DBpia

論 文

마이크로파 및 광도파관의 고유모드에 관한 유한요소법 해석

正會員 康 吉 範* 準會員 尹 大 日** 正會員 金 正 祺**

Finite-Element Method Analysis in Eigenmode of Microwave and Optical waveguides

Gil Bum KANG,* Dae Il YUNE**, Jung Ki KIM** *Regular Members*

要 約 유한요소법을 이용하여 유전체 도파관의 전파특성을 해석하였다. 자계 3성분에 의한 변분표현식에 Galerkin 법을 적용하여 주파수를 파라메터로 해서 전파정수를 구하는 유한요소 표시식을 제안하였다. 이 방법은 $\nabla \cdot H=0$ 조건을 고려해서 해석한 결과 spurious해는 전혀 나타나지 않았으며 이론치와 잘 일치하였다. 이 해법이 타당성을 확인하기 위하여 부분적으로 유전체가 채워진 구형도파관에 적용하여 수치해석 결과를 다른해석 결과와 비교하였다.

ABSTRACT The propagation characteristics of dielectric waveguides has been analyzed by finite element method. We have proposed the finite element formutation of the variational expression in the three-component magnetic field based on Galerkin's method which seek for the propagation constant by a given value of frequency. In this approach, the divergence relation for H is satisfied and spurious modes does not appear and finite element solutions agree with the exact solutions. In order to varify the validity of the present method the numerical results for a rectangular waveguide partilly filled with dielectric are compared with other results.

I. 서 론

유전체 도파관의 모드해석법으로서 여러가지 수치해석 방법들이 제안되어 왔으나 그 중에서 유한요소법에 의한 해석법은 복잡한 단면이나 임의의 불균질매질인 도파관에도 적용이 용이하여 많은 연구가 활발히 진행되고 있다.[1]-[2]

*東明專門大學 電子科
Dept. of Elect. Dongmyung Junior College
**中央大學校 電子工學科
Dept. of Elect. Chungang Univ.
論文番號 : 89-30(接受 1988. 11. 17)

www.dbpia.co.kr

지금까지 유한요소법에 있어서 대부분의 경우 전파축(z) 방향의 전계성분과 자계성분을 이용하여 formulation할 경우 비물리적 해인 spurious 해가 발생하는 것이 가장 큰 장애가 되어왔다.[3]-[5]최근, 자계 3성분에 의한 변분표현식을 기초로하여 유도한 유한요소 표시식을 유전체 도파관에 적용하면 불균질 매질이나 이방성 매질등에 확장적용이 가능하며 전파축 방향성분에서 문제가 되었던 singularity는 제거되었지만 spurious 해는 사라지지 않았다.[6] 이와같은 spurious 해의 발생원인에 대해서는 수학적으로 $\nabla \cdot H=0$ 조건을 만족하지 않는 것이 확인되고 있다.[7]

spurious 해를 제거하기 위하여 여러가지 방법들이 제안되어 부분적으로 성과가 얻어지고 있다. 그 중에서도 $\nabla \cdot H=0$ 조건을 최소2승법적으로 만족시키는 Penalty 계수법에 의한 formulation 이 제안되어 여러가지 도파관에 적용한 결과 도파영역에서 spurious해가 제거되었다.

그러나, 이 방법에서도 Penalty 계수라고 부르고 임의의 정수값을 잘 설정하지 않으면 도파영역에서 spurious해가 발생하고 있다.[8]

또, Kobelansky[9]는 $\nabla \cdot H=0$ 조건을 만족하는 부분공간을 확장하여 기저벡터를 먼저 구하고, 해벡터를 이들과 선형결합해서 푸는 방법이 제안되어 spurious 해는 제거 되었지만 고유치방정식을 2번 풀어야 하고, 해의 정도, 계산시간등의 문제가 남아있다.

