

---

 論 文

## 最小係數 量子化 誤차를 갖는 2次 디지털 필터의 設計

正會員 文 庸 善\* 正會員 朴 鍾 安\*

 Design of the 2nd order Digital Filter with Minimum  
Coefficient Quantization Error

 Yong Sun MOON\*, Jong An PARK\* *Regular Members*

**要 約** 디지털 필터를 전용 하드웨어나 범용 계산기에 의해서 實現 할 때 有限 語長 實現에 기인해서 量子化 誤差 (演算 誤差, 係數 量子化 誤差)가 필연적으로 발생하며, 또한 이러한 量子化 誤差的 最小化를 위한 等價 變換 行列이 연구되었다.

본 논문에서는 演算 誤差 最小 實現과 係數 量子化 誤差 最小 實現과의 상호 등가 변환할 수 있는 等價 變換行列을 유도하고 유도된 等價 變換 行列의 유효성을 나타내기 위해서 演算 誤差 最小型 2차 디지털 필터로부터 係數 量子化 誤差 最小型 2차 디지털 필터를 설계하고 시뮬레이션하였다.

**ABSTRACT** When digital filters are implemented on a computer or with special purpose hardware, they unavoidably suffer from errors due to finite wordlength implementation. These errors are classified into coefficient quantization error and roundoff error. The synthesizing method for realizations with minimum coefficient quantization error and minimum roundoff error has been studied.

In this paper, it is shown that there is an equivalent transform relation between realizations with minimum coefficient quantization error and minimum roundoff error. To show the validity of this equivalent transform, we derived the 2nd order digital filter with minimum coefficient quantization error from the 2nd order digital filter with minimum roundoff error and proved the efficiency of realization with minimum coefficient quantization error by simulation.

## I. 서 론

---

\*朝鮮大學校 電子工學科  
Dept. of Elec. Eng. Chosun Univ.  
論文番號: 90-38(接受1989. 10. 10)

디지털 필터는 아날로그 필터와 비교해서 精度, 再演性, 柔軟性, 그리고 多重化등의 우수한 특징을 갖지만 디지털 필터를 범용 계산기나

전용 하드웨어에 의해서 실현하는 경우 실현 수단의 물리적 한계 즉 數值的 有限 語長(Finite Wordlength 표현 때문에 係數 量子化 誤差 및 演算 誤差가 발생하게 되어 正確한 출력 신호를 얻을 수 없다. 이러한 誤差는 語長의 증가에 따라서 감소 되지만 語長의 증가는 처리 속도의 감소 및 규모의 증대를 초래한다. 따라서 디지털 필터는 일정한 語長으로 실현하게 되는데 이러한 경우 最小 量子化 誤差를 갖도록 설계되어야 한다.

디지털 필터의 설계에 있어서 디지털 필터의 狀態 空間에 의한 표현 방법은 내부 실현 구조를 규정할 수 있을 뿐만 아니라 동일한 전달 함수를 갖는다 할지라도 等價 變換에 의해서 다른 실현 구조를 얻을 수 있다. 그러므로 最小 量子化 誤差를 갖는 실현 구조를 유도할 수 있도록 하는 等價 變換 行列 T를 구하는데 量子化 誤差는 내부 실현 구조에 의존하기 때문에 狀態 空間 표현 방법에 대하여 연구가 되어 지고 있다.<sup>(4)</sup>  
<sup>3)</sup> 또한 係數 量子化 誤差 및 演算 誤差를 갖는 실현 구조를 설계하기 위한 等價 變換 行列에 대한 연구가 집중적 발표 되었다.<sup>(4-5)</sup>

本 論文에서는 係數 量子化 誤差 최소 실현을 위한 等價 變換 行列과 演算 誤差 최소 실현을 위한 等價 變換 行列 사이에 상호 등가 변환이 가능한 等價 變換 行列을 유도하고, 유도된 등가 변환 관계의 유효성을 확인하기 위해서 最小 演算 誤差를 갖는 2次 디지털 필터로부터 最小 係數 量子化 誤差를 갖는 2次 디지털 필터를 설계하였다.

## II. 狀態 空間 디지털 필터와 量子化 效果

### 1. 狀態 空間 디지털 필터

유한 차수의 선형 시불변 디지털 필터는 식(1)과 같이 狀態 및 出力 方程式에 의해서 표현한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u(k) \\ y(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}u(k) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $\mathbf{x}(k)$ 는  $n$ 차 狀態 벡터,  $u(k)$ 는 입력,  $y(k)$ 는 출력, 그리고  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$ 는 식(2)와 같은 차원을 갖는 實係數 行列이다.

$$\begin{array}{c} N \times 1 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \mathbf{N} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{D} \end{array} \quad (N : \text{디지털 필터의 차수}) \end{array} \quad (2)$$

식(1)과 같이 디지털 필터를 狀態 및 出力 方程式으로 표현한 것을 狀態 空間 디지털 필터(State-space Digital Filter)라 하며, SSDF[ $\mathbf{ABCD}$ ] 으로 표기한다. SSDF[ $\mathbf{ABCD}$ ]의 전달 함수는 식(1)으로부터 식(3)과 같이 구해진다.

$$H(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (3)$$

전달 함수  $H(z)$ 을 갖는 SSDF[ $\mathbf{ABCD}$ ]의 실현 구조는 무한히 존재한다. 즉 임의의 正則 行列  $\mathbf{T}$ 에 대해서  $\mathbf{x}' = \mathbf{T}\mathbf{x}$ 으로 狀態 벡터를 等價 變換하면 동일한  $H(z)$ 를 갖는 다른 실현 구조 SSDF[ $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}, \mathbf{C}\mathbf{T}, \mathbf{D}$ ]가 얻어 진다.<sup>(6-7)</sup>

