신(Spread spectrum communication) 이라고 한다^{(3), (7)}

대역확산 통신에는 대표적인 것으로 직접확산(Direct Sequence:DS) 방식과 주파수 도약(Frequency Hopping: FH) 방식이 있으며 본 논문에서는 주파수 도약 방식을 이용한 다중출입 시

* 漢陽大學校 電子通信工學科
Dept. of Electronic Communication Engineering
Han Yang University.
論文番號 : 88 - 46 (接受 1988. 7. 16)

시스템의 성능을 분석한다.

주파수 도약 대역확산 통신시스템에서는 실제 정보를 전송하기 위해 필요한 것보다 훨씬 넓은 주파수 대역폭이 사용되며 다중출입 시스템에서 오류 발생요인으로서는 다음의 두가지가 있다. 첫째, 특정한 이용자가 사용하고 있는 주파수 홈(slot)에 다른 이용자의 신호가 도약했을 때 오류가 발생하며 이러한 현상을 충돌(hit)이라고 한다. 둘째, 충돌이 없을 경우에는 내부 혹은 외부에서 발생하는 피할 수 없는 잡음때문에 오류가 생긴다.

주파수 도약 대역확산 다중출입 통신시스템의 오류 확률 P_e 는 다음과 같다(2, 식31).

$$P_e = P_0(1-q)^{K-1} + P_1[1 - (1-q)^{K-1}] \quad (1)$$

여기서 K 는 이용자의 수, P_0 는 충돌이 없을 경우의 조건부 오류 확률, P_1 은 적어도 하나의 충돌이 있을 때의 조건부 오류 확률, q 는 하나의 충돌이 생길 확률이다. 확률 q 는 도약 패턴에 따라 달라지며 본 논문에서는 랜덤 도약 패턴을 사용한다.

이원(binary) 동기 시스템에서 충돌이 없을 때 조건부 오류 확률 P_0 는 식(2)와 같다(6, 식11-5).

$$P_0 = Q\left(\sqrt{\frac{2E_c}{N_0}}\right) \quad (2)$$

여기서

$$Q(x) = \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt, \quad E_c \text{는 신호에너지}$$

지, N_0 는 단측 잡음 전력 밀도이다. 식(1)에서 해결해야 할 조건부 오류 확률은 P_1 이며 본 논문에서는 특성 함수(characteristic function)를 이용하여 충돌이 있을 때 상관수신기 출력에 대한 정확한 조건부 밀도 함수를 구했고 P_1 이 0.5에 가깝다는 것을 알아냈다. 시스템의 성능은 채널 용량을 이용하여 평가한 후 비트(bit)당 신호대 잡음비를 구하였다. 2 장에서는 채널 모델과 가정을 설명하였으며 3 장에서는 특성 함수를 사

용해 오류확률 및 채널용량을 구했다. 4 장에서는 시스템의 성능을 분석하고 결과를 검토했으며 마지막으로 5 장에서 결론을 유도해 냈다.

II. 채널 모델

시스템의 성능을 분석하기 위해 본 논문에서 사용되는 가정은 다음과 같다.

- (a) 채널은 평균값이 ϕ 이고 양측 전력밀도가 $N_0/2$ 인 가산백색 가우시안 잡음(Additive White Gaussian Noise: AWGN)이다.
- (b) 모든 이용자는 같은 PSK(Phase Shift Keying) 디지털 변조 방식을 사용하며 모든 신호는 다른 신호에 대해 독립이다.
- (c) 신호 주기 T 는 주파수 도약 주기 T_h 와 같다. 즉 매 비트당 하나의 주파수가 도약한다.
- (d) 정보 비트 $+1$ 과 -1 은 서로 같은 확률 $\frac{1}{2}$ 값을 갖는다.
- (e) 통신망은 시간적으로 비동기이다.
- (f) 수신시 동기 복조(coherent demodulation)를 사용한다.

