

이산시간 선형 시스템의 차수 감소에 있어서
통과대역 오차 감소

正會員 金正和* 正會員 鄭讚壽**

The Reduction of Pass Band Error in the Order
Reduction of the Discrete Time Linear Systems

Chung Hwa KIM* Chan Soo CHUNG** *Regular Members*

“이 논문은 1991년도 조선대학교 학술연구비에 의하여 연구 되었음”

要 約

본 논문은 선형 시불변 시스템의 가제어성 및 가관측성 gramian을 가중함수에 의해 변화시키므로써 통과대역의 오차를 감소시키는 저차수화 방법을 제안한다.

지역통과 필터의 4차를 3차로 감소하는 경우에 제안된 방법에서 QEI는 평형 실현 방법에서 10.16464에 비하여 6.15724로 개선 되었고, 감도는 7.790568에 비하여 5.45692로 개선 되었다.

주파수 특성 곡선은 제안된 방법이 평형 실현 방법 보다 우수함을 보인다.

ABSTRACT

This paper proposes a reduced-order method which reduces passband error by changing controllability and observability gramian based on weighted functions in the linear time invariant system.

In the case that the 4-order model is the reduced to 3-order model in the low-pass filter, the QEI in the proposed method is improved to 6.15724 compared to 10.16464 in the balanced realization method and the sensitivity is improved to 5.45962 compared to 7.790568.

The frequency property curves show that the proposed method is superior to the balanced realization method.

I. 서 론

어떤 사양에 맞는 시스템의 전달함수를 결정하여 그 입출력 특성을 유지한 상태에서 모델을 구하는 것

*朝鮮大學校 電子工學科

Dept. of Electronic Engineering, Chosun University

**崇實大學校 電氣工學科

Dept. of Electrical Engineering, Soongsil University

論文番號 : 92-2 (接受1991. 8. 20)

이 실현 문제이며, 상태 공간 모델 실현은 전달함수의 각 계수 값이 모델의 요소가 되기 때문에 전달함수와 같은 차수의 실현이 가능하다.

그러나 전달함수의 차수가 고차이면 상태공간 모델의 차수도 높아져 물리적인 구성실현이 곤란하다.

따라서 이러한 문제를 해결하기 위한 차수 감소 모델이 지난 수년 동안 연구되어 왔으며 이들의 대부분은 모델의 해석이나 주파수 영역에 관계 하였다.

Moore¹⁾에 의한 차수 감소는 상태 공간 모델의 가제어성과 가관측성 그래미안(gramian)을 이용한 하며 임출력 특성에 별로 영향을 미치지 않는 상태 성분을 찾아 내어 모델의 차수를 낮추는 것이다.

이산 시간 선형 시스템에는 가제어성 및 가관측성을 감도로서 대각화 하는 평형 실현 구조에서의 차수 감소법과 Quasi-Kalman법, 그리고 집중 차수 감소법등이 있다. 이들의 실현에 의한 차수 감소 방법을 주파수 영역의 통과대역에서 오차가 발생한다²⁾³⁾.

따라서 본 논문에서는 모델 서차수화에 대한 주파수 영역에서의 통과 대역 오차를 줄이는 방법이며, 가중함수에 의해 가제어성 및 가관측성 그래미안을 변화 시키는 것으로 II 장에서 가제어성 및 가관측성 그래미안의 특성을 고찰하고, III 장에서 가중함수에 의한 가제어성, 가관측성 그래미안을 변화시킨 후 고유치 분해에 의해 정칙 등가 좌표변환 행렬 T를 구한 새로운 이산 시간 선형 시스템의 상태 공간 모델(A_w, B_w, C_w, d)(이하 가중 모델 이라함)을 구하여 모델 서차수화(A_H, B_i, C_i, d)를 실현하고, IV 장에서 이 모델에 대해 수치예(지역 통과 및 고역 통과 필터)에 의해서 시뮬레이션하며, V 장으로 결론을 내리고자 한다.

II. 가제어성 및 가관측성 그래미안

다음과 같은 n차의 안정한 이산시간 선형 시스템⁴⁾⁵⁾에서 생각 한다.

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (1)$$

$$y(k) = Cx(k) + du(k) \quad (2)$$

여기서 x(k)는 n차 상태벡터이고 u(k), y(k)은 각각 스칼라 임출력이며 A, B, C는 각각 n×n, n×1, 1×n의 실계수 행렬이다.