본 논문에서는 이러한 문제점을 개선하기 위해서 자계 전성분에 의한 변분 표현식을 Galerkin 법에 적용하여 주파수를 파라메터로 해서 전파상수를 구하는 유한요소 표시식을 제안하였다. 도파모드를 해석하는 여러가지 표현식들은 고유값인 물리량과 파라메터가 전부 다르기 때문에 전계나 자계의 전성분 표현식은 전파상수를 파라메터로 해서 주파수를 구하게 된다. 이때 이득이나 손실을 갖는 매질이나 매질정수값이 주파수에 따라 변하는 매질에서는 많은 시간을 요하는 반복계산이 필요하게 된다. 여기서는 주파수에 의해서 전파상수를 구하는 알고리즘을 제시하여 이 해법이 타당성을 확인하기 위하여 부분적으로 유전체가 채워진 구형 도파관에 적용하여 해석결과를 다른 해석 결과와 비교하였다.

Ⅱ. 알고리즘 구성

1. 기본 방정식

전파의 진행방향을 Z축으로 하고 이 전파축에 수직인 도파관의 단면을 Ω, 영역이 경계를 Γ라 한다. 해석영역의 매질에서 자성체를 포함하지 않는다고 가정하면 유전체 도파관에서 Maxwell 방정식은 다음과 같다.

$$\nabla \times ([K]^{-1} \nabla \times \mathbf{H}) - k_0^2 \mathbf{H} = 0 \qquad (1)$$

여기서, $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$는 진공중에서 평면파의 wavenumber이고, $[K]$는 비유전율 tensor이다. (1)식을 Green항등식에 의해서 표현하면 functional은 다음과 같다.

$$F = \iiint_v [(\nabla \times \mathbf{H})^* \cdot ([K]^{-1} \nabla \times \mathbf{H}) - k_0^2 \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H}] dv$$

$$- \oint\oint_s [\mathbf{H}^* \times ([K]^{-1} \nabla \times \mathbf{H})] \cdot n \, ds \qquad (2)$$

경계면이 완전도체이므로 poynting power가 경계면으로는 전달될 수 없기 때문에 식(2)의 두번째 항은 0이 된다.

$$[\mathbf{H}^* \times ([K]^{-1} \nabla \times \mathbf{H})] \cdot n = 0 \qquad (3)$$

따라서 완전도체에서 범함수는 다음과 같다.

$$F = \iiint_v [(\nabla \times \mathbf{H})^* \cdot ([K]^{-1} \nabla \times \mathbf{H}) - k_0^2 \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H}] dv \qquad (4)$$

(4)식에서는 축방향성분에서 포함되었던 수학

www.dbpia.co.kr

적인 특이점은 제거되었지만 spurious해들은 제거되지 않았다.[6]

이러한 spurious 해는 2개의 category로 나눌 수 있으며 모두 $\nabla \cdot H=0$의 조건을 만족하지 않기때문에 발생한다.[7]-[8]

여기서 다음과 같은 조건을 고려한다.

$$\nabla(\nabla\cdot\mathbf{H}) = 0 \qquad \text{in } \Omega \tag{5}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{H} = 0 \qquad \text{on } \Gamma \tag{6}$$

2. 유한요소법의 수식화

해석하고자 하는 영역Ω를 그림1과 같이 3각형 요소로 분할하여 2차요소로 표시한다. 요소의 각 절점에서 자계H의 값을 표시하면 다음과 같다.

$$\mathbf{H}_t = \{N_{tt}\}\{H_t\}_e \exp(-j\beta z) \tag{7}$$

$$\mathbf{H}_z = j\{N_{zz}\}\{Hz\}_e \exp(-j\beta z)$$

여기서, $\{N\}$은 shape function을 나타내며 T는 transpose이다. $\{H_x\}_e$, $\{H_y\}_e$, $\{H_z\}_e$는 각요소의 절점에 대응하는 자계벡터이며, β는 z방향의 위상상수를 나타내고, 손실은 없다고 가정한다. shape function (N_1-N_6)은 다음과 같이 면적좌표 (L_1, L_2, L_3)에 의해서 표시된다.