### 2. 量子化 效果

SSDF[ $\mathbf{ABCD}$ ]는 無限 語長으로 實現된 이상적인 디지털 필터이다. 그러나 실제의 전용 하드웨어나 범용 계산기의 프로그램에 의해서 실현된 SSDF[ $\mathbf{ABCD}$ ]의 數値는 有限 語長으로 표현되므로 量子化 誤差는 필수불가결하게 발생하며 이러한 특성 악화 조건을 고려한다면 SSDF[ $\mathbf{ABCD}$ ]는 식(4)와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(k+1) &= [\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A}] \tilde{\mathbf{x}}(k) + [\mathbf{B} + \Delta\mathbf{B}] u(k) + \alpha(k) \\ \tilde{y}(k) &= [\mathbf{C} + \Delta\mathbf{C}] \tilde{\mathbf{x}}(k) + [\mathbf{D} + \Delta\mathbf{D}] u(k) + \beta(k) \end{aligned} \quad (4)$$

식(4)에서  $\Delta\mathbf{A}$ ,  $\Delta\mathbf{B}$ ,  $\Delta\mathbf{C}$ , 그리고  $\Delta\mathbf{D}$ 는 狀態 공간 係數 行列의 量子化에 기인한 誤差이며,  $\alpha(k)$ 와  $\beta(k)$ 는 演算 結果의 量子化에 기인한

誤차를 나타낸다. 그러므로 SSDF[ABCD]가 SSDF[A+ΔA, B+ΔB, C+ΔC, D+ΔD, α(k), β(k)]로 실현되어 짐에 따라 발생한 出力 誤差 Δy(k)=ỹ(k)-y(k)는 식(5)와 같이 구해진다. (6-9)

$$\Delta y(k) = \Delta y_c(k) + \Delta y_r(k) \quad (5)$$

$$\Delta y_c(k) = C \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} \{ \Delta A x(i) + \Delta B u(i) \} + \Delta C x(k) + \Delta D u(k)$$

$$\Delta y_r(k) = C \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} \alpha(i) + \beta(k)$$

식(5)에서 Δy<sub>c</sub>는 ΔA, ΔB, ΔC, 그리고 ΔD에 의해서 발생한 係數 量子化 誤差이며, Δy<sub>r</sub>는 α(k)와 β(k)에 의해서 발생한 演算 誤差이다.

### III. 係數 量子化 誤差 및 演算 誤差의 解析

#### 1. 係數 量子化 誤差 最小 實現

식(4)에서 狀態 空間 係數의 變動만을 고려한 SSDF[A+ΔA, B+ΔB, C+ΔC, D+ΔD]는 식(6)와 같이 표현한다.

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k+1) &= [A+\Delta A] \tilde{x}(k) + [B+\Delta B]u(k) \\ \tilde{y}(k) &= [C+\Delta C] \tilde{x}(k) + [D+\Delta D]u(k) \end{aligned} \quad (6)$$

식(1)과 식(6)으로 부터 係數 量子化 誤差 y<sub>c</sub>(k)=ỹ(k)-y(k)는 식(7)과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} e_x(k+1) &= A e_x(k) + \Delta A x(k) + \Delta B u(k) \\ \Delta y_c(k) &= C e_x(k) + \Delta C e_x(k) + \Delta D u(k) \quad (7) \\ e_x(k) &= \tilde{x}(k) - x(k) : \text{상태 벡터의 오차} \end{aligned}$$

식(7)으로부터 ΔA, ΔB, ΔC, 그리고 ΔD는 평균 0, 분산 1인 正規 白色 信號로 가정할 때 係數 量子化 誤差의 분산 E[Δy<sub>c</sub><sup>2</sup>]는 식(8)과 같다.

$$E[\Delta y_c^2] = \sigma^2 \left\{ \sum_{i=1}^n K_{ii} + 1 \right\} \left\{ \sum_{i=1}^n W_{ii} + 1 \right\} \quad (8)$$

식(8)에서 K와 W는 狀態 空間 디지털 필터의 共分散 行列 및 雜音 行列로서 식(9)로 정의 되어진다.

$$\begin{aligned} K &= \sum_{i=0}^{\infty} A^i B B^t A^{i,t} = A K A^t + B B^t \\ W &= \sum_{i=0}^{\infty} A^i C^t C A^i = A^t W A + C^t C \end{aligned} \quad (9)$$

그런데 SSDF[T<sup>-1</sup>A T, T<sup>-1</sup>B, C T, D]의 E[Δy<sub>c</sub><sup>2</sup>]은 식(10)와 같이 구해지므로 E[Δy<sub>c</sub><sup>2</sup>]는 等價 變換 行列 T에 의존함을 알 수 있으며, 식(11)의 조건을 만족하는 等價 變換 行列 T=T<sub>0</sub> RDU 를 이용하면 最小 係數 量子化 誤차를 갖는 SSDF[A<sub>c</sub>B<sub>c</sub> C<sub>c</sub> D]가 얻어진다.<sup>(6)</sup>

$$E[\Delta y_c^2] = \sigma^2 \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} (T^{-1} K T^{-t})_{ii} + 1 \right\} \left\{ \sum_{i=1}^n (T^{-1} W T)_{ii} + 1 \right\} \quad (10)$$

$$T = T_0 R D U \quad (11)$$

T<sub>0</sub> : T<sub>0</sub><sup>t</sup>T<sub>0</sub>=K가 되는 임의의 正則行列

R : R<sup>t</sup>(T<sub>0</sub><sup>t</sup>W T<sub>0</sub>)R=diag(θ<sub>1</sub><sup>2</sup>, θ<sub>2</sub><sup>2</sup>...θ<sub>n</sub><sup>2</sup>)가 되는 直交行列