그림 1은 송신기의 수가 K 인 주파수 도약 대역확산 다중출입 시스템에서 i 번째 송신기를 나타내고 있다. i 번째 송신기의 정보 신호 $b_i(t)$ 는 주기가 T 인 연속 신호이다. 이 신호의 진폭은 $b_i^{(i)}$ 로 표시되며 그 값은 $+1$ 혹은 -1 이다. 정보 신호 $b_i(t)$ 는 PSK변조기에 입력되고 그 출력 $C_i(t)$ 는 다음과 같다.

$$C_i(t) = \sqrt{\frac{2E_c}{T}} b_i(t) \cos(2\pi f_c t + \phi_i) \quad (3)$$

식(3)에서 f_c 는 반송 주파수, ϕ_i 는 i 번째 송신기 신호의 위상, E_c 는 채널 심볼 에너지, T 는 신호의 주기이고 $b_i(t)$ 는 정보 신호이다.

그림 1에서 PSK변조 후의 신호는 i 번째 송신기의 도약 패턴 $f_i(t)$ 에 따라 주파수 도약을 하며 $f_i(t)$ 는 식(4)에 따라 일련의 시퀀스(sequence) $\{f_i^{(k)}\} = \dots, f_i^{(k-1)}, f_i^{(k)}, f_i^{(k+1)}, \dots$ 로 부터 얻어진다.

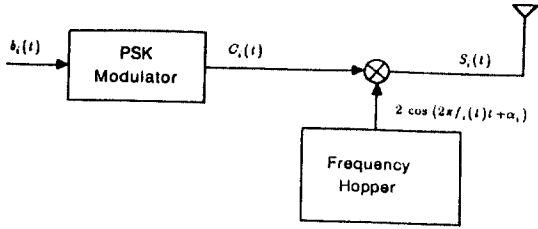


그림 1 i번째 송신기 모델
i-th transmitter model

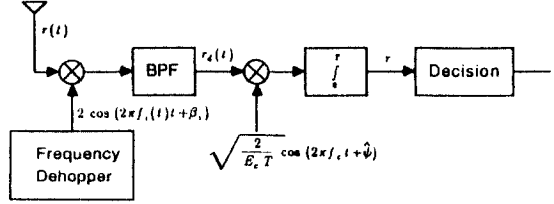


그림 2 i번째 수신기 모델
i-th receiver model

$$f_i(t) = f_m^{(i)}, \quad mT_h < t \leq (m+1)T_h \quad (4)$$

여기서 T_h 는 도약 주파수 지속 시간이며 이식은 m 번째 도약시간 중 i 번째 송신기에서 도약하는 주파수를 의미한다. 만일 K 개의 도약 패턴이 상호 독립적이고 동일하게 분포되어 있고 도약주파수가 서로 독립이라면 하나의 총돌이 생길 확률 q 는 식 (5)와 같다^(2, 식18).

$$q = \frac{1}{v} \left(2 - \frac{1}{v} \right) \quad (5)$$

여기서 v 는 도약 주파수의 수를 나타낸다. 그림 1에서 주파수 도약기를 통과한 후 원하지 않는 주파수 성분을 무시하면 $S_i(t)$ 는 다음과 같다.

$$S_i(t) = \sqrt{\frac{2E_c}{T}} b_i(t) \cdot \cos[2\pi(f_c + f_i(t))t + \psi_i + \alpha_i] \quad (6)$$

식 (6)에서 α_i 는 주파수 도약기에 의해 생긴 위상이며 $f_c + f_i(t)$ 는 도약주파수와 혼합하여 생긴 새로운 반송주파수를 나타낸다.

비동기 다중출입 시스템에서는 i 번째 수신기에서 임의의 지연 시간 τ_i 가 존재하며 그때의 수신 신호는 $S_i(t - \tau_i)$, $1 \leq i \leq K$ 가 된다. 지연 시간 τ_i 는 ϕ 과 T_h 사이에서 동일하게 분포되어 있고 위상은 ϕ 과 2π 사이에서 동일하게 분포되어 있다고 가정한다. i 번째 수신기를 기준으로 하여

$\tau_i = 0$ 이라 하면 τ_k , $1 \leq k \leq K$, $k \neq i$ 는 상대적인 지연 시간이 된다. 그림 2는 i 번째 수신기를 보여주고 있으며 수신된 신호 $r(t)$ 는 식 (7)과 같다.

$$r(t) = \sum_{k=1}^K S_k(t - \tau_k) + n(t) \quad (7)$$

여기서 $n(t)$ 는 AWGN이다.