시스템이 임의의 입력 u(k)에 의해 유한시간 동안 임의의 초기상태에서 임의의 최종상태로 이갈어 낼 수 있을때 이것을 가제어성이라 하며 시스템이 가제어성이 되기 위한 필요 충분조건은 다음식과 같다.

$$Q = [B \ AB \ A^2B \ A^3B \ \dots \ A^{n-1}B] = n \quad (3)$$

식 (3)은 n차원의 선형 연립방정식 이므로 해가 존재하기 위해서는 반드시 행렬 Q의 계수가 n이 되어

야 하고, 가제어성의 정량적인 크기를 나타내기 위해 다음과 같은 그래미안 행렬 K로 나타낼 수 있다.

$$K = QQ^T = \sum_{i=0}^{n-1} A^i B B^T (A^T)^i \quad (4)$$

또 시스템의 출력 y(k)를 유한 시간동안 측정 하므로써 모든 초기상태를 결정할 수 있을때 이것을 가관측성이라 하고 시스템이 가관측성이 되기 위한 필요 충분조건은 다음식과 같다.

$$R = [C \ CA \ CA^2 \ \dots \ CA^{n-1}] = n \quad (5)$$

식 (5)에서 행렬 R는 계수가 n이 되어야 하며 가관측성의 정량적인 크기를 다음과 같은 그래미안 행렬 W로 나타낼 수 있다.

$$W = RR^T = \sum_{i=0}^{n-1} (A^T)^i C^T C A^i \quad (6)$$

식 (4)와 식(6)의 K와 W는 각각 입력과 상태성분과의 결합정도, 출력과 상태성분과의 결합정도를 나타내는 것이며 가제어성과 가관측성의 특성만을 알 어보기 위해 K, W를 고유치 분해하여 고유값과 고유 Vector로 나타내면 다음과 같다.

$$K = (V_{k1}, V_{k2}, \dots, V_{kn}) \begin{bmatrix} \lambda_{k1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_{k2} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{k1} \\ V_{k2} \\ \cdot \\ V_{kn} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$W = (V_{w1}, V_{w2}, \dots, V_{wn}) \begin{bmatrix} \lambda_{w1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_{w2} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{wn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{w1} \\ V_{w2} \\ \cdot \\ V_{wn} \end{bmatrix} \quad (8)$$

식 (7)과 식(8)에서 V_{ki}, V_{wi}는 K, W의 정규 직교 고유벡터이고, λ_{ki}, λ_{wi}는 K, W의 고유값이다. 단 i=1, 2, 3, …, n

또 가제어성의 세기에 대해서는 상태공간 에너지가 식(9)와 같이 정규화 된

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|u(k)\|^2 \leq 1 \quad (9)$$

입력 $u(k)$ 에 대해 위점 $x(0)$ 에서 도달 함수 있는 상태의 집합은 $\lambda_{k1}V_{k1}, \lambda_{k2}V_{k2}, \dots, \lambda_{kn}V_{kn}$ 이 되며, 고유값 λ_{ki} 이 작으면 입력의 영향이 적고 가제어성이 약하다.

또한 가관측성의 세기는 상태공간 에너지가 식 (10)과 같이 정규화된 출력 $y(k)$ 가 되도록 하는 초기 상태의 집합은 $\lambda_{w1}^{-1}V_{w1}, \lambda_{w2}^{-1}V_{w2}, \dots, \lambda_{wn}^{-1}V_{wn}$ 되며, 고유값 λ_{wi} 가 작으면 출력의 영향이 적고 가관측성이 약하다.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|y(k)\|^2 = 1 \quad (10)$$

따라서 K 와 W 의 작은 고유값 상태 성분을 제거하여도 그 특성에 큰 영향을 주지 않는 것으로 다음과 같이 저차수화할 수 있다.

III. 가중에 의한 모델 저차수화

주파수 영역에서 가중하기 위해 식(1)과 (2)를 Z 변환하면 다음 식과 같다.

$$X(z) = (zI - A)^{-1}zx(0) + F(z)u(z) \quad (11)$$

$$Y(z) = G(z)zx(0) + H(z)u(z) \quad (12)$$

단 $X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}$, $F(z) = (zI - A)^{-1}B$,

$$G(z) = C(zI - A)^{-1}$$

$$H(z) = C(zI - A)^{-1}B + d$$

식(11)과 (12)의 K 와 W 는 다음식에서 구할 수 있다.

$$K = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F(z)F(z)^* \frac{dz}{z} \quad (13)$$

$$W = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} G(z)^*G(z) \frac{dz}{z} \quad (14)$$

단 *은 공액 전치이다.