D : diag (θ<sub>1</sub><sup>-1/2</sup> θ<sub>2</sub><sup>-1/2</sup> ... θ<sub>n</sub><sup>-1/2</sup>)

U : 임의의 直交 行列

θ<sub>1</sub> : SSDF[ABCD]의 KW의 고유치

#### 2. 演算 誤差 最小 實現

디지털 필터를 有限 誤長으로 실현할 때 또 하나의 문제는 승산 및 가산 결과의 量子化에 기인한 演算 誤差이다. 演算 誤差 만을 고려한 SSDF[ABCD α,β]는 식(12)으로 표현한다.

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k+1) &= A x(k) + B u(k) + \alpha(k) \\ \tilde{y}(k) &= C x(k) + D u(k) + \beta(k) \end{aligned} \quad (12)$$

식(1)과 식(12)로부터 演算 誤差 Δy<sub>r</sub>(k)=ỹ(k)-y(k)는 식(13)과 같이 표현되며, 이때 오차

원  $\alpha(k)$ 와  $\beta(k)$ 에 대해서 평균 0, 분산  $\sigma^2=2^{-2L}/12$  ( $L$ : 量子化 語長)인 백색 雜音으로 가정하면 演算 誤差의 분산은 식(14)으로 구해진다.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{e}_x(k) + \alpha(k) \\ \Delta y_r(k) &= \mathbf{C}\mathbf{e}_x(k) + \beta(k) \end{aligned} \quad (13)$$

$$E[\Delta y_r^2] = \sigma^2(n+1) \sum_{i=1}^n \mathbf{W}_{ii} + \sigma_n \quad (14)$$

그런데 SSDF [ $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{D}$ ]의  $E[\Delta y_r^2]$ 은 식(15)으로 구해지기 때문에 演算 誤差의 분산은 等價 變換 行列  $\mathbf{T}$ 에 의존 함을 알 수 있으며, 식(15)를 만족하는 等價 變換 行列  $\mathbf{T} = \mathbf{T}_0\mathbf{R}_1\mathbf{G}\mathbf{R}_0^t$ 를 이용하면 最小 演算 誤차를 갖는 SSDF [ $\mathbf{A}_R\mathbf{B}_R\mathbf{C}_R\mathbf{D}$ ]가 얻어 진다.<sup>(4)</sup>

$$E[\Delta y_r^2] = \sigma^2(n+1) \sum_{i=1}^n (\mathbf{T}^t\mathbf{W}\mathbf{T})_{ii} + \sigma_n^2 \quad (15)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_0\mathbf{R}_1\mathbf{G}\mathbf{R}_0^t$$

$$\mathbf{T}_0\mathbf{T}_0^t = \mathbf{K}$$

$$\mathbf{G} = \text{diag} (g_1, g_2, \dots, g_n)$$

$$g_i = \left( \frac{\sum_{m=1}^n \theta_m / n \theta_i}{n \theta_i} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(\mathbf{R}_0\mathbf{G}^{-1}\mathbf{R}_0^t)_{ii} = 1$$

$$\mathbf{R}_1^t\mathbf{T}_0^t\mathbf{W}\mathbf{T}_0\mathbf{R}_1 = \text{diag} (\theta_1^2, \theta_2^2, \dots, \theta_n^2)$$

$\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1$ : 直交行列

### 3. 等價 變換

SSDF [ $\mathbf{A}_R\mathbf{B}_R\mathbf{C}_R\mathbf{D}$ ]의 共分散 行列  $\mathbf{K}_R$ 과 雜音 行列  $\mathbf{W}_R$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{K}_R = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{T}^{-t} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} &= \mathbf{R}_0\mathbf{G}^{-1}\mathbf{R}_1^t(\mathbf{T}_0^{-t}\mathbf{K}\mathbf{T}_0^{-t})\mathbf{R}_1\mathbf{G}^{-1}\mathbf{R}_0^t \\ &= \mathbf{R}_0\mathbf{G}^{-2}\mathbf{R}_0^t \\ &= \mathbf{R}_0 \left\{ \left( \frac{\sum_{m=1}^n \theta_m / n}{n} \right)^{-\frac{1}{2}} \text{diag} \theta_1^{\frac{1}{2}}, \theta_2^{\frac{1}{2}}, \dots, \theta_n^{\frac{1}{2}} \right\}^{-2} \mathbf{R}_0^t \\ &= \rho^{-\frac{1}{2}} \mathbf{R}_0 \cdot \text{diag} (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \cdot \rho^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{R}_0^t \\ &= (\rho^{\frac{1}{2}} \mathbf{R}_0^t)^{-1} \cdot \text{diag} (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \cdot (\rho^{\frac{1}{2}} \mathbf{R}_0^t)^{-t} \end{aligned}$$

여기서  $\rho = \sum_{m=1}^n \theta_m / n$

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_R &= \mathbf{T}^t\mathbf{W}\mathbf{T} \quad (18) \\ &= \mathbf{R}_0\mathbf{G}\mathbf{R}_1^t(\mathbf{T}_0^t\mathbf{W}\mathbf{T}_0^t)\mathbf{R}_1\mathbf{G}\mathbf{R}_0^t \\ &= \mathbf{R}_0\mathbf{G} \text{diag} (\theta_0^2, \theta_2^2, \dots, \theta_n^2) \mathbf{G}\mathbf{R}_0^t \\ &= (\rho^{\frac{1}{2}} \mathbf{R}_0)^t \text{diag} (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) (\rho^{\frac{1}{2}} \mathbf{R}_0) \end{aligned}$$