$$N_1 = L_1(2L_1-1) \qquad N_4 = 4L_2L_3$$

$$N_2 = 4L_1L_2 \qquad N_5 = L_3(2L_3-1)$$

$$N_3 = L_2(2L_2-1) \qquad N_6 = 4L_3L_1 \tag{8}$$

자계의 각 성분은 $e^{-j\beta z}$에 비례하기 때문에 ∇은 $(\nabla_t - j\beta k)$로 표시된다.

$$(\nabla_t - j\beta k)\times\mathbf{H} = [F]^T\{H\}_e \exp(-j\beta z) \tag{9}$$

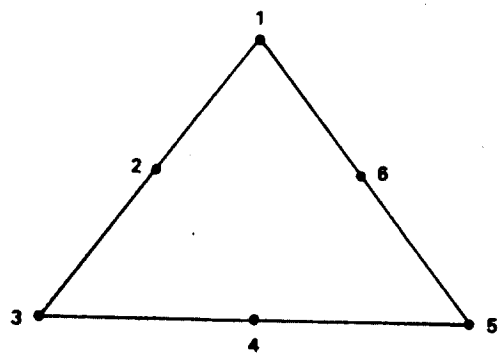


그림1. 6절점 3각형 요소
Quadratic triangular element

여기서

$$[F] = \begin{bmatrix} \{0\} & -j\beta\{N\} & -\partial\{N\}/\partial y \\ j\beta\{N\} & \{0\} & \partial\{N\}/\partial x \\ j\partial\{N\}/\partial y & -j\partial\{N\}/\partial x & \{0\} \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$(\nabla_t - j\beta k)\cdot\mathbf{H} = \{G\}^T\{H\}_e \exp(-j\beta z) \tag{11}$$

여기서

$$[G] = \begin{bmatrix} \partial\{N\}/\partial x \\ \partial\{N\}/\partial y \\ \beta\{N\} \end{bmatrix} \tag{12}$$

3. Galerkin법 적용

weighted residual법에 의해 근사함수가 미분방정식의 해가 되기 위해서는 잔여값 ε는 가중함수[w]로 구성된 space에 대해 orthogonal projection 이 되어야 한다.

여기서 가중함수를 근사함수로 구성하는 좌표함수와 같은 것을 택하므로서 가중함수가 바로 형상함수가 된다.

www.dbpia.co.kr

$$([N],\varepsilon)=\iint_{\Omega}[[N]\exp(-j\beta z)]^{*}[\nabla\times([K]^{-1}\nabla\times\mathbf{H})-k_0^2\mathbf{H}]dxdy-\iint_{\Omega}[[N]\exp(-j\beta z)]^{*}[\nabla(\nabla\cdot\mathbf{H})]dxdy=\{0\} \quad (13)$$

여기서 아스테리스크(*)는 공액 복소수를 나타낸다.

(13)식에 발산정리와 Green 항등식을 이용하여 표현하면

$$\iint_{\Omega}[(\nabla\times\mathbf{H})^{*}([K]^{-1}\nabla\times\mathbf{H})+(\nabla\cdot\mathbf{H})^{*}(\nabla\cdot\mathbf{H})-k_0^2\mathbf{H}^{*}\cdot\mathbf{H}]dxdy+\oint\exp(j\beta z)[N]^{*}[n\times([K]^{-1}\nabla\times\mathbf{H})]d\Gamma-\oint\exp(j\beta z)[N]^{*}[n(\nabla\cdot\mathbf{H})]d\Gamma=\{0\} \quad (14)$$

(14)식에 (7)식을 대입하여 정류조건을 만족하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$([S]+[U])\{H\}-k_0^2[T]\{H\}=\{0\} \quad (15)$$

여기서, $$[S]=\iint_{\Omega}[F]^{*}[K]^{-1}[F]^{T}dxdy \quad (16)$$

$$[T]=\iint_{\Omega}[N]^{*}[N]^{T}dxdy \quad (17)$$

$$[U]=\iint_{\Omega}\{G\}\{G\}^{T}dxdy \quad (18)$$

Ⅲ. 고유값 문제

전항에서 유도한 (15)식은 전파상수 값에 의해서 고유값인 주파수를 구하는 경우, 복소매질이나 매질상수 값이 주파수와 함께 변하는 경우 많은 시간을 요하는 반복계산이 필요하게 된다.

