

論 文

特異值 分解를 이용한 狀態 空間  
디지털 필터의 最適 實現

正會員 文 庸 善\* 正會員 朴 鍾 安\*\* 正會員 金 在 玟\*\*\*

Optimal Realization of a State-Space Digital Filter Using Singular Value Decomposition

Yong Sun MOON\*, Jong An PARK\*\*, Jai Min KIM\*\*\* *Regular Members*

**要 約** 디지털 필터 설계에 있어서 係數 量子化 誤差 분석은 유한 어장의 실제적 필요성 때문에 제기되는데 이들 오차는 係數 量子化 誤差와 Round off 誤差로 분류된다. 본 논문에서는 이들 오차를 분석하고 감소시키기 위하여 임펄스 설계 명세로부터 직접 최소 係數 量子化 실현을 유도하고 또한 최소 係數 量子化 誤差와 최소 Round off 誤差 실현 사이의 등가 변환 관계로부터 最適 實現 狀態 空間 디지털 필터를 설계한다. 이러한 방법은 근사화된 3차 모델의 시뮬레이션에 의하여 분석되어 있는데 係數 量子化 誤差 문제에 있어서 직접형이나 중속형 실현보다 우수한 특성을 갖는다.

**ABSTRACT** The problem of quantization errors in digital filter design arises because of the practical necessity due to finite wordlength implementation. These errors are classified into coefficient quantization error and round off error.

In this paper, in order to analyze and reduce these errors, minimum coefficient quantization realization is directly derived from impulse-response design specification. And using the equivalent transform relation between minimum coefficient quantization error and minimum roundoff error realizations, we synthesize an optimal realization state-space digital filter. This technique is analyzed by the simulation of an approximated 3rd model, which shows that it is superior to direct or cascade state-space digital filter in quantization errors.

I. 서 론

디지털 필터의 특성은 일반적으로 이산 전달 함수에 의해 표현되는데 이와 같은 디지털 필터

의 실제 및 실현 과정은 설계 명세 조건을 만족 하는 이산 전달 함수의 近以化, 最適의 필터 구조를 결정하는 合成, 그리고 近以와 合成으로 구해진 결과를 컴퓨터 상의 소프트 웨어나 디지털 프로세서에 의해서 필터를 실현하는 3단계로 행하여 진다. 그러나 이때 설계 명세 조건에 적합한 이산 전달 함수가 近以化된 경우에도 시스템 실현의 한계 즉 유한 어장(Finite wor-

\* 朝鮮大學校 電子工學科  
Dept. of Elec. Eng. Chosun Univ.  
\*\* 동신工科大学 電子工學科  
Dept. of Elec. Eng. Dongshin Engineering College  
論文番號 : 90 - 17 (接受 1989. 10. 27)

length : FWL)의 수치 표현 및 FWL의 연산 실행에 기인한 매개 변수의 미소 변동 때문에 내부 量子化 誤差(係數 量子化 誤差, Round off 誤差)가 발생하게 되어 정확한 출력 신호를 얻을 수 없다. 이러한 量子化 誤差는 실현어장의 증가에 따라서 감소하지만 어장의 증가는 속도의 저하 및 실현 규모의 증대를 초래하므로 FWL 디지털 필터는 허용 오차 범위 내에서 최소 量子化 誤差를 갖도록 설계되어야 한다.<sup>(1-3)</sup> 실질적으로 디지털 필터의 FWL에 기인해서 발생한 내부 量子化 誤差는 디지털 필터 구조, 신호 처리 소자, 그리고 동작 속도등에 밀접한 관계가 있으며 이러한 誤差의 해석은 디지털 필터의 입출력 특성을 나타내는 이산 전달 함수를 이용해서 각각의 실현 구조에 대해 행하여 졌다. 그러나 디지털 필터의 입출력 관계만을 나타내는 이산전달 함수 표현은 극점 및 영점등에 관한 주파수 특성을 해석하는데 이용 되지만, 量子化 誤差 및 연산등의 디지털 필터의 내부 구조에 의존해서 변화하는 해석 문제를 체계적으로 취급하는 것은 어렵게 되어 量子化 誤差를 最小로 하는 디지털 필터의 실현 구조를 合成할 수 없다.<sup>(4-5)</sup> 그러나 狀態 空間에 의해서 표현된 디지털 필터 즉 狀態 空間 디지털 필터(State-space Digital Filter : SSSF[ABCd])는 상태 변수로 해서 내부 실현 구조를 규정하고 있을 뿐만 아니라 等價 變換에 의해서 다른 실현 구조를 표현할 수 있으므로 狀態 空間 표현을 이용한 Roundoff 誤差 最小 構造(最適實現 : Optimal Realization) 및 係數 量子化 誤差 最小 構造에 많은 연구가 집중되어지고 있다.<sup>(6-9)</sup> 이와 같은 디지털 필터의 설계에 있어서 설계 명세 조건이 周波數 領域으로 주어지므로 근사에서는 전달함수를 合成時는 狀態 空間 모델을 혼용하고 있기 때문에 디지털 필터를 설계하는데 많은 계산량이 필요 하다. 그러나 설계 명세 조건으로서 임펄스 응답이 주어지는 경우 狀態 空間 모델을 시간 영역에서 직접 유도 할 수 있을 뿐만 아니라 진폭과 위상을 동시에 근사하는 장점을 갖는다.