여기서 그림 1과 같이 시스템에 가중(11,12)을 하기 위한 가중 상태 공간 함수 $\phi(z)$ 와 $\varphi(z)$ 는 다음과 같이 한다.

$$\phi(z) = C_{\phi}(zI - A_{\phi})^{-1}B_{\phi} + d_{\phi} \quad (15)$$

$$\varphi(z) = C_{\varphi}(zI - A_{\varphi})^{-1}B_{\varphi} + d_{\varphi} \quad (16)$$

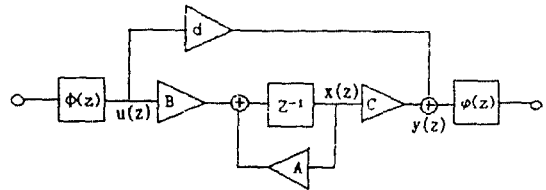


그림 1. 가중함수에 의한 모델의 블록 다이어그램

Fig. 1. Block diagram of model with weighted function.

식 (15)와 식(16)에 의해 가중되어진 시스템의 K' 와 W' 는 다음식과 같다.

$$\begin{aligned} K' &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F(z)\phi(z)[F(z)\phi(z)]^* \frac{dz}{z} \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F(z)F(z)^*|\phi(z)|^2 \frac{dz}{z} \quad (17) \end{aligned}$$

$$W' = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} G(z)^*G(z)|\phi(z)|^2 \frac{dz}{z} \quad (18)$$

가중모델의 실현에 있어서, 가중을 하기 위한 식 (15), 식(16)의 가중 상태 공간 함수 $\phi(z)$, $\varphi(z)$ 는 처음의 모델과 주파수 영역에서 같은 통과대역을 갖도록 설계자가 선택한다.

이때 모델의 적도라 함수 있는 식(17)과 식(18)의 K' 와 W' 는 다음과 같은 Lyapunov 방정식을 이용한다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A & BC_{\phi} \\ 0 & A_{\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & BC_{\phi} \\ 0 & A_{\phi} \end{bmatrix}^t \\ + \begin{bmatrix} Bd_{\phi} \\ B_{\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Bd_{\phi} \\ B_{\phi} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} K' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_{\varphi}C & A_{\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_{\varphi}C & A_{\varphi} \end{bmatrix} \\ + [d_{\varphi}C \ C_{\varphi}] [d_{\varphi}C \ C_{\varphi}] \begin{bmatrix} W' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (20) \end{aligned}$$

식 (19)와 식(20)에서 얻어진 K'와 W'을 이용한 정칙 등가변환 행렬 T는 다음과 같은 엔코리즘에서 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 Q &= R W' R^{-1} \\
 U \Sigma V^1 &= Q \\
 T &= R^{-1} V \text{diag}(\Sigma) \\
 \text{단 } R &= K' \text{의 상삼각행렬, } \Sigma \text{은 } Q \text{의} \\
 &\text{고유값 대각행렬} \\
 U, V^1 &= Q \text{의 일원행렬}
 \end{aligned} \tag{21}$$

식 (1)과 (2)에서 시스템 (A,B,C,d)에 식(21)의 정칙행렬 T를 이용하여 좌표변환⁽⁹⁾하여 상태벡터 x'(k)로 하는 가중을 행한 상태 공간 방정식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$x'(k+1) = A'x'(k) + B'u(k) \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
 y(k) &= C'x'(k) + du(k) \\
 \text{단 } A' &= TAT^{-1}, B' = TB, C' = CT^{-1}
 \end{aligned} \tag{23}$$

식(22)과 (23)에 대한 Kw와 Ww는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 K_w &= \sum_{i=0}^{\infty} (TAT^{-1})^i TB(TB)^i [(TAT^{-1})^{i+1}] \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} T A^i B B^i (A^i)^i T^i \\
 &= T K T^i
 \end{aligned} \tag{24}$$

$$W_w = T^{-1} W T^{-1} \tag{25}$$

식(24)와 식(25)에서 K, W는 식(4)와 식(6)이므로 불변이며 좌표계에 대응한 상대적인 것을 알 수 있다.