여기서는 k_0값에 의해서 β값을 구하는 방법으로서 계산을 간단히 하기 위하여 비대각 성분을 갖지 않는다고 하였다.

(15)식을 전개해서 정리하면 다음과 같다.

$$(\beta^2[P]+\beta[Q]+[R]-k_0^2[M])\{H\}=\{0\} \quad (19)$$

$$[P]=\begin{vmatrix}[P_{xx}] & [P_{xy}] & [P_{xz}]\\ [P_{yx}] & [P_{yy}] & [P_{yz}]\\ [P_{zx}] & [P_{zy}] & [P_{zz}]\end{vmatrix} \quad (20)$$

$$[Q]=\begin{vmatrix}[Q_{xx}] & [Q_{xy}] & [Q_{xz}]\\ [Q_{yx}] & [Q_{yy}] & [Q_{yz}]\\ [Q_{zx}] & [Q_{zy}] & [Q_{zz}]\end{vmatrix} \quad (21)$$

$$[R]=\begin{vmatrix}[R_{xx}] & [R_{xy}] & [R_{xz}]\\ [R_{yx}] & [R_{yy}] & [R_{yz}]\\ [R_{zx}] & [R_{zy}] & [R_{zz}]\end{vmatrix} \quad (22)$$

(19)식은 K_0에 의해서 전파상수를 구하는 고유치 방정식이 된다.

일반적인 고유치 방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\lambda^2[A]\{H\}+\lambda[B]\{H\}+[C]\{H\}=\{0\} \quad (23)$$

(19)식과 (23)식에서 다음과 같은 대응관계를 갖게 한다.

www.dbpia.co.kr

$$[A]=[P]$$
$$[B]=[Q] \qquad (24)$$
$$[C]=[R]-k_0^2[M]$$
$$\lambda=\beta$$

일반적으로 (23)식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix}[A] & [0]\\ [0] & [C]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda\{H\}\\ \{H\}\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}[0] & [A]\\ [A] & [B]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda\{H\}\\ \{H\}\end{bmatrix} \qquad (25)$$

Ⅳ. 수치계산 및 결과

먼저 대칭성을 가진 도파관의 단면을 그림2에 나타낸 바와같이 2차 3각형요소로 전체 단면을 1/4로 분할하면 요소수(N_E)는 8개, 절점수(N_P)는 25개가 된다. 여기서 유전체 도파관의 가로의 폭, 세로의 폭을 w,t라고 하고 경계조건 AD와 CD는 완전도체라 가정하였다.

그림3은 AB와 BC의 경계조건이 $H_x=0$와 $H_y=0$인 경우에 전파상수 값을 변화시켜 가면서 주파수를 구하는 경우 고유모드 와 spurious 모드를 동시에 나타낸 분산 특성이다.