그러므로 本論文에서는 時間 領域으로 설계

명세 조건이 주어지는 경우 特異值 分解에 의해 係數 量子化 誤差 狀態 空間 디지털 필터가 합성 되어 지는 사실과 선형 시스템에서 평형형 실현 구조를 유도할 수 있는 시스템 同定法을 이용하여 실제 명세 조건으로 부터 직접 計數 量子化 誤差 最小形 상태 공간 디지털 필터를 합성하며 주어진 실제 명세 조건에 대해서 정확히 近以시키기 위해서는 무한 차수의 상태 공간 모델이 필요하므로 近以 허용 오차 범위 내에서 모델 저차수화법을 적용하여 저차수화된 평형형 실현 즉 係數 量子化 誤差 最小形 狀態 空間 디지털 필터를 유도한다. 그리고 디지털 필터 실현에서 係數 量子化 誤差 最小形 狀態 空間 디지털 필터 보다는 最適 實現 구조가 요구 되어 지므로, 係數 量子化 誤差 最小 실현을 위한 등가 變換 行列과 最適 實現을 위한 등가 변환 행렬 사이에 상호 등가 변환할 수 있는 관계로부터 最適 實現 구조의 狀態 空間 디지털 필터 설계법을 제안하고, 근사화된 3차 모델의 실현 예 및 시뮬레이션을 통하여 그의 타당성을 확인한다.

## II. 狀態 空間 디지털 필터의 量子化 誤差 最小 實現

### II-1. 디지털 필터의 狀態 空間 表現

n차 선형, 시불변 디지털 필터의 입출력 관계를 나타내는 전달함수 H(z)는 식(1)과 같다.

$$H(z) = \frac{q_0z^1 + \dots + q_nz^n}{1 + p_1z^{-1} + \dots + p_nz^{-n}} + d \quad (1)$$

식(1)의 전달함수를 갖는 디지털 필터의 狀態 方程式은 식(2)와 같이 표현된다.

$$x(k+1) = A_x(k) + B_u(k) \quad (2-a)$$

$$y(k) = Cx(k) + d_u(k) \quad (2-b)$$

식(2)에서 x(k)는 n次 狀態 벡터, u(k)와 y(k)는 입력과 출력이며, A,B,C, 그리고 d는 각각

$n \times n$ ,  $n \times 1$ ,  $1 \times n$ , 그리고  $1 \times 1$ 의 實係數 行列이다. 이와 같이 디지털 필터의 실현구조를 상태방정식 및 출력방정식으로 표현된 디지털 필터를 狀態 空間 디지털 필터(State-Space Digital Filter : SSDF)라 하며 SSDF[ADCd]로 표기한다. 식(2)으로부터 전달함수는 식(3)과 같이 구해진다.

$$H(z) = C(zI - A)^{-1}B + d \quad (3)$$

식(2)으로 표현된 디지털 필터가 안정하다면 다음의 Lyapunov 方程式 식(4)와 식(5)의 해  $K$ 와  $W$ 는 對稱 正定 行列이다. 이때  $K$ 와  $W$ 를 SSDF[ABCd]의 가제어성 그라미안과 가관측성 그라미안으로 정의되며,  $K$ 와  $W$ 의 고유치는 가제어성과 가관측성의 크기를 나타낸다.<sup>10-11)</sup>

$$K = KA^t + BB^t = \sum_{i=0}^{\infty} A^i BB^t A^{it} \quad (4)$$

$$W = A^t WA + C^t C = \sum_{i=0}^{\infty} A^{it} C^t C A^i \quad (5)$$

$n \times n$ 의  $V$ ( $T \neq 0$ )를 이용해서 狀態 벡터를  $x'(k) = T^{-1}x(k)$ 으로 변환하면 狀態 벡터  $x'$ 으로 하는 SSDF[ $T^{-1}AT, T^{-1}B, CT, d$ ]가 얻어진다. 이때 SSDF[ $T^{-1}AT, T^{-1}B, CT, d$ ]의 가제어성 그라미안  $K'$ 와 가관측성 그라미안  $W'$ 는 다음식이 된다.

$$K' = T^{-1}KT^{-1} \quad (6)$$

$$W' = T^t WT \quad (7)$$

식(6)과 식(7)으로부터 狀態空間의 가제어성과 가관측성의 크기는 변화되는 것을, 또한 식(8)으로부터  $K' \cdot W'$ 의 고유치는 等價變換에 대하여 변화하지 않는 것을 알수 있다.

$$K' \cdot W' = (T^{-1}KT^{-1})(T^t WT) = T^{-1}KWT \quad (8)$$

식(2)으로 표현된 디지털 필터를 신호처리 프로세서나 범용 계산기에 의해서 실현하는 경우

물리적 제약 조건에 기인한 특성약화를 고려한다면 狀態空間 디지털 필터는 식(9)로 표현한다.

$$\tilde{x}(k+1) = [A + \Delta A]\tilde{x}(k) + [B + \Delta B]u(k) + \alpha(k) \quad (9-a)$$

$$\tilde{y}(k) = [C + \Delta C]\tilde{x}(k) + [d + \Delta d]u(k) + \beta(k) \quad (9-b)$$

식(9)에서  $\Delta A, \Delta B, \Delta C$ , 그리고  $\Delta d$ 는 係數 量子化 誤差,  $\alpha(k)$ 는 狀態 벡터를 구할때 승산 결과의 Roundoff 오차, 그리고  $\beta(k)$ 는 출력 연산 결과의 Roundoff 오차이다. 그러므로 식(2)과 식(9)를 이용하면 狀態벡터오차  $E_x(k) = \tilde{x}(k) - x(k)$  및 출력오차  $\Delta y(k) = \tilde{y}(k) - y(k)$ 는 식(10)과 같이 구해진다.

$$E_x(k+1) = AE_x(k) + \Delta A x(k) + \Delta B u(k) + \alpha(k) \quad (10-a)$$

$$\Delta y(k) = CE_x(k) + \Delta C x(k) + \Delta d u(k) + \beta(k) \quad (10-b)$$