여기서 모델 저차수화는 평형 실현에서의 저차수화 방법⁽¹⁰⁾과 같이 하며, 식(22)과 식(23)에서 임출력 특성이 크게 변화되지 않는 범위 내에서 원하는 차수를 l로 하여 두 개의 그룹으로 나누어 다음과 같이 차수를 감소시킬 수 있다.

$$\begin{aligned}
 A' &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \\ \uparrow \\ \downarrow \end{matrix} \begin{matrix} l \\ n-l \\ l \\ n-l \end{matrix} \\
 B' &= \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \end{matrix} \begin{matrix} l \\ n-l \end{matrix} \\
 C' &= [C_1 \quad C_2] \begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \end{matrix} \begin{matrix} l \\ n-l \end{matrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(k) \tag{26}$$

$$y(k) = [C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + du(k) \tag{27}$$

식 (26)과 식(27)에 대한 감소 모델은 다음과 같이 쓸 수 있으며 이를 l차의 임출력 특성 근사 모델이라 한다.

$$x'(k+1) = A_l x'(k) + B_l u(k) \tag{28}$$

$$y(k) = C_l x'(k) + du(k) \tag{29}$$

식(28), 식(29)의 안정조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 H(z) &= C_l (ZI - A_l)^{-1} B_l + d \\
 &= C_l \frac{\text{adj}(ZI - A_l) B_l}{\det(ZI - A_l)} + d
 \end{aligned} \tag{30}$$

$$\lambda_i(A_l) < 1 \quad i=1,2,3, \dots, n \tag{31}$$

상태 전이 행렬 A_{li}의 고유치 λ(A_{li})가 식(30)에 전달 함수 H(z)의 극과 같으므로 시스템이 안정하기 위한 필요 충분 조건은 식(31)과 같이 행렬 A_{li}의 고유치의 절대치가 1보다 작아야 한다.

또 시스템의 특성을 나타내는 행렬 A_{li}의 고유치에 대한 원리가 있는데 상태 전이 행렬 A_{li}의 고유치에 절대치가 1보다 작기 위한 필요 충분 조건은 임의의 n×n에 대해 Lyapunov 안정도 식은 다음과 같으며 이를 만족하면 안정하다.

$$P - A_l^T P A_l = Q \tag{32}$$

여기서 Q = 정성 행렬(Positive Definite Matrix)
P = 대칭 정성 행렬(Symmetric Positive Definite Matrix)

A_{li}^TP A_{li} = 선형 방정식을 위한 Lyapunov 함수이다.

여기에서 새로운 l차 특성 근사 모델의 안정도는 식(9)과 식(10)에서 정규화하므로 λ(A_{li})는 항상 절대값이 1보다 작은 값을 갖게 되어 안정계를 이루게

표 1. 모델의 상태 공간 계수(저역 통과)

Table 1. State-space coefficient of models(low pass)

	A				B	C'	d
canonical model	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0039	
	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0182	
	-0.5496	2.2920	-3.8325	3.0592	1.0	0.0053	0.0
balanced model	0.9034	-0.3436	-0.0021	-0.0318	0.2966	0.2966	
	0.3436	0.7406	-0.3615	-0.0316	-0.3829	0.3829	
	-0.0021	0.3615	0.6491	-0.3013	0.2726	0.2726	
	0.0318	-0.0316	0.3013	0.7661	-0.1015	0.3829	0.0
weighted model	0.8906	0.3323	-0.0057	0.0322	0.2773	0.3287	
	-0.3435	0.7042	0.3477	-0.0202	0.4282	-0.3708	
	-0.0431	-0.3838	0.6395	0.2929	0.4257	0.2998	
	-0.0512	-0.0794	-0.3241	0.8248	0.2491	-0.0658	0.0

되어 주파수 응답오차에 대해서 강인성을 갖는다.

IV. 시뮬레이션 및 결과

본 논문에서 제시한 가중함수를 이용한 이산 시간 선형 시스템의 차수 감소에 대한 실험은 수치예(저역 통과필터, 고역통과필터) 의해서 시뮬레이션한다.

평형형 저차수화^[10]는 Pernebo와 Silverman에 의해서 발표된 방법으로 안정성 및 가제어성과 가관측성이 보장된 모델이므로 제안한 모델과 비교하여 그 결과를 검토하고자 한다.