대역통과필터(Band Pass Filter : BPF)는 i 번째 신호의 이중 주파수 성분, $K-1$ 개의 다른 신호 때문에 생긴 주파수의 합과 차등 원하지 않는 주파수 성분을 제거하기 위해 사용된다. 그림 2에서 β_i 는 역도약(dehopping)신호의 위상이며 ψ_i 는 복조 신호의 위상이다. 지연 시간, 위상 그리고 정보 신호는 서로 독립이고 동기(coherent) 시스템이 사용됨으로 $\alpha_i = \beta_i$, $\psi_i = \hat{\psi}_i$ 이다.

관측 시간 $[\phi, T]$ 동안의 상관수신기 출력 r 은 식 (8)과 같다.

$$r = b^{(i)} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^K \frac{1}{T} \int_0^T b_k(t - \tau_k) \cdot \cos[2\pi(f_k(t - \tau_k) - f_i(t))t - 2\pi(f_c + f_k(t - \tau_k))\tau_k + \phi_k - \beta_i - \psi_i] dt + \sqrt{\frac{2}{E_c T}} \int_0^T n(t) \cdot \cos[2\pi(f_i(t) - f_c)t + \beta_i - \psi_i] dt \quad (8)$$

식 (8)에서 ϕ_k 는 균일하게 분포된 위상으로서

$\phi_k = \psi_k + \alpha_k$ 이며 첫번째 항은 정보신호, 두번째 항은 다중출입간섭신호, 세번째 항은 잡음신호 성분을 나타낸다.

그림 1의 송신기와 그림 2의 수신기를 합하면 그림 3과 같이 송신 신호가 +1 혹은 -1, 수신 신호가 r 값에 의해 +1 혹은 -1이 되는 이원 대칭 채널(Binary Symmetric Channel: BSC)을 구성할 수 있으며 이때의 채널 용량 C는 식(9)이다⁽⁵⁾.

$$C = 1 + P_e \log_2 P_e + (1 - P_e) \cdot \log_2 (1 - P_e) \quad (9)$$

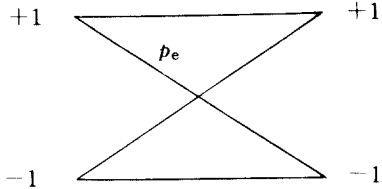


그림 3 이원 대칭 채널
Binary Symmetric Channel

여기서 P_e 는 그림 3에 나타난 BSC의 변화(transition) 확률이다. 이 변화 확률은 식(1)의 오류 확률을 나타내며 이용자 수 K, 도약주파수의 수 v, 그리고 신호대 잡음비 $\lambda \triangleq \frac{E_c}{N_0}$ 값에 따라 달라진다.

III. 특성 함수 방법

이 장에서는 특성 함수를 이용해서 총돌이 있을 때의 조건부 확률 밀도 함수를 계산한다⁽¹⁾. I_1 를 식(8)의 두번째 항인 다중출입 간섭을 나타내는 변수, H를 총돌이 생기는 사건, Φ_1 을 총돌이 생겼을 때의 조건부 특성 함수라 하면 Φ_1 은 식(10)과 같이 표시할 수 있다.

$$\Phi_1(u) = E\{e^{juI_1} | H\} \quad (10)$$

식(10)에서 $E(\cdot)$ 는 평균치, u는 실변수, 그리고 j는 -1의 제곱근을 나타낸다. 식(8)의 마지막 항인 잡음신호성분을 w_1 라 하면 w_1 는 평균값이 0이고 분산이 $1/2\lambda$ 인 가우시안 확률 변수가 된다. 총돌이 있을 때 w_1 와 $w_1 + I_1$ 의 특성 함수를 Φ_2 , Φ 라 놓으면 w_1 와 I_1 의 분포가 대칭이므로(또한 $w_1 + I_1$ 도 대칭) 특성 함수 Φ_1 , Φ_2 , 그리고 Φ 는 모두 실변수 우함수가 된다.