## II-2. 係數 量子化 誤差 및 Roundoff 誤差

狀態 空間 디지털 필터에서 상태 공간 계수 행렬의 미소 변동만을 고려한 SSDF[ $A + \Delta A, B + \Delta B, C + \Delta C, d + \Delta d$ ]의 狀態 空間 표현은 식(11)와 같다.

$$\tilde{x}(k+1) = [A + \Delta A]\tilde{x}(k) + [B + \Delta B]u(k) \\ \tilde{y}(k) = [C + \Delta C]\tilde{x}(k) + [d + \Delta d]u(k) \quad (11)$$

식(11)로 부터 狀態 空間 係數의 量子化에 기인한 출력오차  $\Delta y_c(k)$ 는 식(12)와 같이 구해진다.

$$E_x(k+1) = AE_x(k) + \Delta A x(k) + \Delta B u(k) \\ \Delta y_c(k) = CE_x(k) + \Delta CE_x(k) + \Delta d u(k) \quad (12)$$

식(12)에서  $\Delta A, \Delta B, \Delta C$ , 그리고  $\Delta d$ 는 평균0, 분산  $\sigma^2$  ( $0 < \sigma < 1$ )인 正規 白色 雜音으로 가정할 때 狀態 空間 係數의 量子化에 기인한 出力 誤差 즉 係數 量子化 誤差의 分散  $E[\Delta y_c^2]$ 는 식(1

3)과 같이 유도된다.<sup>(12)</sup>

$$E[\Delta y_c^2] = \sigma^2 \left\{ \sum_{n=1}^n K_{n+1} + 1 \right\} \left\{ \sum_{n=1}^n W_{n+1} + 1 \right\} \quad (13)$$

식(13)에서 K와 W는 가제어성 그라미안이며, 係數 量子化 誤差를 계수 행렬의 미소 변동의 分散  $\sigma^2$ 으로 正規化한 값은 係數 感度(Coefficient Sensitivity : CS)로 정의한다.

$$CS = \frac{E[\Delta y_c^2(k)]}{\sigma^2} = \frac{\left\{ \sum_{n=1}^n K_{n+1} + 1 \right\}}{\left\{ \sum_{n=1}^n W_{n+1} + 1 \right\}} \quad (14)$$

또한 狀態 空間 디지털 필터의 연산결과를 양자화 함에 따라서 오차가 발생하는데 식(11)에서 이러한 오차 성분만을 고려한 狀態 空間 표현은 식(15)와 같다.

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k+1) &= A\tilde{x}(k) + Bu(k) + \alpha(k) \\ \tilde{y}(k) &= C\tilde{x}(k) + du(k) + \beta(k) \end{aligned} \quad (15)$$

식(2)과 식(15)로 부터 연산결과의 양자화에 기인한 出力 誤差 즉 Roundoff 誤差  $\Delta y_r(k) = \tilde{y}(k) - y(k)$ 는 식(16)와 같이 되며 이때 오차원  $\alpha(k)$ 와  $\beta(k)$ 에 대해서 평균0, 분산  $\sigma^2 = 2^{-2L} / 12$  (L : 양자화 비트)인 白色 雜音으로 가정하면 Roundoff 誤差의 分散은 식(17)으로 구해진다.<sup>(10)</sup>

$$\begin{aligned} E_x(k+1) &= AE_x(k) + \alpha(k) \\ \Delta y_r(k) &= CE_x(k) + \beta(k) \end{aligned} \quad (16)$$

$$E[\Delta y_r^2(k)] = \sigma^2(n+1) \sum_{n=1}^n W_{n+1} + \sigma_n \quad (17)$$

식(17)에서 우변 2개項을 비교하면 제2項에 비해서 제1項이 큰값을 가질 뿐만 아니라, W는 디지털 필터의 실현 구조에 의존하므로 Round off 誤差의 평가 함수로서 雜音 利得(Noise Gain : NG)를 식(18)과 같이 정의한다.

$$NG = \sum_{n=1}^n W_{n+1} \quad (18)$$

### II-3. 量子化 誤差 最小實現

SSDF[ $T^{-1}AT, T^{-1}B, CT, d$ ]의 係數 感度 CS'와 雜音 利得 NG'는 식(19)와 같이 표현되므로 실현구조에 의존하게 된다.

$$CS' = \left\{ \sum_{n=1}^n (T^{-1}KT^{-1})_{n+1} + 1 \right\} \left\{ \sum_{n=1}^n (T^{-1}W_T)_{n+1} + 1 \right\} \quad (19-a)$$

$$NG' = \sum_{n=1}^n (T^{-1}WT)_{n+1} \quad (19-b)$$

그러므로 SSDF[ABCd]의 量子化 誤差를 最小하게 하기 위해서는 NG' 및 CS'를 最小로 하는 等價 變換 行列 T를 구해야 한다. 그러나 量子化 誤差의 最小化를 위해서는 너무 적은 값을 취한다면 SSDF[ $T^{-1}AT, T^{-1}B, CT, d$ ]의 狀態 向量  $x' = T^{-1}x$ 의 관계로 부터  $x'$ 가 극단적으로 크게 되어 필터의 동적 범위를 초과하여 오버플로우가 발생하게 되므로 오버플로우가 발생하지 않는 범위에서 量子化 誤差를 적게 발생하는 等價 變換 行列 T를 선택해야 한다. 量子化 誤差의 最小 實現을 위해서는 디지털 필터의 전달함수 H(z)으로 부터 SSDF[ABCd]가 유도될 때 係數 感度 CS'를 最小으로 하는 SSDF[ $A_c B_c C_c d_c$ ]의 합성은 식(20)을 만족하는 等價 變換 行列 T를 이용하면 합성되어 지며, 또한 Roundoff 最小 실현 즉 最適 實現 SSDF[ $A_0 B_0 C_0 d$ ]는 식(21)을 만족하는 等價 變換 行列 T를 이용하면 얻어진다.<sup>(10-12)</sup>

$$T = T_0 R D U \quad (20)$$

$T_0 = T_0 T_0^t = K$ 가 되는 正則 行列

$R = R^t (T_0^t W T_0) R = \text{diag}(\theta_1^2, \theta_2^2, \dots, \theta_n^2)$ 가 되는 直交 行列

$$D = \text{diag}(\theta_1^{-\frac{1}{2}}, \theta_2^{-\frac{1}{2}}, \dots, \theta_n^{-\frac{1}{2}})$$