IV-1. 시뮬레이션(1)

시뮬레이션을 위한 4차 저역 통과 필터의 전달함수는 식(33)과 같고, 가중을 위한 상태 공간 계수는 식(33)과 동일한 주파수 특성을 갖는 3차 저역 통과 필터를 식(34)과 같이 선정하며 그림 1의 $\phi(z)$ 에 가중한다.

$$H(z) = \frac{0.00533Z^{-1} + 0.01817Z^{-2} + 0.00395Z^{-3}}{1 - 3.05920Z^{-1} + 3.8247Z^{-2} - 2.29205Z^{-3} + 0.54960Z^{-4}} \quad (33)$$

$$\begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \begin{matrix} I \\ A \\ B \\ C \\ d \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.543463 & -1.783386 & 2.1291 & 1.0 \\ 8.69587e-2 & -0.1014112 & 0.1190183 & 0.05634 \end{bmatrix} \quad (34)$$

식(33)에 대한 모델들의 상태공간 계수는 표 1과 같고, 가중형의 좌표 변환을 위한 T 행렬은 식(21)에 의하여 구하며 표 2와 같다.

표 2. 선형 변환에 사용한 T행렬(저역통과)

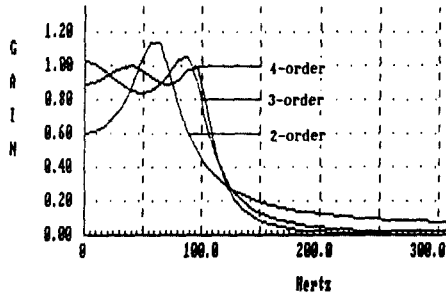
Table 2. T Matrix using linear transformation(low pass)

3.168975	-13.724172	23.203257	-19.591827
7.541254	-15.962397	16.398597	-8.983638
11.954277	-14.315896	7.805287	-2.041142
15.333792	-8.942528	0.606744	1.276712

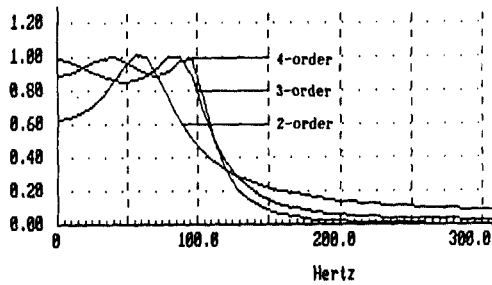
표 1의 평형형과 가중형 모델의 차수 감소는 식(26)과 식(27)에서 $l=3$ (차수=3)으로 한 경우의 차수 근사 모델을 식(30)과 같이 변환한 각 전달함수는 식(35)과 식(36)와 같고, 평형형과 가중형의 저차수화에 대한 주파수 응답은 그림 2의 (a), (b)와 같다.

$$H_{bal} = \frac{1.56249e-2Z^{-1} - 1.451799e-2Z^{-2} + 6.415707e-2Z^{-3}}{1 - 2.29313Z^{-1} + 1.981963Z^{-2} - 0.6284734Z^{-3}} \quad (35)$$

$$H_{wt} = \frac{2.172059e-2Z^{-1} - 3.259669e-2Z^{-2} + 8.25858e-2Z^{-3}}{1 - 2.23439Z^{-1} + 1.894544Z^{-2} - 0.5870876Z^{-3}} \quad (36)$$



(a) 평형 실현(저역 통과)
(a) Balanced realization(low pass)



(b) 가중 실현(저역 통과)
(b) Weighted realization(low pass)

그림 2. 감소 차수 모델들의 주파수 응답 곡선
Fig. 2. Frequency response curves of reduction order models .

또 3차 근사 모델에 대한 가제어성 및 가관측성 크래미안은 표 3에, 양자화 오차지수⁽¹⁶⁾(QEI : Quantization Error Index)와 주파수 감도를 각각 다음식 (37), (38)과 같이 정의⁽¹⁷⁾할때 표 4와 같은 결과를 얻었다.

$$QEI = q^2 / 12 \{ \text{trace}(QW) + U \} \quad (37)$$

표 3. 감소 모델의 K와 W(차수=3)
Table 3. K and W of reduction model(order=3)

Balance model			K			W		
0.88461	0.00028	-0.00027	0.88461	-0.00028	-0.00027	0.88461	-0.00028	-0.00027
0.00028	0.63401	0.00115	-0.00028	0.63401	-0.00115	-0.00028	0.63401	-0.00115
-0.00027	0.00115	0.27254	-0.00027	-0.00115	0.27254	-0.00027	-0.00115	0.27254
Weighted model			K			W		
0.91102	0.04994	-0.00891	0.91268	0.15562	0.08416	0.91268	0.15562	0.08416
0.04994	0.74583	0.12775	0.15562	0.31188	0.19577	0.15562	0.31188	0.19577
-0.00891	0.12775	0.39288	0.08416	0.19577	0.33475	0.08416	0.19577	0.33475