또한 SSDF [ $\mathbf{A}_c\mathbf{B}_c\mathbf{C}_c\mathbf{D}$ ]의  $\mathbf{K}_c$  및  $\mathbf{W}_c$ 는 식 (19)와 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_c &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{T}^{-t} \quad (19) \\ &= \mathbf{U}^{-1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{T}_0^{-1}\mathbf{K}\mathbf{T}_0^{-1}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}^{-t} \\ &= \mathbf{U}^t\mathbf{D}^{-1}\mathbf{R}^t\mathbf{R} \mathbf{D}^{-1}\mathbf{U} \\ &= \mathbf{U}^t \text{diag} (\theta_1, \theta_2, \theta_n) \mathbf{U} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_c &= \mathbf{T}^t\mathbf{W}\mathbf{T} \quad (20) \\ &= \mathbf{U}^t\mathbf{D}^t\mathbf{R}^t(\mathbf{T}_0^t\mathbf{W}\mathbf{T}_0^t)\mathbf{R}\mathbf{D}\mathbf{U} \\ &= \mathbf{U}^t\mathbf{D}^t \text{diag} (\theta_1^2, \theta_2^2, \dots, \theta_n^2) \mathbf{D}\mathbf{U} \\ &= \mathbf{U}^t \text{diag} (\theta_1^2, \theta_2^2, \dots, \theta_n^2) \mathbf{U} \end{aligned}$$

그러므로 식(19)와 식(20)에 있어서  $\mathbf{U}$ 는 임의의 直交 行列이므로  $\mathbf{U} = \mathbf{I}$  ( $\mathbf{I}$ : 단위 행렬)로 한다면 식(17)~식(20)으로부터 SSDF [ $\mathbf{A}_c\mathbf{B}_c\mathbf{C}_c\mathbf{D}$ ]와 SSDF [ $\mathbf{A}_R\mathbf{B}_R\mathbf{C}_R\mathbf{D}$ ]는 다음의 等價 變換 關係가 성립한다.

$$\begin{array}{ccc} \text{演算 誤差 } \mathbf{T} = \rho^{-\frac{1}{2}} \mathbf{R}_0 & \text{係數 量子化 誤差} & \\ \text{最小 實現} & \xrightarrow{\hspace{2cm}} & \text{最小 實現} \end{array}$$

### IV. 2次 狀態 空間 디지털 필터의 係數 量子化 誤差 最小 實現

CASPER, W.BARNES는 2차 디지털 필터의 전달 함수가 식(21)로 표현될때 最小 演算 誤차를 갖는 SSDF [ $\mathbf{A}_R\mathbf{B}_R\mathbf{C}_R\mathbf{D}$ ]의 狀態 空間 係數 行列, 共分散 行列, 그리고 雜音 行列을 식(23), 식(24) 그리고 식(25)로 유도했다.<sup>(10)</sup>

$$H(z) = \frac{\alpha}{z-\beta} + \frac{\alpha^*}{z-\beta^*} \quad (21)$$

여기서  $\beta = \sigma + j\omega$ ,  $\alpha = \alpha_r + j\alpha_i$

$$\mathbf{A}_R = \begin{bmatrix} \sigma & E\omega \\ -\omega/E & \sigma \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\mathbf{B}_R = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_R = \begin{bmatrix} \alpha_r & \alpha_r \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_R = \frac{4N^2}{|\alpha| - \alpha_1} \begin{bmatrix} E^2(P-Q), & -ER \\ -ER & P+Q \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\mathbf{W}_R = \frac{|\alpha| - \alpha_1}{4N^2} \begin{bmatrix} (P+Q)/E^2, & -R/E \\ -R/E, & P-Q \end{bmatrix} \quad (24)$$

식(22), 식(23), 그리고 식(24)에서  $\mathbf{E}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ ,  $N^2$ ,  $b_1$ , 그리고  $b_2$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E &= \left( \frac{P+Q}{P-Q} \right)^{\frac{1}{2}} \\ P &= \frac{|\alpha|}{1 - |\beta|^2} \\ R + jQ &= \frac{\alpha}{1 - \beta^2} \\ W^2 &= \frac{1}{4} \frac{|\alpha| - \alpha_1}{P+Q} \\ b_1 &= \left( \frac{|\alpha| - \alpha_1}{P-Q} \right)^{\frac{1}{2}} \\ b_2 &= - \left( \frac{|\alpha| + \alpha_1}{P+Q} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \text{sgn}(\alpha_r) \end{aligned} \quad (25)$$

SSDF $[\mathbf{A}_R \mathbf{B}_R \mathbf{C}_R \mathbf{D}]$ 으로부터  $\mathbf{K}_R \mathbf{W}_R$ 의 고유값  $\theta_1$ 는 식(26)와 같이 구해지므로  $\rho$ 는 식(27)와 같다. 또한 直交 行列  $\mathbf{R}_0$ 는 식(28)와 같이 유도 된다.