U = 임의의 直交 行列

$\Theta_1 = 2$ 차 모드

$$T = T_0 R_1 G S_0^t \quad (21)$$

$T_0 : T_0^t T_0 = K$ 가 되는 正則 行列

$$G : G = \text{diag} (g_1, g_2, \dots, g_n)$$

$$g_i = \left( \sum_{l=1}^N \theta_l / N \theta_l \right)^{1/2}$$

$S_0 : \text{diag} (S_0 G^{-2} S_0^t) = 1$  이 되는 直交 行列

$R_1 : R_1^t T_0^t W T_0 R_1 = \text{diag} (\theta_1^2, \theta_2^2, \dots, \theta_n^2)$  이 되는 直交 行列

### III. 狀態 空間 디지털 필터의 저차수 분해

식(20)의 等價 變換 行列 T를 이용하면 SSDF [ABCd]로 부터 係數 量子化 誤差 최소 실현 SSDF [T<sup>-1</sup>A<sup>t</sup>T, T<sup>-1</sup>B, C<sup>t</sup>T, d]가 설계되어 지며, 이때 가제어성 그래미안 K'와 가관측성 그래미안 W'는 식(22), 식(23)과 같다.

$$K' = T^{-1} K T^{-t}$$

$$= U^{-1} D^{-1} R^{-1} T_0^{-1} K T_0^{-t} R^{-t} D^{-t} U^{-t}$$

$$= U^t \cdot \text{diag} (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \cdot U \quad (22)$$

$$W' = T^t W T$$

$$= U^t D^t R^t (T_0^t W T_0) R D U$$

$$= U^t \cdot \text{diag} (\theta_1^2, \theta_2^2, \dots, \theta_n^2) U \quad (23)$$

식(22)와 식(23)에 있어서  $\forall U$ 는 直交 行列이므로  $U=I$ 로 한다면  $K'=W'=\text{diag} (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ 이 되기 때문에 係數 量子化 誤差 최소형 SSDF [A<sub>c</sub>B<sub>c</sub>C<sub>c</sub>d]는 평형형 실현이 되는 것을 알수 있다. 그러므로 식(11)의 SSDF [A<sub>c</sub>B<sub>c</sub>C<sub>c</sub>d]에 선형 시스템의 모델 저차수화법을 적용하고  $\theta_r \gg \theta_{r+1}$ 이라고 가정하면 狀態 空間은 식(24)와 같이 분해된다.

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(k) \quad (24-a)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + du(k) \quad (24-b)$$

식(24)는 두개의 중속 시스템 SSDF [A<sub>11</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>d]와 SSDF [A<sub>22</sub>B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>d]가 내부적으로 결합된 것으로 간주 할 수 있다. 이러한 중속 狀態 空間 디지털 필터는 식(25)으로부터 점근적 안정하며 평형형 실현 구조가 된다.<sup>(14)</sup>

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_{11}^l B_1 B_1^t A_{11}^{t l} = \sum_{l=0}^{\infty} A_{11}^l C_1^t C_1 A_{11}^l$$

$$= \text{diag} (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r) \quad (25-a)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_{22}^l B_2 B_2^t A_{22}^{t l} = \sum_{l=0}^{\infty} A_{22}^l C_2^t C_2 A_{22}^l$$

$$= \text{diag} (\theta_{r+1}, \dots, \theta_n) \quad (25-b)$$

### IV. 狀態 空間 디지털 필터의 最適 實現

#### IV-1. 特異值 分解

時間 領域 설계 명세 조건으로부터 주어진 임펄스 응답 h(k)를 근사적으로 발생하는 狀態 空間 매개변수를 결정할 수 있다. 그러나 유도된 SSDF [ABCd]의 차수는 고차가 되기 때문에 차수의 감소를 위하여 임펄스 응답으로 작성된 Hankel 行列의 特異值 分解에 의한 모델 저차수화법을 적용하여 SSDF [ABCd]를 유도한다.

주어진 임펄스 응답 h(k)가 설계 명세 조건으로 주어질 때 Hankel 行列은 식(26)으로 정의한다.

$$H = \begin{bmatrix} h(1) & h(2) & \dots & h(n-1) \\ h(2) & h(3) & \dots & 0 \\ h(3) & h(4) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h(n-1) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

SSDF [ABCd]의 임펄스 응답 식(27)의 관계로부터 식(28)의 관계가 얻어진다.

$$y(k) = Cx(k) + du(k)$$

$$= C \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} A^{l-1} B u(k-l) \right\} + du(k)$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} C A^{l-1} B u(k-l) + du(k) \quad (27-a)$$

$$y(k) = \sum_{l=1}^{\infty} h(l) u(k-l) \quad (27-b)$$

$$h(l) = \begin{cases} 0 \text{ (Causality)} & l < 0 \\ d & l = 0 \\ CA^{l-1}B & l > 0 \end{cases} \quad (27-c)$$

$$\begin{aligned} H &= RQ \\ Q &= [B, AB, \dots, A^{N-2}B] \\ R &= [C^t, A^t C^t, \dots, (A^t)^{N-2} C^t]^t \end{aligned} \quad (28)$$