식(4)에서 관측 시간 $[0, T]$ (즉 $m=0$) 동안 i번째 수신기에 입력되는 도약 주파수 $f_i(t)$ 는 $f_0^{(i)}$ 이고 k번째 송신기에서 사용한 도약 주파수는 지연 시간으로 인하여 $f_k(t - \tau_k)$ 가 된다. $f_k(t - \tau_k)$ 를 지연 시간으로 구분하여 다시 쓰면 다음과 같다.

$$f_k(t - \tau_k) = \begin{cases} f_a^{(k)} & \text{in } [0, \tau_k] \\ f_b^{(k)} & \text{in } [\tau_k, T] \end{cases} \quad (11)$$

여기서 $f_a^{(k)}$ 와 $f_b^{(k)}$ 는 지연시간 τ_k 에 의해 구분되는 k번째 송신기의 도약 주파수이고 총돌이 있을 경우에는 이 중 적어도 하나는 도약 주파수 $f_0^{(1)}$ 와 같게 된다.

총돌이 있을 경우 w_1 와 I_1 는 서로 독립이므로 $\Phi(u) = \Phi_1(u) \cdot \Phi_2(u)$ 가 되며 이 중에서 $\Phi_2(u)$ 는 식(12)가 된다^(4, 식 5-90).

$$\Phi_2(u) = E[e^{juw_1} | H] = e^{-u^2 \sigma_w^2 / 2} \quad (12)$$

식(12)에서 $\sigma_w^2 = 1/2\lambda$ 이고 $\Phi_1(u)$ 는 식(13)과 같다.

$$\begin{aligned} \Phi_1(u) &= E\left[e^{ju \int_T \sum_{k=1}^K I_{1,k} | H} \right] \\ &= E\left[e^{ju \int_T I_{1,k} | H} \right] \end{aligned} \quad (13)$$

식(13)에서 $I_{1,k}$ 는 식(14)이다.

$$\begin{aligned} I_{1,k} &= b_{-1}^{(k)} \cdot \delta(f_a^{(k)}, f_0^{(1)}) \cdot \cos \theta_a \cdot \tau_k + b_0^{(k)} \cdot \\ &\quad \cdot \delta(f_b^{(k)}, f_0^{(1)}) \cdot \cos \theta_b \cdot (T - \tau_k) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\delta(u, v) = \begin{cases} 1 & u=v \\ 0 & u \neq v \end{cases}$$

식 (14)에서 θ_a 와 θ_b 는 $[0, \tau_k], [\tau_k, T]$ 시간 동안에 생긴 위상이다. 식 (14)를 식(13)에 대입하여 간단히 하면 식(15)가 되며 자세한 유도과정은 부록에 기록하였다.

$$\Phi_1(u) = \frac{1}{1 - (1-q)^{k-1}} \left[M^{k-1} - \left(\frac{v-1}{v} \right)^{2(k-1)} \right] \quad (15)$$

여기서

$$M = \left(\frac{v-1}{v} \right)^2 + 2 \cdot A \cdot \frac{v-1}{v^2} + B \frac{1}{v^2}$$

$$A = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{u} \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{\sin[u \cdot \cos \theta]}{\cos \theta} \cdot d\theta$$

$$B = \frac{1}{2} J_0(u) + \frac{1}{2} A$$

$$J_0(u) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(u \cdot \cos \theta) \cdot d\theta$$

식 (12)와 (15)를 이용하여 $w_1 + I_1$ 의 특성함수 $\Phi(u)$ 를 구하면 식 (16)과 같다.

$$\Phi(u) = \Phi_1(u) \cdot \Phi_2(u) = \Phi_1(u) \cdot e^{-u^2 \sigma^2 / 2} \quad (16)$$

식 (16)을 이용하여 그림 2에 보인 적분기 출력 r 의 조건부 밀도함수 $P(r|H, b^{(1)})$ 을 구하면 식 (17)이 된다.