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \sqrt{P^2 - Q^2} + R \\ \theta_2 &= \sqrt{P^2 - Q^2} - R \end{aligned} \quad (26)$$

$$\rho = \sum_{i=1}^n \theta_i / n = \sqrt{P^2 - Q^2} \quad (27)$$

$$\mathbf{R}_0 \mathbf{G}^{-2} \mathbf{R}_0^t = 1 \quad (28)$$

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\theta_1}{\rho} & 0 \\ 0 & \frac{\theta_2}{\rho} \end{bmatrix} \\ &\begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & * \\ * & 1 \end{bmatrix} \\ &\mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

그러므로 演算 誤差 最小 實現과 係數 量子化 誤差 最小 實現과의 等價 變換 行列  $\mathbf{T} = \rho^{\frac{1}{2}} \mathbf{R}_0$ 에 의해서 最小 係數 量子化 誤차를 갖는 狀態 空間 係數  $\mathbf{A}_c \mathbf{B}_c \mathbf{C}_c$ , 共分散 行列  $\mathbf{K}_c$ , 그리고 雜音 行列  $\mathbf{W}_c$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_c &= \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A}_R \mathbf{T} = \mathbf{R}_0^t \mathbf{A}_R \mathbf{R}_0 \\ &= \begin{bmatrix} \rho + \frac{\omega(E^2-1)}{2E} & \frac{\omega(E^2-1)}{2E} \\ \frac{\omega(E^2+1)}{2E} & \rho - \frac{\omega(E^2-1)}{2E} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_c &= \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B}_R = \rho^{\frac{1}{2}} \mathbf{R}_0^t \mathbf{B}_R \\ &= \frac{\rho^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} \\ &\begin{bmatrix} \left\{ \frac{|\alpha| - \alpha_1}{P-Q} \right\}^{\frac{1}{2}} - \left\{ \frac{|\alpha| + \alpha_1}{P+Q} \right\}^{\frac{1}{2}} \text{sgn}(\alpha_r) \\ - \left\{ \frac{|\alpha| - \alpha_1}{P-Q} \right\}^{\frac{1}{2}} - \left\{ \frac{|\alpha| - \alpha_1}{P-Q} \right\}^{\frac{1}{2}} - \text{sgn}(\alpha_r) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_c &= \mathbf{C}_R \mathbf{T} = \mathbf{C}_R \rho^{\frac{1}{2}} \mathbf{R}_0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\rho} \begin{bmatrix} \alpha_r & \alpha_r \\ B_{c1} & B_{c2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_c &= \mathbf{T}^{-1} \mathbf{K}_R \mathbf{T}^t = \rho \mathbf{R}_0^t \mathbf{K}_R \mathbf{R}_0 \\ &= \begin{bmatrix} \sqrt{P^2 - Q^2} - R & 0 \\ 0 & \sqrt{P^2 - Q^2} + R \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (30)$$

$$\mathbf{W}_c = \mathbf{T}^t \mathbf{W}_R \mathbf{T} = \rho^{-1} \mathbf{R}_0^t \mathbf{W}_R \mathbf{R}_0 \quad (31)$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{P^2 - Q^2} - R & 0 \\ 0 & \sqrt{P^2 - Q^2} + R \end{bmatrix}$$

V. 시뮬레이션

시뮬레이션을 위한 2차 저역 통과, 고역 통과, 그리고 대역 통과 디지털 필터의 전달 함수 및 주파수 응답 곡선은 식(32)와 그림1과 같다.

$$H(z) = \frac{5.54087 \times 10^{-3} + 1.10816 \times 10^{-2} z^{-1} + 5.54087 \times 10^{-3} z^{-2}}{1 - 1.77861 z^{-1} + 0.80077 z^{-2}} \quad \text{(LPF)} \quad (32)$$

$$H(z) = \frac{7.81775 \times 10^{-3} - 1.56355 \times 10^{-2} z^{-1} + 7.81775 \times 10^{-3} z^{-2}}{1 - 1.73469 z^{-1} + 0.76597 z^{-2}} \quad \text{(HPF)}$$

$$H(z) = \frac{3.0452 \times 10^{-2} - 3.0452 \times 10^{-2} z^{-1}}{1 - 1.84509 z^{-1} + 0.93909 z^{-2}} \quad \text{(BPF)}$$

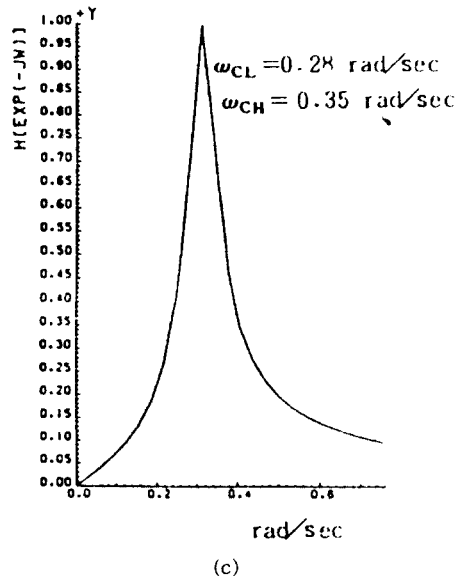
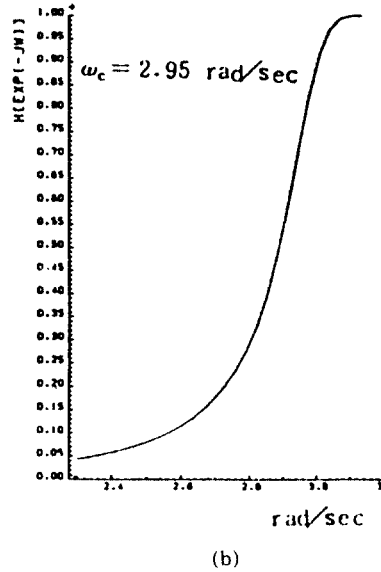
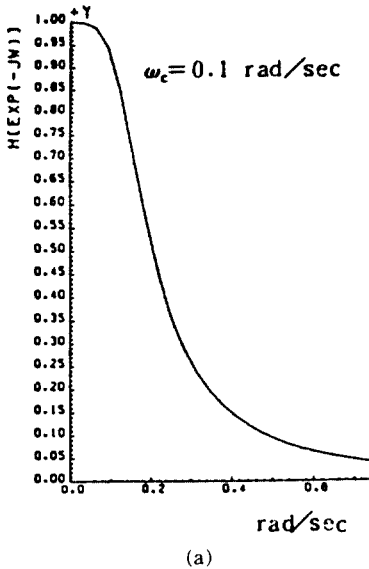