식(28)에서 Q와 R는 SSDF[ABCd]의 제어성 행렬과 가관측성 행렬이며, 식(26)과 식(28)으로 정의된 Hankel 行列은 식(29)와 같이 特異值 分解되어 진다.<sup>(13-14)</sup>

$$\begin{aligned} H &= \sum_{k=1}^n \theta_k U_k V_k^t \\ &= U \Sigma V \\ &= R \cdot Q \end{aligned} \quad (29)$$

단 U, V : n × n 正規 直交 行列

$$\Sigma = \text{diag}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n), \theta_i > \theta_{i+1}, i=1 \sim n-1$$

또한 식(29)는 식(30)과 같이 표현할 수 있으며 K=QQ<sup>t</sup> W=R<sup>t</sup>R으로 정의되어 지므로 V<sub>1</sub>는 SSDF[ABCd]의 2차모드와 동일하다.

$$\begin{aligned} H &= \begin{bmatrix} r & n-r \\ U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & n-r \\ \Sigma_1 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} r \\ n-r \end{matrix} \\ &= U_1 \Sigma_1 V_1 + U_2 \Sigma_2 V_2 \end{aligned} \quad (30)$$

#### IV-2. 時間 領域으로 부터 係數 量子化 誤差 最小 SSDF[ABCd]의 설계

時間 領域의 설계 명세 조건으로 부터 주어진 임펄스 응답을 근사하는 SSDF[ABCd]는 다음과 같이 유도된다.

$$Q = [B \ AB \ \dots \ A^{N-2} B] = \begin{bmatrix} \Sigma_1^{\frac{1}{2}} V_1 \\ \Sigma_2^{\frac{1}{2}} V_2 \end{bmatrix} \quad (31-a)$$

$$R = [C^t A^t C^t \dots (A^t)^{N-2} C^t]^t = [U_1 \Sigma_1^{\frac{1}{2}} \ U_2 \Sigma_2^{\frac{1}{2}}] \quad (31-b)$$

식(31-b)에서 A를 곱하면 식(32)가 얻어지며 식(30)에서 [·]<sup>\*</sup>는 1행 위로 이동해서 "0"을 삽입한 행렬이다.

$$\begin{aligned} RA &= [A^t C^t \dots (A^t)^{N-1} C^t]^t \\ &= [U_1 \Sigma_1 \ \ U_2 \Sigma_2]^* \end{aligned} \quad (32)$$

그런데 係數 量子化 誤差 最小形 SSDF[A<sub>c</sub>B<sub>c</sub>C<sub>c</sub>d]는 K=W=Σ이므로 狀態 空間 係數 A를 분해할 수 있기 때문에 식(33)이 성립한다.

$$\begin{aligned} RA &= [U_1 \Sigma_1^{\frac{1}{2}} \ U_2 \Sigma_2^{\frac{1}{2}}] \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \\ &= [U_1 \Sigma_1^{\frac{1}{2}} A_{11} + U_2 \Sigma_2^{\frac{1}{2}} A_{21}, \\ &\quad U_1 \Sigma_1^{\frac{1}{2}} A_{12} + U_2 \Sigma_2^{\frac{1}{2}} A_{22}] \end{aligned} \quad (33)$$

식(31)과 식(32)으로부터 U의 직교성을 이용하고 狀態 空間 디지털 필터의 저차수화를 위해서 종속 SSDF[A<sub>11</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>d]만을 취하면 A<sub>11</sub>는 식(34)와 같이 유도된다.

$$A_{11} = (\Sigma_1^{-\frac{1}{2}} U_1^t) (U_1 \Sigma_1^{\frac{1}{2}})^* \quad (34)$$

그리고 식(31)으로 부터 B<sub>1</sub>과 C<sub>1</sub>는 식(35)와 같다.

$$B_1 = \Sigma_1^{\frac{1}{2}} V \text{의 제 1 열} \quad (35-a)$$

$$C_1 = U_1 \Sigma_1^{\frac{1}{2}} \text{의 제 1 행} \quad (35-b)$$

이상으로 부터 식(34)와 식(35)을 이용하면 설계 명세 조건으로 주어진 임펄스 응답의 特異值 分解로 부터 직접 係數 量子化 誤差 最小形 狀態 空間 디지털 필터가 설계되어 진다.

IV-3. 最適 實現

Round off 誤差 最小 實現 즉 最適 實現의 SSDF[A<sub>0</sub>B<sub>0</sub>C<sub>0</sub>d]의 가제어성 그래미안 K<sub>0</sub>와 가관측성 그래미안 W<sub>0</sub>는 식(21)을 이용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 K_0 &= T^{-1} K T^{-t} \\
 &= S_0 G^{-1} R_1^t T_0^{-1} K T_0^{-t} R_1 G^{-1} S_0^{-t} \\
 &= S_0 G^{-2} S_0^t \quad (36-a) \\
 &= (\rho^{\frac{1}{2}} S_0^t)^{-1} \cdot \text{diag}(\theta_1, \theta_2 \cdots \theta_n) \cdot (\rho^{\frac{1}{2}} S_0)^{-t} \\
 \text{단, } \rho &= \sum_{i=1}^n \theta_i / n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_0 &= T^t W T \\
 &= S_0 G R_1^t (T_0^t W T_0) R_1 G S_0^t \quad (36-b) \\
 &= (\rho^{\frac{1}{2}} S_0^t)^t \cdot \text{diag}(\theta_1, \theta_2 \cdots \theta_n) \cdot (\rho^{\frac{1}{2}} S_0)
 \end{aligned}$$

diag(θ<sub>1</sub>θ<sub>2</sub>⋯θ<sub>n</sub>)은 係數 量子化 誤差 最小形 SSDF[A<sub>c</sub>B<sub>c</sub>C<sub>c</sub>d]의 K<sub>c</sub>와 W<sub>c</sub>가 되기 때문에 식(36)과 K' = T<sup>-1</sup>KT<sup>-t</sup> 및 W' = T<sup>t</sup>WT으로 부터 係數 量子化 誤差 最小 實現 SSDF[A<sub>c</sub>B<sub>c</sub>C<sub>c</sub>d]와 最適 實現 SSDF[A<sub>0</sub>B<sub>0</sub>C<sub>0</sub>d]은 T = ρ<sup>1/2</sup>S<sub>0</sub><sup>t</sup>의 等價 變換 관계가 성립한다. 그러므로 係數 量子化 誤差 最小 實現의 狀態 空間 係數 式(34)와 식(35)로 부터 最適 實現의 狀態 空間 係數를 구하면 식(37)과 같다.