$$\begin{aligned} P(r|H, b^{(1)}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ju(r-b^{(1)})} \cdot \Phi(u) du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{ \cos[u(r-b^{(1)})] \\ &\quad - j \sin[u(r-b^{(1)})] \} \Phi(u) du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos[u(r-b^{(1)})] \cdot \Phi(u) du \quad (17) \end{aligned}$$

그러므로 식 (1)에서 보인 충돌이 있을 때의 조건부 오류 확률 P_1 은 식 (18)이 된다.

$$\begin{aligned} P_1 &= P_r \{ r < 0 | H, b^{(1)} = 1 \} \\ &= P_r \{ r > 0 | H, b^{(1)} = -1 \} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{u} \cdot \sin(u) \cdot \Phi(u) \cdot du \quad (18) \end{aligned}$$

$\Phi(u)$ 에 따라 변하는 식 (18)의 값 P_1 을 식 (1)에 대입하고 식 (2)를 이용하여 식 (1)을 다시 정리하면 식 (19)이다.

$$P_e = (1-q)^{k-1} \cdot Q\left(\frac{1}{\sigma_0}\right) + [1 - (1-q)^{k-1}] \cdot P_1 \quad (19)$$

표 1은 이용차수 K 가 5, 10, 15, 40이고 도약 주파수의 수 v 는 100, 심볼 신호대 잡음비 λ 가 -10, 0, 10dB일때의 P_1 값을 보여주고 있다. 이 표에서 충돌이 있을 경우 오류 확률 P_1 이 0.5에 근접함을 알 수 있다.

표 1 도약주파수의 수 $v=100$ 일 때 충돌이 있는 경우의 조건부 오류확률 P_1 , Conditional error probability given hit, P_1 , When $v=100$.

K	λ (dB)	P_1
5	-10	0.487
	0	0.485
	10	0.484
10	-10	0.488
	0	0.485
	10	0.485
15	-10	0.488
	0	0.486
	10	0.486
40	-10	0.491
	0	0.489
	10	0.489

Shannon의 채널 부호화 이론⁽⁵⁾에 의해 신뢰성 있는 통신을 위해서는 부호율 R 이 식 (9)의 채널 용량 C 보다 작아야 한다. 즉 채널 용량은 최대 부호율이라고 할 수 있으며 이 관계를 나타내면 식 (20)이 된다.

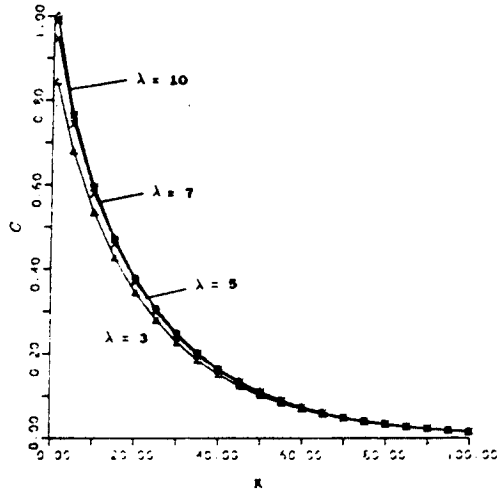


그림 4 $\lambda = 3, 5, 7, 10$ dB, $v = 100$ 일 때 채널용량 C와 이용자의 수 k와의 관계
Channel capacity C vs. number of users k given $\lambda = 3, 5, 7, 10$ dB and $v = 100$.