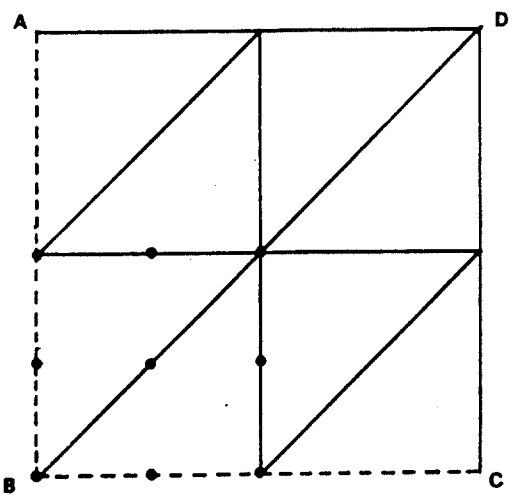


그림2. 유전체 구형도파관의 요소분할
Element division for an dielectric rectangular waveguide

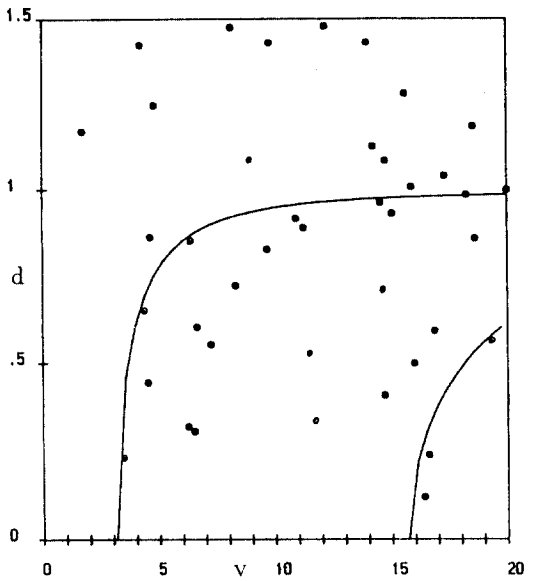


그림3. spurious가 있는 유전체 구형도파관의 분산특성
Dispersion charateristics for dielectric rectangular characteristics with spurious

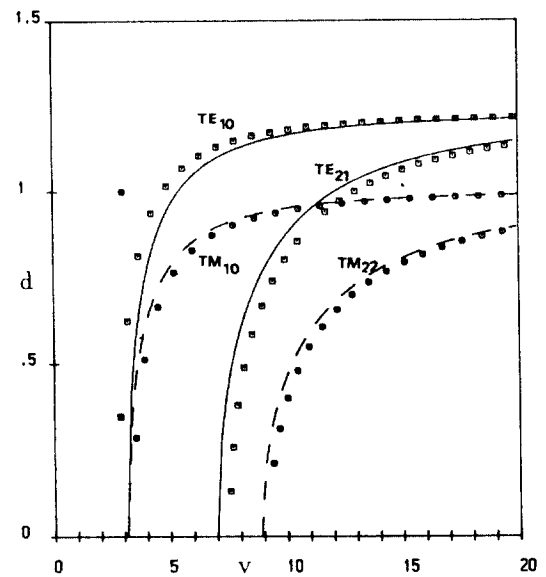


그림4. $\epsilon_s=1.0$, $\epsilon_s=1.5$일때 유전체 구형도파관의 분산특성
Dispersion characteristics for dielectric waveguide with relative permittivity, $\epsilon_s=1.0$, $\epsilon_s=1.5$, respectively

www.dbpia.co.kr

그림4는 유전체 도파관의 폭(w)은 2cm, 두께(t)도 2cm, 비유전율이 각각 1.0, 1.5일경우에,

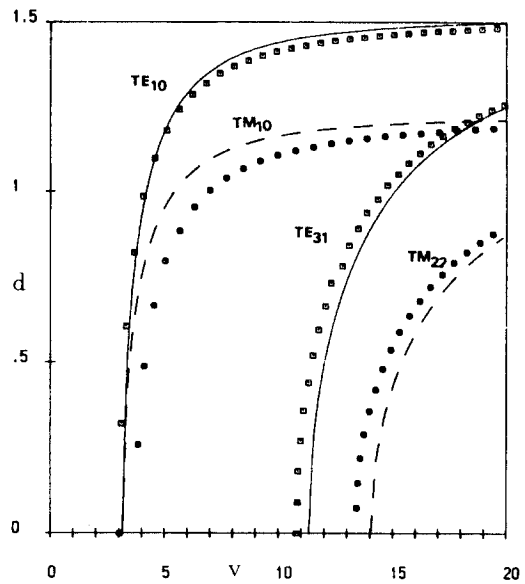


그림5. ϵ_s=1.5, ϵ_s=2.3일때 유전체 도파관의 분산특성
Dispersion characteristics for dielectric rectangular waveguide with relative permittivity, ϵ_s=1.5, ϵ_s=2.3, respectively