그림 1. 2차 디지털 필터의 주파수 응답 (a) 저역통과 필터 (b) 고역통과 필터 (c) 대역통과 필터  
Frequency response of 2nd-order digital filter (a) low pass Filter (b) high pass filter (c) band pass filter

식(32)으로 나타낸 2차 디지털 필터를 표준형으로 實現하는 경우 狀態 空間 係數 및 共分散 行列, 그리고 雜音 行列은 표1, 표2와 같다.

표 1. 표준형 2차 디지털 필터의 상태공간 계수  
State-space coefficient of the canonic 2nd order digital filter.

상태공간계수 디지털필터	A		B	C <sup>t</sup>	D
저역 통과 디지털 필터	0	1	0	0.001104	0.005541
	-0.800779	1.778611	1	0.020937	
고역 통과 디지털 필터	0	1	0	0.001830	0.067818
	-0.765976	-1.734697	1	-0.029197	
대역 통과 디지털 필터	0	1	0	-0.05905	0.030452
	-0.9390	1.845099	1	0.056188	

표 2. 표준형 실현 구조의 공분산 행렬 및 잡음 행렬  
Covariance matrix and noise matrix of the canonic realization structure.

필터종류 구분	LPF		HPF		BPF	
K	113.914	112.5117	68.915	-67.69445	89.5085	85.1697
	112.5117	113.914	-67.69445	68.915	85.1697	89.5085
W	0.035445	-0.04370	0.03885	0.04978	0.0295	-0.02809
	-0.04370	0.055273	0.04978	0.06621	-0.02809	0.029525

표 3. 계수 양자화오차 최소화형 2차 디지털 필터의 상태공간 계수  
State-space coefficient of the 2nd order digital filter with minimum coefficient quantization error

디지털 필터	상태공간 계수					
L P F	2	1	[ A B ] =	0.8317885	0.1149934	0.217562
	2			-0.1149934	0.946822	-0.261285
	1			-0.217562	-0.2612853	0.00554
H P F	2	1	[ A B ] =	-0.9349130	0.1350834	0.287491
	2			-0.1350834	-0.799784	-0.231201
	1			0.28749148	-0.231202	0.007818
B P F	2	1	[ A B ] =	0.953002	0.2982021	-0.0378311
	2			-0.2982021	0.8920972	-0.240039
	1			0.03783118	-0.240039	0.030452

또한 식(32)을 最小 係數 量子化 誤차를 갖는 구조로 實現하는 狀態 空間 係數는 표 3과, 그리고 共分散 行列 및 雜音 行列은 표4와 같다.

표 4. 계수 양자화 오차 최소형 실현구조의 공분산 행렬 및 잡음행렬  
Covariance matrix and noise matrix of the realization structure with minimum-coefficient quantization error

디지털 필터 구분	LPF		HPF		BPF	
K	0.682	0	0.682	0	0.5	0
	0	0.182	0	0.182	0	0.5
W	0.682	0	0.682	0	0.5	0
	0	0.182	0	0.182	0	0.5

그림 2와 같이 狀態 空間 係數 行列이 평균 0, 분산  $\sigma^2=2^{-2L}/12$  ( $L$ : 양자화 비트)로 가정할 때 각각의 실현 구조에 대한 係數 量子化 誤차의 분산을 구하면 그림 3과 같다.

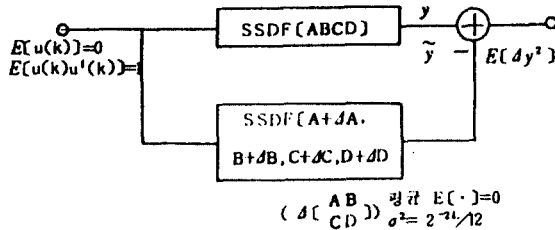
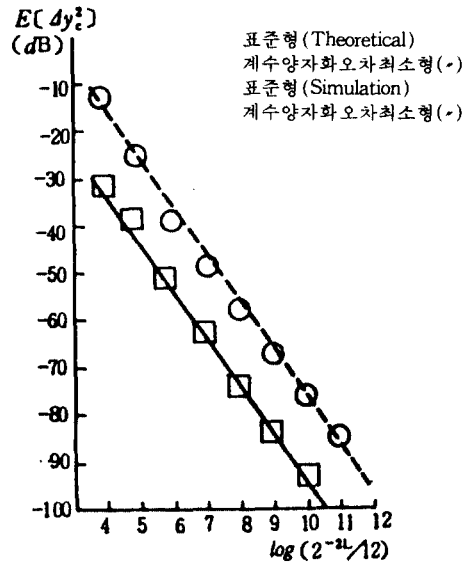
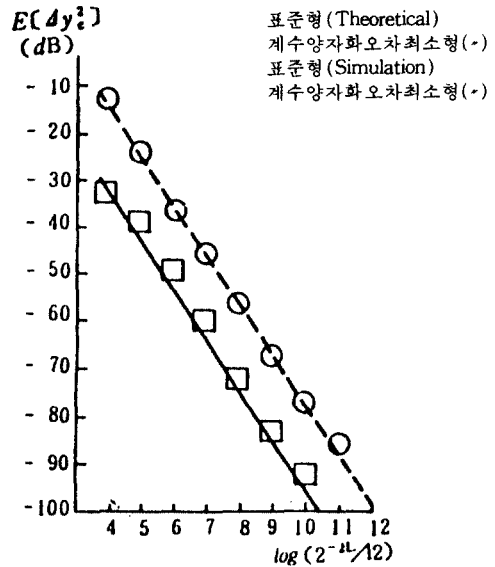