$$\begin{aligned}
 A_0 &= T^{-1} \left[ \sum_{i=1}^{-\frac{1}{2}} U_i^t \right] \left[ U_1 \sum_{i=1}^{\frac{1}{2}} \right] * T \\
 &= S_0 \left[ \sum_{i=1}^{-\frac{1}{2}} U_i^t \right] \left[ U_1 \sum_{i=1}^{\frac{1}{2}} \right] * S_0^t \quad (37-a)
 \end{aligned}$$

$$B_0 = T^{-1} \left[ \sum_{i=1}^{\frac{1}{2}} V_i \text{의 제 1 열} \right] \quad (37-b)$$

$$C_0 = \left[ U_1 \sum_{i=1}^{\frac{1}{2}} \text{의 제 1 행} \right] T \quad (37-c)$$

단, T = ρ<sup>1/2</sup> S<sub>0</sub><sup>t</sup>

V. 시뮬레이션

狀態 空間 디지털 필터의 最適 實現의 有効성을 나타내기 위한 時間 領域의 설계 명세조건을 그림 1과 같다.

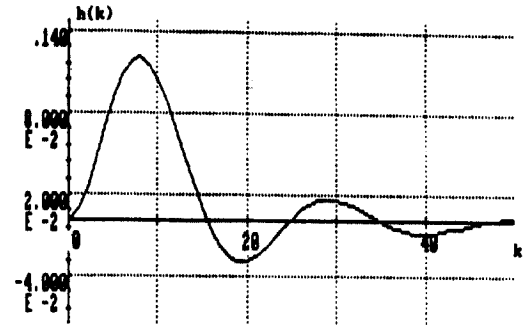


그림1. 설계 명세 조건으로서 주어진 임펄스 응답  
Impulse response given as the specification

그림1의 임펄스 응답이 갖는 디지털 필터의 周波數 特性은 그림2와 같다.

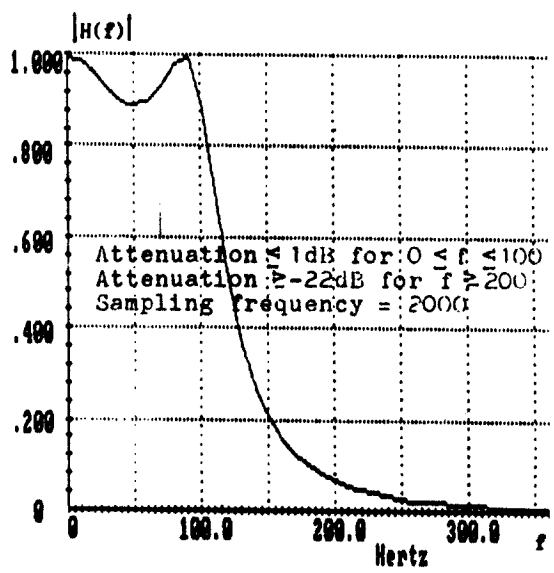


그림2. 주파수 특성 곡선  
Frequency characteristic curve

그림2의 周波數 特性을 갖는 디지털 필터를 표준형, 종속형으로 실현하는 경우 전달함수

및 狀態 空間 표현은 다음과 같다.

• 표준형 실현

$$H(z) = \frac{0.00164(5.622504z^{-1} + 0.630837z^{-2} + 1.733511z^{-3})}{1 - 2.622504z^{-1} + 2.369163z^{-2} - 0.735511z^{-3}} + 0.00164 \quad (38-a)$$

$$3 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ A & B \\ C & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.73351 & -2.369162 & 2.622504 & 0.00164 \\ 1.733510 & 0.630837 & 5.622504 & 0.00164 \end{bmatrix} \quad (38-b)$$

• 종속형 실현

$$H(z) = \frac{0.00164(1 - 2z^{-1} + z^{-2})(1 + z^{-1})}{(1 + 1.767679z^{-1} + 0.858106z^{-2})(1 - 0.8548244z^{-1})} \quad (39-a)$$

$$3 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ A & B \\ C & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ -0.858106 & 1.767680 & 0.003043 & 0.00164 \\ 0.0 & 0.0 & 0.854824 & 1.0 \\ 0.1418979 & 3.767601 & 0.003043 & 0.00164 \end{bmatrix} \quad (39-b)$$

임펄스 응답으로 부터 Hankel 행렬 H(25,2)를 작성하여 特異值 分解  $H=U\Sigma V^t$  했을때 特異值는 표1과 같다.

最小 實現의 狀態 空間 係數는 표2와 같다.

표1. Hankel 行列으로부터 얻은 특이치  
Singular Value Obtained from Hankel matrix

	i=1	0.8097	i=6	0.01596
	2	0.4284	7	0.010957
특이치	3	0.1081	8	0.009484
( $\theta_i > \theta_{i+1}$ )	4	0.0404	9	0.0073012
	5	0.0214	.	.