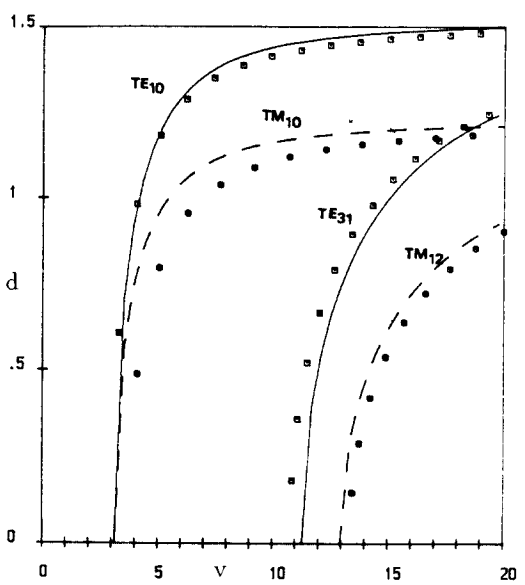


그림6. ϵ_s=1.0, ϵ_s=1.5와 w=4cm, t=2cm 일때 유전체 도파관의 분산특성
dispersion characteristics for dielectric waveguide with relative permittivity, ϵ_s=1.0, ϵ_s=1.5 and w=4 cm, t=2cm

실선과 점선은 이론값에 해당하며, ○표와 □표시는 유한요소법에 의한 결과를 나타내고 있다.

마찬가지로 그림5는 폭과 두께가 w=2cm, t=1cm이고, 비유전율이 1.5, 2.3일때 각각 분산특성을 나타내고 있으며 10%이내의 오차를 나타내고 있으나 이러한 오차는 요소수를 증가 시키므로서 오차를 줄일수 있다.

그림6은 w=4cm, t=2cm이고, 비유전율이 각각 1.0, 1.5일때 분산특성을 나타내고 있다.

다음은 그림7에 나타낸 바와같이 원형도파관을 2차 3각형요소로 분할하면 20개의 요소수와 51개의 절점수가 얻어지며 분산특성을 그림8,9에 나타냈다. 그림8,9에서 반경을 각각 r=3cm, 6cm일때 분산특성을 나타내고 있으며, 실선은 이론값에 대해서 ○표시는 유한요소 표시식의 해석결과를 비교하고 있다.

가장 낮은 차수의 도파모드인 경우는 충분히 좋은 결과를 얻고 있으나 그외의 도파모드에 대해서도 어느정도 오차를 갖고 있다.

이러한 오차를 보다 적게 하기 위해서는 요소분할수를 보다 많게 하거나 혹은 고차의 계수로 표현된 형상함수가 필요하게 된다.

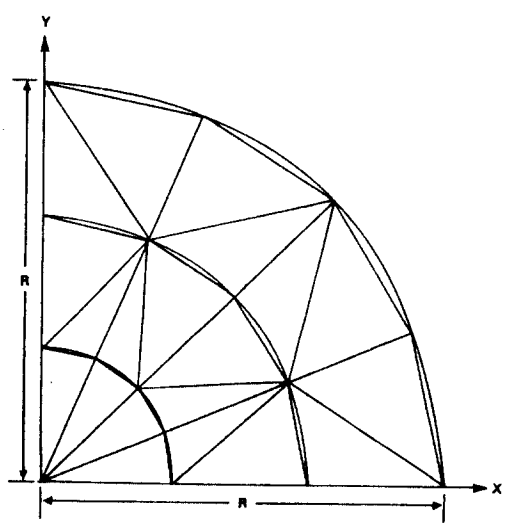


그림7. 원형도파관의 1/4의 유한요소 분할
The finite-element division of one quarter of a circular waveguide