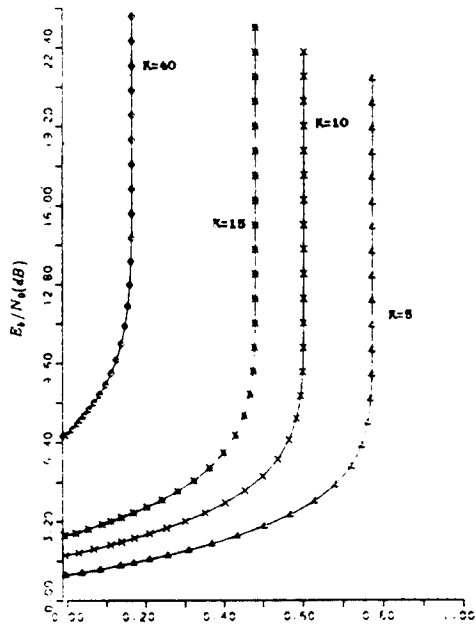


그림 5 $k = 5, 10, 15, 40$, $v = 100$ 일때의 부호율 R에서 신뢰성 있는 통신에 필요한 E_b/N_0 값.
 E_b/N_0 needed for reliable communications at code rate R with $k = 5, 10, 15, 40$ and $v = 100$.

$$R < C(\lambda) = C \left(\frac{E_c}{N_0} \right) \quad (20)$$

식 (20)에서 E_c 는 채널 심볼 에너지이고 R은 부호율이므로 정보 비트 에너지 E_b 는 $E_b = E_c / R$ 이다. 그러므로 식 (20)을 다시 적으면 다음과 같다.

$$E_b / N_0 = (E_c / N_0) / R > C^{-1}(R) / R \quad (21)$$

식(20)에서 나타낸 최대부호율인 채널용량을 이용자 수 K의 함수를 그린 것은 그림 4이며 식 (21)에서 보인 비트신호대 잡음비와 부호율 R과의 관계를 나타낸 것이 그림 5와 그림 6이다.

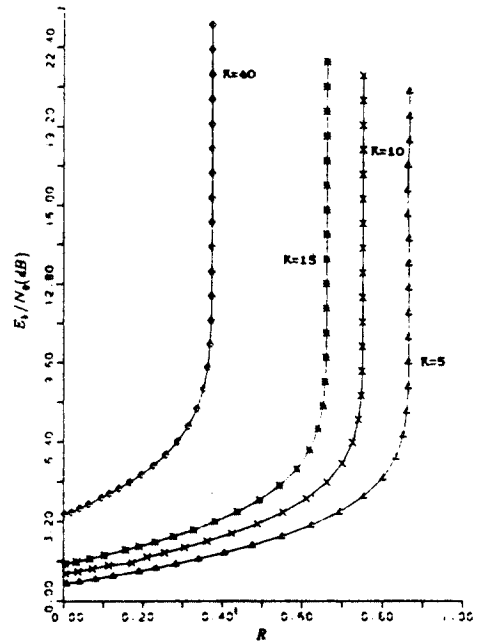


그림 6 $k = 5, 10, 15, 40$, $v = 200$ 일때의 부호율 R에서 신뢰성 있는 통신에 필요한 E_b/N_0 값.
 E_b/N_0 needed for reliable communications at code rate R with $k = 5, 10, 15, 40$ and $v = 200$.

IV. 성능 분석 및 검토

주파수 도약 방식을 이용한 동기식 대역확산 시스템의 정확한 오류를 구하기 위하여 본 논문에서는 특성함수를 이용하여 확률밀도함수를 유도했으며 채널의 용량을 구하였다.

그림 4에서 채널 칩 신호대 잡음비 λ 와 도약 주파수의 수 u 를 고정시키고 K 를 변화시켰을 때 채널용량은 큰 폭으로 감소하였다. λ 의 값이 7 dB보다 클 때는 조건부 오류 확률 P_1 의 감소가 아주 적어 채널용량 C 값의 증가가 거의 없었다. 따라서 칩 신호의 에너지와 잡음의 비율 크게 증가시키는 것은 채널용량을 높이는데 큰 역할을 하지 않음을 알 수 있다.