표2. 최소 계수 양자화 오차를 갖는 상태 공간 계수  
State-Space Coefficient with minimum Coefficient quantization error

	0.942271	-0.20039	-0.033881
A	0.200402	0.837491	-0.199291
	-0.033889	0.1992871	0.738406
B <sup>t</sup>	0.271000	-0.301701	0.167686
C	0.270998	0.301701	0.167687

Hankel行列의 特異值 分解를 이용하여 모델 근사화 차수 r=3으로 취할 때 係數 量子化 誤差

표2로 작성된 狀態 空間 디지털 필터로 부터 임펄스 응답은 그림3, 그리고 주파수 특성 곡선은 그림4과 같다. 이때 임펄스 응답의 근사 평가



함수로서  $l_2$ -Norm=0.02758이다.

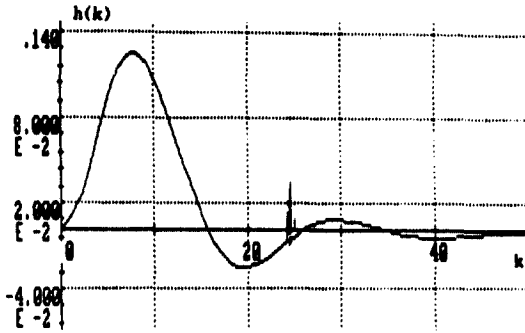


그림3. 근사화된 상태공간 디지털 필터의 임펄스 응답  
Impulse response of the Approximated State-Space digital filter

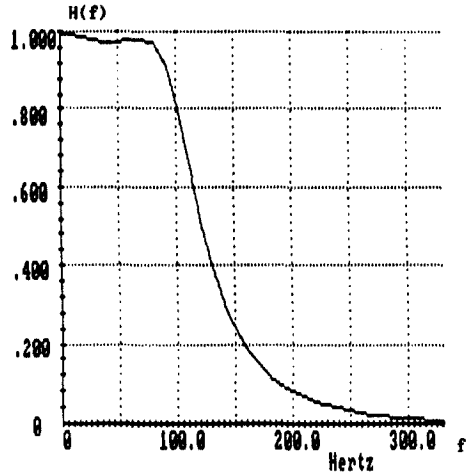


그림4. 근사화된 상태공간 디지털 필터의 주파수 특성곡선  
Frequency Characteristic Curve of the approximated State-Space digital filter

또한 係數 量子化 誤差 最小 실현 구조인 표2로 2부터 最適 實現을 얻기 위한 등가 변환 행렬

은 표3과, 그리고 표3을 이용하여 유도된 最適 實現의 狀態 空間 係數는 표4와 같다.

표3. 등가변환행렬( $T=R^{-1}R_0^{-1}$ )  
Equivalent transform matrix

	0.335943	0.014600	0.0
T	-0.010324	0.237548	1.059412
	1.032432	-0.237548	1.059412

표4. 최적 실현의 상태공간 계수  
State-Space Coefficient of optimal realization

	0.842646	-0.300619	0.014942
A	0.257448	0.870743	-0.144030
	0.006733	-0.054564	0.804679
B <sup>t</sup>	-0.349473	-0.173973	0.529133
C	0.236831	-0.013642	0.171865

표5. 실현구조에 대한 K,W,CS, 그리고NG  
K,W,CS,and NG for realization

구분 실현구조	K			W			CS	NG
직접형	0.0016	0.0016	0.0015	207049	-466508	27552.5	166123.8	165289.5
	0.0016	0.0016	0.0016	-46650.4	106109.2	-63350.9		
	0.0015	0.0016	0.0016	275547	-63353.8	38475.8		
중속형	0.0066	0.0064	0.0833	448.0	-496.4	-4.22	4999.2	1056.6
	0.0064	0.0066	0.974	-496.4	608.4	3.587		
	0.0833	0.0974	3.7136	-4.22	3.587	0.090		
계수양자화 오차 최소형	0.808	0	0	0.808	0	0	5.45	1.33
	0	0.42	0	0	0.42	0		
	0	0	0.101	0	0	0.101		
최적형	1.0	-0.13	0.13	0.19	-0.026	0.026	6.38	0.59
	-0.13	1.0	-0.77	-0.026	0.19	-0.15		
	0.13	-0.77	1.0	0.026	-0.15	0.19		

지금까지 유도한 실현 즉 표준형, 종속형, 係數量子化 誤差 최소화형, 그리고 最適 實現에 대한 가제어성 그라미안 K, 가관측성 그라미안 W, 係數感度 CS, 그리고 雜音利得 NG를 구하면 표5와 같다.

입력으로서 평균0, 분산1인 정규 난수를 발생하여 狀態 空間 디지털 필터의 量子化 (8-20Bit Truncation)에 기인한 出力 誤差 分散  $E(\Delta y^2(k))$ 를 구하면 표6와 같다.

표6. 상태공간 디지털 필터의 양자화에 기인한 출력오차 분산  
Output error variance due to the quantization of the State Space digital filter

$E[\Delta y^2]dB$

실현구조 양자화비트	표준형	종속형	최적형
8비트	-1.298	-1.285	-23.81
12비트	-19.36	-28.75	-48.71
16비트	-46.53	-52.66	-77.47
20비트	-68.93	-72.22	-104.26

## VI. 結 論

디지털 필터를 전용 하드웨어나 범용 계산기에 의해서 실현하는 경우 필수 불가결하게 量子化 誤差가 발생한다. 그러므로 본 논문에서는 量子化 誤差 최소화형 狀態 空間 디지털 필터의 설계를 위해

1. 시간 영역의 설계 명세 조건을 이용한 特異值 分解와 모델 저차수화로 부터 係數 量子化 誤差 최소화형 SSDF[ABCd]를 근사하고
2. 디지털 필터의 설계에서 係數 量子化 誤差 최소 실현 보다는 Round off 誤差 최소 실현 즉 最適 實現이 요구되어 지므로 係數 量子化 誤差 최소 실현으로 부터 最適 實現의 SSDF [ABCd]를 등가 변환하여 最適 實現을 설계 하였다.
3. 시뮬레이션을 통하여 본 논문에서 설계된

最適 實現의 SSDF[ABCd]가 디지털 필터를 직접형, 종속형으로 실현하는 것보다 量子化 誤差가 적게 발생 하는 것을 확인 하였다.