www.dbpia.co.kr

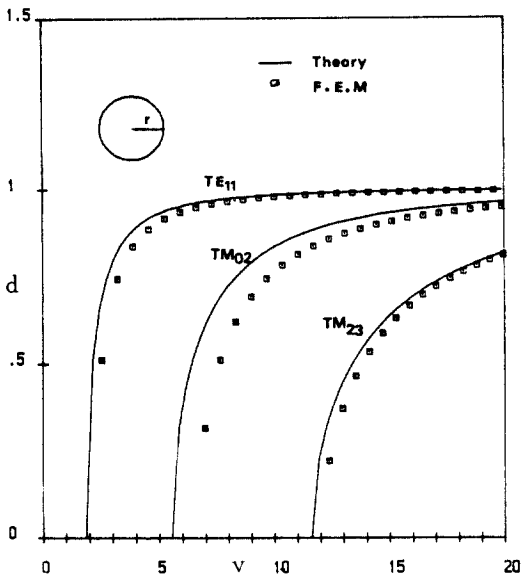


그림8. r=3cm 일때 원형 도파관의 분산특성
Dispersion characteristics for a circular waveguide with radius r=3cm

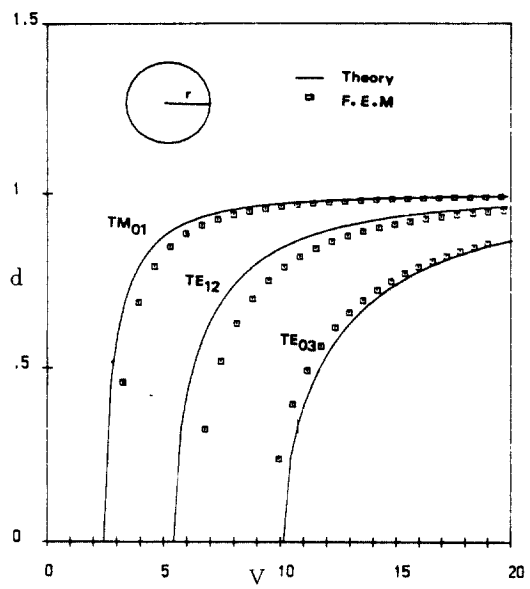


그림9. r=6cm 일때 원형도파관의 분산특성
Dispersion characteristics for a circular waveguide with radius r=6cm

V. 결 론

유전체 도파관의 모드 해석법으로서 자계 3성분에 의한 변분표현식에 Galerkin법을 적용한 유한요소 표시식을 제안 하였다. 이 방법은 $\nabla \cdot H=0$ 조건을 고려해서 유전체 도파관의 전파특성을 해석한 결과 spurious해는 나타나지 않았으며 이론값과 잘 일치하는 것을 알수 있다.

전파상수 값에 의해서 고유치 문제인 주파수를 구할때 도파관의 차단주파수를 구하거나, 분산성 매질이 있는 도파관해석에 대해서는 많은 시간을 요하는 반복계산이 필요하지만 주파수에 의해서 전파정수를 구하는 경우에는 이러한 문제점을 극복할 수 있다. 이러한 방법에 의해서 임의의 형태 도파관에 적용하여 전파특성 해석에 많이 이용되리라고 생각한다.