그림 2. 상태 공간 계수의 미소 변동에 기인한 출력 오차 분산 시뮬레이션 블록선도  
Block diagram for output error variance simulation due to differential variation of state-space coefficient

狀態 空間 係數를 4-8비트로 量子化했을 때 저역 통과 필터에 대한 주파수 응답 곡선은 그림 4와 같으며, 임펄스 응답은 그림 5와 같다. 그림 4와 그림 5에서 표준형 실현 구조의 狀態 空間 디지털 필터는 量子化에 기인해서 많은 출력 오차가 발생하고 있지만 係數 量子化 誤차 최소형의 경우는 출력 오차가 적게 발생하는 것을 알 수 있다. 즉 係數 量子化 誤차 최소형의 狀態 空間 係數를 4비트로 量子化했을 때가 표준형의



(a)



(b)



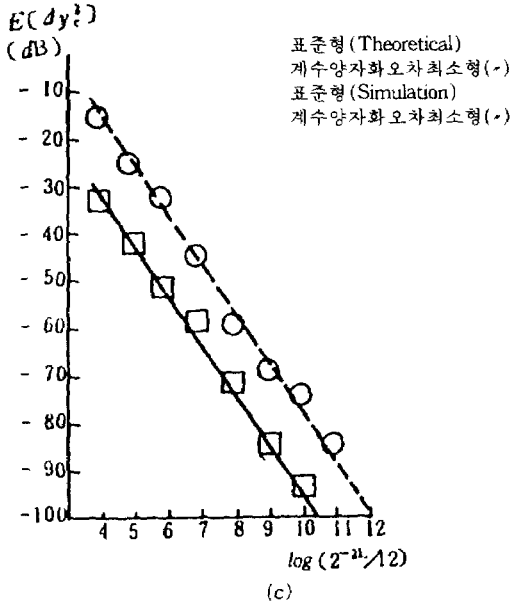


그림 3. 상태공간 계수의 미소 변동에 기인한 출력오차 분산  
(a) 저역 통과 필터 (b) 고역통과 필터 (c) 대역 통과 필터  
Output error variance due to the state-space coefficient differential variation  
(a) low pass filter (b) high pass filter (c) band pass filter

상태 공간 계수를 8비트로 양자화했을 때 보다는 출력 오차가 적게 발생하므로 다지틀 필터의 하드웨어 實現時 係數 誤差 최소형 실현 구조가 표준형 실현 구조보다도 약 4비트 이상의 係數 語長의 절감 효과를 얻을 수 있다.

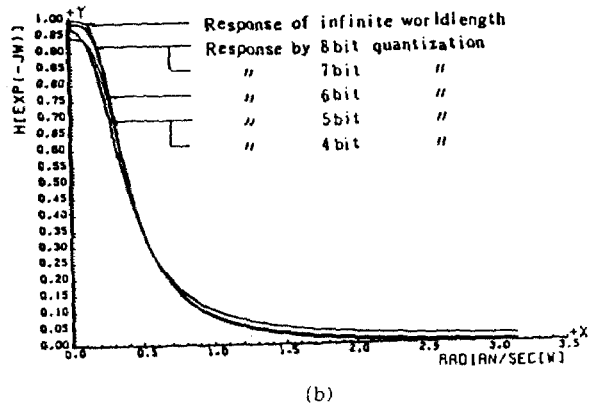


그림 4. 상태 공간 계수의 양자화에 대한 주파수 응답곡선  
(a) 표준형 (b) 계수 양자화 오차 최소형  
Frequency response curve for the state-space coefficient quantization  
(a) canonic realization (b) minimum coefficient quantization realization