그림 5와 그림 6에서 보인 부호율과 비트 신호대 잡음비의 관계에서 E_b/N_0 가 R 값에 따라 천천히 증가하다가 급한 경사를 이루는 현상을 볼 수 있으며 이는 그림 4에서 보았듯이 채널 용량인 최대 부호율이 λ 값에 따라 계속 증가하지 않고 λ 값만 변화함으로 인해 λ 을 R 로 나눈 E_b/N_0 가 크게 변화하기 때문이다. 도약 주파수의 수가 그림 5에 비해 2배인 그림 6에서는 시스템 성능이 현저하게 향상되었음을 보여주고 있다. 예를들면 이용자수 $K=15$ 이고 부호율 R 이 0.4일 때 도약 주파수의 수가 200인 경우 도약 주파수의 수가 100에 비해 약 2.8dB의 이득을 얻었으며 이는 도약 주파수의 수를 증가시켜 얻은 결과이다. 그러므로 도약 주파수의 수를 크게 증가시키면 시스템의 성능이 보다 좋아짐을 알 수 있다.

V. 결론

본 연구에서는 PSK를 이용한 주파수 도약 다중출입 시스템의 모델을 제시하고 그 모델의 성능을 Shannon의 정보이론 관점에서 분석하였다.

정보가 전송도중 하나의 도약 주파수 홈을 여러 이용자가 동시에 사용할 때 생기는 현상, 즉

충돌이 있을 경우의 조건부 오류 확률을 정확하게 구했으며 Shannon이 제안한 신뢰성 있는 통신을 위해 필요한 부호율과 최소 비트 신호대 잡음비를 보였다. 그 결과 충돌이 있을 때 조건부 오류 확률은 0.5에 근접함을 알 수 있었으며 이용자의 수가 증가함에 따라 좋은 통신을 위해서는 많은 에너지가 요구됨을 확인하였다.

앞으로 다른 디지털 변조 방식을 사용한 시스템에 본 논문의 특성함수 방법을 이용하면 보다 정확한 통신 시스템의 성능을 측정할 수 있을 것으로 판단된다.

- 부 록 -

식(13)에서 식(15)를 유도하는 과정은 다음과 같다.

식(13)에서 $I_{i, k}$ 는 식(14)에 표시된 것과 같고,

$$A_k \cong b_1^{(k)} \cos \theta_a \cdot \tau_k$$

$$B_k \cong b_0^{(k)} \cos \theta_b \cdot (T - \tau_k)$$

$$\delta_{ak} \cong \delta(f_a^{(k)}, f_0^{(1)})$$

$$\delta_{bk} \cong \delta(f_b^{(k)}, f_0^{(1)}) \text{라고 놓으면}$$

$$\begin{aligned} \Phi_1(u) &= E \left[\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^K e^{ju \frac{1}{T} (A_k \delta_{ak} + B_k \delta_{bk})} \mid H \right] \\ &= E \left[E \left[\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^K e^{ju \frac{1}{T} (A_k \delta_{ak} + B_k \delta_{bk})} \mid \delta_{ak}, \delta_{bk}, \right. \right. \\ &\quad \left. \left. k=1, 2, \dots, K, k \neq i \right] \mid H \right] \\ &= E \left[\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^K E [e^{ju \frac{1}{T} (A_k \delta_{ak} + B_k \delta_{bk})} \mid \delta_{ak}, \delta_{bk}] \mid H \right] \\ &= E \left[\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^K [\delta_{ak} (1 - \delta_{bk}) \cdot E [e^{ju \frac{1}{T} A_k} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \delta_{ak} \cdot \delta_{bk} \cdot E [e^{ju \frac{1}{T} (A_k + B_k)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (1 - \delta_{ak}) \cdot \delta_{bk} \cdot E [e^{ju \frac{1}{T} B_k} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (1 - \delta_{ak}) (1 - \delta_{bk})] \mid H \right] \right] \end{aligned}$$

가 된다.
위 식에서

$$A \cong E[e^{j\omega \frac{1}{T} A_k}] = E[e^{j\omega \frac{1}{T} B_k}]$$

$$B \cong E[e^{j\omega \frac{1}{T} (A_k + B_k)}]$$

$$C_k \cong [\delta_{ak} (1 - \delta_{bk}) + (1 - \delta_{ak}) \delta_{bk}] \cdot A + \delta_{ak} \delta_{bk} B + (1 - \delta_{ak}) (1 - \delta_{bk})$$