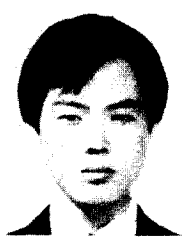
參 考 文 獻

1. M.V.K. Chari and P.P. Silvester, Ed: Finite Element in Electrical and Magnetic Field problem, John wiley sons, 1980.
2. P.P. Silvester and R.L. Ferrari: Finite Element for Electrical Engineers, Cambridge University Press, 1983.
3. P.Daly: Hybrid-mode analysis of microstrip by finite-element methods, IEEE Trans. Microwave Theory & Tech, MTT-19, 1, pp. 19-25, Jan. 1971.
4. C. Yeh, S.B. Dong, and W.Oliver: Arbitrarily shape inhomogenous optical fiber or integrated optical waveguides, J. Appl, phys., 46,5. pp. 2125-2129, May, 1975.
5. N. Mabaya, P.E. Lagasse, and P. Vandenbulke: Finite element analysis of optical waveguides, IEEE Trans. MTT-29, 6, pp.600-605, June.1981.
6. A. Konrad: Vector variational formulation of electromagnetic fields in anisotropic media, IEEE Trans. maicrowave Theory & Tech., MTT-24,9. pp. 553-599, Sept.1976.
7. B.M.A.Rahman and J.B.Davies: Finite-element analysis optical and microwave waveguide problems,

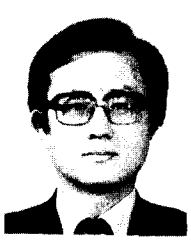
www.dbpia.co.kr

IEEE Trans. MTT-32, 2, pp.20 18, Jan.1984.
8. B.M.A. Rahman and J.B. Davies: Penalty function improvement of waveguide solution by finite elements.IEEE Trans. Microwave Theory & Tech., MTT 32, 8, pp. 922-928, Aug 1984.
9. A.J.Kobelansky and J.P.webb: Eliminating spurious modes in finite-element waveguide problems by using divergence-free fields Electron. Lett., 22, 11, pp.569-570, May 1986.
10. N. Marcuvitz, Waveguide Handbook, New Yorek: Mcgraw-Hill, 1951.
11. 강길범, 윤대일, 김정기 "유한요소법에 의한 전자파 도파관의 모드해석"한국 통신학회 1988년도 추계 학술발표회 논문집 pp. 131-134, Nov. 1988.
12. Gil Bum Kang, Dae Il Yune, and Jung Ki Kim Finite-element Analysis of Dielectric Loaded waveguides using Transverse Field Componentsproceeding of JC MECOD '88, KITE, pp.84-87, Nov. 1988.
13. 강길범, 윤대일, 김정기"전자파 도파관의 고유모드에 관한 수치해석"전자공학회 1988년도 추계 학술발표회 논문지, Nov.1988.
14. A.D. Berk, Variatioal principal for electromagnetic resonators and waveguides, IRE Trans. Antenna & prop., Ap-4, 2, pp.104-111, April 1956.

康 吉 範(Gil Bum KANG) 正會員
1951年 3月 7日生
1978年 2月：東亞大學校 電子工學科 卒業
1981年 2月：中央大學校 大學院 電子工學科 工學碩士 學位 取得
1986年 3月～現在：中央大學校 大學院 博士課程 修了
1981年 3月～現在：東明專門大學 電子科 副教授
※주관심분야는 마이크로파 工學 및 안테나 공학 등임.



尹 大 日 (Dae Il YUNE) 準會員
1964年 5月 5日生
1987年 2月：中央大學校 工科大學 電子工學士 卒業(工學士)
1988年 3月～現在：中央大學校 大學院 電子工學科 碩士課程
※주관심분야는 마이크로파 工學 및 안테나 工學 등임



金 正 祺(Jung Ki KIM) 正會員
1942年 5月 5日生
1965年 2月：延世大學校電氣工學科卒業
1969年 2月：延世大學校大學院電氣工學科(工學碩士)
1975年 2月：延世大學校大學院電氣工學科(工學博士)
1970年 3月～1977年 2月：光云工科大學 副教授
1977年 3月～現在：中央大學校電子工學科 教授
1982年12月～1983年12月：美코넬大學校 客員教授

www.dbpia.co.kr