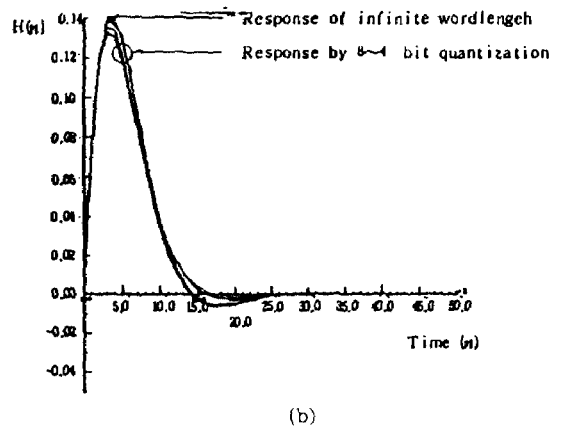
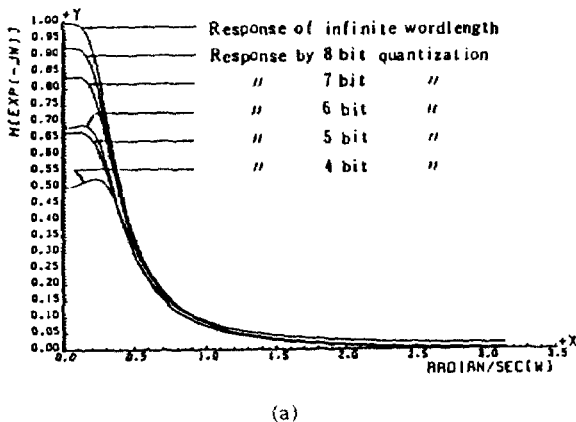
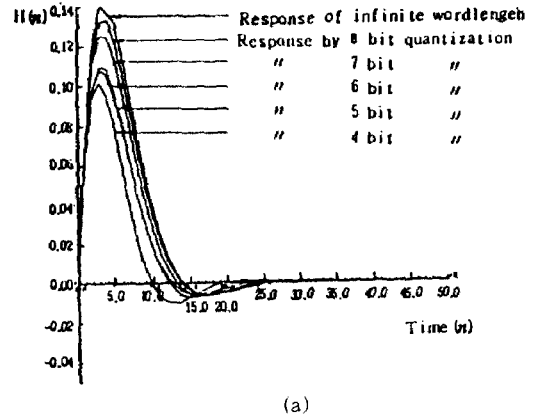


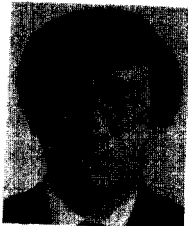
그림 5. 상태공간 계수의 양자화에 대한 임펄스 응답  
 (a) 표준형 (b) 계수양자화 오차 최소화형  
 Impulse response curve for the state-space coefficient quantization  
 (a) canonic realization (b) minimum coefficient quantization realization

## VI. 결 론

본 논문에서는 量子化 誤差 最小 實現을 위한 等價 變換 行列(演算 誤差 最小 實現:  $T=T_0$ ,  $RGR_0^t$ , 係數 量子化 誤差 最小 實現:  $T=T_0$ ,  $RDU$ ) 등으로부터 상호 등가 변환할 수 있는 관계 즉  $T=\rho^{-\frac{1}{2}} R_0$ 을 유도하였다. 유도된 等價 變換을 이용하여 最小 演算 誤差를 갖는 2차 디지털 필터로부터 最小 係數 量子化 誤差를 갖는 2차 디지털 필터를 변환하였고 시뮬레이션 으로부터 2차 디지털 필터를 표준형으로 實現하는 경우보다 본 논문에서 설계한 2차 디지털 필터가 係數 量子化 誤差가 적게 발생하는 것을 확인하였다.

## 參 考 文 獻

- Hwang, S.Y., "Roundoff noise in state-space digital filtering: A general analysis," IEEE Trans. Acoust. Speech, and Signal Processing, Vol. ASSP-24, no.6, pp.256-262, 1976.
- 小野·青山, "狀態變數法による Digital Filter의 構成", 日本電子通信學會論文誌, Vol. J 61-4, no. 9, pp.829-835, 1978.
- Pernebo L. and silverman, L.M., "Model reduction via balanced state-space representation", IEEE Trans., Automat Contr., Vol. CT-27, no. 2, pp.382-387, 1982.
- Hwang, S.Y., "Minimum uncorrelated unit noise in state-space digital filtering," IEEE Trans., Acoust., Speech, and Signal Processing, vol. ASSP-25, no.4, pp. 273-283, 1977.
- 문용선, 박종안, "최소통계적 감도를 갖는 상태공간 디지털 필터와 합성", 한국통신학회지, vol. 13, no.6, pp.510-520, 1988.
- Rabiner, L. R. and Gold, B., Theory and application of digital signal processing, Prentice-Hall, pp. 295-355, 1975.
- Robert, R.A. and Mullis, C.T., Digital signal processing, Addison Wesley, pp. 287-417, 1987.
- Jacson, L.B., "Limit cycle in state-space structure for digital filter," IEEE Trans. Circuits Syst., Vol. CAS-26, no., 6, pp. 67-68, 1979.
- Kawamata, M. and Higuch, T., "On the absence of limit cycles in a class of state-space digital filters which contains minimum noise realization," IEEE Trans. Acoust., Speech, and Signal Processing, Vol. ASSP-32, no.4, pp. 928-930, 1984.
- Bonar, B.W., "New second-order state-space structure for realization low roundoff noise digital filter," IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal processing, vol. ASSP-33, no.2, pp. 106-110, 1985.



文 庸 善 (Yong Sun Moon) 正會員  
 1960年 1月 4日 生  
 1983年 2月: 朝鮮大 工大 電子工學科 卒業  
 1985年 2月: 朝鮮大 大學院 電子工學科 (工學碩士)  
 1989年 2月: 朝鮮大 大學院 電氣工學科 (工學博士)  
 1985年 3月~現在: 朝鮮大 工大 電子工學科 助教  
 1989年 3月~現在: 全州大 講師



朴 鍾 安 (Jong An PARK) 正會員  
 1952年 7月 7日 生  
 1975年 2月: 朝鮮大學校 工科大学 電子工學科 卒業  
 1986年 2月: 朝鮮大學校 大學院 (工學博士)  
 1983年~1984年: 美國 Massachusetts 大學 客員教授  
 1990年~現在: 朝鮮大學校 工科大学 電子工學科 副教授  
 1990年 2月~英國 Surrey 大學校 客員教授