이러한 設計法은 時間 領域에서 직접 最適 實現이 얻어지므로 이전의 주파수 영역의 설계 명세 조건으로 부터의 最適 實現 과정 보다는 간단한 뿐만 아니라 진폭과 위상을 동시에 근사 할 수 있다라는 장점을 갖는다. 앞으로 주파수 영역 설계 명세 조건에서의 직접 最適 實現 設計法과 화상처리를 목적으로한 2DDF의 最適 實現을 위한 적용 가능성에 대해서 계속 연구되어야 할 것이다.

## 參 考 文 獻

1. C.W. Baranes and S. Shinnaks, "Finite word effect in block state realization of fixed point digital filter", IEEE Trans, Circuit Syst., vol. CAS-27, no. 5, pp. 345~349, 1980
2. P.M. Ebert, J.E. Mazo, and M.G. Taylor, "Overflow oscillation in digital filter", Bell syst. Tech, J., vol.48, no.11, pp.3021~3030, 1969.
3. A.T. Fam and C.W. Barnes, "Non-minimal realization of fixed point digital filters that are free of all finite wordlength limit cycle", IEEE Trans., speech, signal Process., vol.ASSP-27, no.4, pp.149~153, 1979.
4. C.M. Rader and B.Gold, "Effects of parameter quantization on the poles of a digital filter", Proc. IEEE, vol.55, pp.688~689, 1967.
5. J.B. Knowles and E.M. Olcayto, "Coefficient accuracy and digital filter response", IEEE Trans. Circuit Theory, vol.CT-15, no.3, pp31~41, 1968.
6. S.Y. Hwang, "Roundoff noise in state-space digital Filtering: A general analysis", IEEE Trans. Acoust., Speech, and Signal Process., vol. ASSP-24, no.6, pp. 256~262, 1976.

7. V.Tavsanoglu and L.Theile, "Optimal design of state-space digital filter by simultaneous minimization of sensitivity and roundoff noise", IEEE Trans. Circuit syst., vol CAS-31, no.10, pp.884~888, 1984.
8. L.B. Jacson, "Limit cycle in state-space structure for digital filter", IEEE Trans. Circuit syst., vol. CAS-26, no.6, pp.67~68, 1979.
9. M.Kawmata and T.Higuch, "On the absence of limit cycles in a class of state-space digital filters which contains minimum noise realization ", IEEE Trans. Acoustic, Speech, and Signal Processing, vol.ASSP-32, no.4, pp.928~930, 1984.
- 10.S.Y. Hwang, "Minimum uncorrelated unit noise in state-space digital filtering", IEEE Trans. Acoustic, Speech, and Signal Processing, vol. ASSP-25, no.4, pp.273~281, 1977.
11. P.Moroney, A.S. Willsky, and P.K. Houpt, "The digital implementation of control compensator, the coefficient wordlength issue", IEEE Trans. Acoustic Control. vol. AC-25, no.4, pp.621~630, 1980.
12. 문용선, 박종안, "최소 통계적 계수 감도를 갖는 상태 공간 디지털 필터의 합성", 한국통신학회, vol.13, no. 6, pp.510~520, 1988.
13. S.Kung, "A new identification and model reduction algorithm via singular value decompositions", in Proc. 2th Ann Asilomar Conf, Cricuits syst. Computer, Nov. 1978.
14. B.C.Moore, "Singular value andlysis of linear system part I, II", System Control Report, no. 7801, 7802 , Univ. of Toronto, 1978.
15. Lars P.and Leonard M.S., "Model Reduction via Balanced State Space Representations", IEEE Transactions on Autamatic Control, vol.AC-27, no.2, 1 982.



文 庸 善 (Yong Sun Moon) 正會員  
 1960年 1月 4日 生  
 1983年 2月 : 朝鮮大 工大 電子工學科 卒業  
 1985年 2月 : 朝鮮大 大學院 電子工學科 (工學碩士)  
 1989年 2月 : 朝鮮大 大學院 電氣工學科 (工學博士)  
 1985年 3月 ~ 現在 : 朝鮮大 工大 電子工學科 助教  
 1989年 3月 ~ 現在 : 全州大 講師



朴 鍾 安 (Jong An PARK) 正會員  
 1952年 7月 7日 生  
 1975年 2月 : 朝鮮大學校 工科學 電子工學科 卒業  
 1986年 2月 : 朝鮮大學校 大學院 (工學博士)  
 1983年 ~ 1984年 : 美國 Massachusetts大學 客員教授  
 1990年 ~ 現在 : 朝鮮大學校 工科學 電子工學科 副教授  
 1990年 2月 ~ 英國 Surrey大學校 客員教授



金 在 玟 (Jai Min KIM) 正會員  
 1937年 10月 29日 生  
 1961年 2月 : 全南大學校 工科學 電氣工學科 卒業  
 1990年 2月 : 朝鮮大學校 大學院 電氣工學科 工學博士  
 1966年 ~ 1972年 : 朝鮮大學校 병설 工業專門大學 勤務  
 1976年 ~ 1987年 : 全州工業專門大學

1987年 3月 ~ 現在 : 羅州 동신工科學 電子工學科