라 놓으면 $\Phi_1(u)$ 는 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} \Phi_1(u) &= \sum_{l_1, \hat{l}_1} \cdots \sum_{l_k, \hat{l}_k} \frac{1}{P_r(H)} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 1}}^K C_k \\ &\quad i \text{ 번째 경우와 모든 } l_k, \hat{l}_k \text{ 가 } 0 \text{ 인 경우는 제외} \\ &\quad \cdot P_r(\delta_{ak} = l_k, \delta_{bk} = \hat{l}_k) \\ &= \frac{1}{P_r(H)} \left[\sum_{l_1, \hat{l}_1} \cdots \sum_{l_k, \hat{l}_k} \left\{ \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq 1}}^K C_k \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \begin{array}{l} i \text{ 번째 경우 제외} \\ \cdot P_r(\delta_{ak} = l_k, \delta_{bk} = \hat{l}_k) \end{array} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{v-1}{v} \right)^{2(K-1)} \right] \\ &= \frac{1}{P_r(H)} \left[\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq 1}}^K \left\{ \sum_{l_k, \hat{l}_k} C_k \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot P_r(\delta_{ak} = l_k, \delta_{bk} = \hat{l}_k) \right\} - \left(\frac{v-1}{v} \right)^{2(K-1)} \right] \\ &= \frac{1}{P_r(H)} \left[\left\{ \sum_{l_k, \hat{l}_k} C_k \cdot P_r(\delta_{ak} = l_k, \delta_{bk} = \hat{l}_k) \right\}^{K-1} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{v-1}{v} \right)^{2(K-1)} \right] \end{aligned}$$

위 식을 간단히 하기 위해

$$M = \sum_{l_k, \hat{l}_k} C_k \cdot P_r(\delta_{ak} = l_k, \delta_{bk} = \hat{l}_k) \text{ 라 놓으면}$$

$$M = \left(\frac{v-1}{v} \right)^2 + 2 \cdot A \cdot \frac{v-1}{v^2} + B \cdot \frac{1}{v^2} \text{ 이된다.}$$

이 때

$$A = E[e^{j\omega \frac{1}{T} A_k}]$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{u} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin[u \cdot \cos \theta]}{\cos \theta} \cdot d\theta$$

$$B = E[e^{j\omega \frac{1}{T} (A_k + B_k)}] = \frac{1}{2} J_0(u) + \frac{A}{2}$$

$J_0(u) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(u \cdot \cos \theta) d\theta$ 로서 zero order Bessel 함수이다.

충돌이 생길 확률 $P_r(H)$ 가 $1 - (1-q)^{K-1}$ 이므로 특성 함수 $\Phi_1(u)$ 은 아래와 같이 유도된다.

$$\Phi_1(u) = \frac{1}{1 - (1-q)^{K-1}} \left[M^{K-1} - \left(\frac{v-1}{v} \right)^{2(K-1)} \right]$$

參 考 文 獻

1. E.A. Geraniotis and M.B. Pursely, "Error Probability for Direct-Sequence Spread-Spectrum Multiple-Access Communications-Part II: Approximations," *IEEE Trans. on Comm.*, pp.985-995, May 1982.
2. E.A. Geraniotis and M.B. Pursley, "Error Probabilities for Slow Frequency-Hopped Spread-Spectrum Multiple-Access Communications over Fading channels," *IEEE Trans. on Comm.*, pp.996-1009, May 1982.
3. R.L. Pickholtz, D.L. Schilling, and L.B. Milstein, "Theory of Spread Spectrum Communications - A Tutorial," *IEEE Trans. on Comm.*, pp.855-884, May 1982.
4. A. Papoulis, *Probability, Random Variables and Stochastic Process*, McGraw-Hill, 1965.
5. C.E. Shannon, "A Mathematical Theory of Communication," *Bell System Technical Journal*, pp.379-423, July 1948.
6. J.J. Spilker, Jr., *Digital Communications by Satellite*, Prentice Hall, 1977.
7. A.J. Viterbi, "Spread Spectrum Communications - Myths and Realities," *IEEE Communication Magazine*, pp.11-18, May 1979.