표 4. 감소 차수 3의 평가 지수

Table 4. Evaluation index of reduction order 3

	Balanced	Weighted
Q.E.I	10.16464	6.15724
Sensitivity	7.790568	5.456921

단 q=계수양자화, Q=행렬 A,B실수계수의 수, U=행렬 C의 실수계수의 수

$$\text{Sensitivity} = \{ \text{trace}(K) + 1 \times \text{trace}(W) + 1 \} \quad (38)$$

IV-2. 시뮬레이션(2)

시뮬레이션을 위한 4차 고역 통과 필터의 전달함수는 식(39)과 같고 식에 대한 모델들의 상태 공간 계수는 표 5와 같으며, 가중을 위한 상태 공간 함수는 식(39)과 같은 주파수 특성을 갖는 3차 고역 통과 필터를 식(40)과 으로 선정하여 그림 1과 같이 가중한다.

$$H(z) = \frac{0.323648 - 1.159563Z^{-1} + 1.679923Z^{-2} - 1.159101Z^{-3} + 0.323382Z^{-4}}{1 - 1.53378Z^{-1} + 1.473825Z^{-2} - 0.563713Z^{-3} + 0.164718Z^{-4}} \quad (35)$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & A & B \\ 1 & C & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.003832 & 0.827515 & 1.105191 & 1.0 \\ -0.422112 & 0.789107 & -0.6815153 & 0.12383 \end{bmatrix} \quad (40)$$

표 5. 모델의 상태 공간 계수(고역 통과)

Table 5. State-space coefficient of models(low pass)

	A				B	C'	d
canonical model	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.2701	.3236
	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	-0.9767	
	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	1.2029	
	-0.1647	0.5637	-1.4738	1.5338	1.0	-0.6632	
balanced model	0.0620	-0.6224	-0.2178	0.1260	0.8041	0.8041	.3236
	0.6224	0.5520	-0.3837	0.0729	0.1889	0.1889	
	-0.2178	0.3837	0.5124	0.4103	0.2288	0.2288	
	-0.1260	0.0729	-0.4013	0.4073	0.0086	0.0086	
weighted model	0.0892	0.6521	0.4069	-0.3852	0.7568	-0.7978	.3236
	-0.6515	0.5288	-0.3519	0.1661	-0.1165	-0.1982	
	0.1895	0.3776	0.3483	0.3194	-0.2672	0.2611	
	0.0866	0.0195	-0.4769	0.5675	0.0933	-0.1299	

가중형의 좌표 변환을 위한 T 행렬은 식(21)에 의하여 구하며 표 6에 나타내었다.

표 6. 선형 변환에 이용한 T행렬

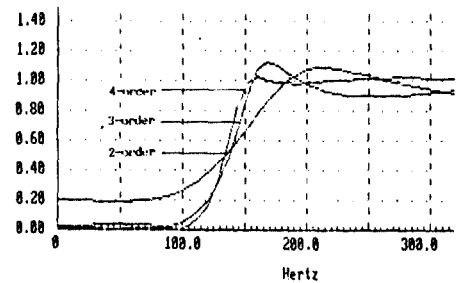
Table 6. T matrix using linear transformation

0.998473	-0.124535	-0.057026	-0.012978
0.009920	-0.988111	-0.492554	0.347441
0.033900	0.059391	-0.968022	0.850434
0.000213	0.011664	-0.067716	-0.954304

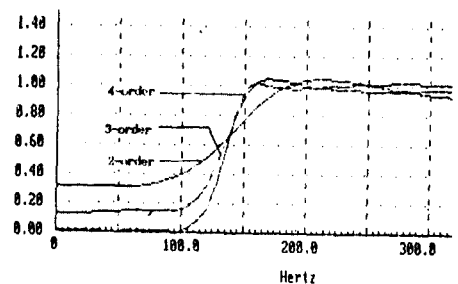
표 1의 평형형과 가중형 모델의 차수 감소는 식(26)과 식(27)에서 $l=3$ (차수=3)으로 한 경우의 근사모델을 식(27)과 같이 변환한 각 전달함수는 식(41)과 식(42)와 같고, 평형형과 가중형의 저차수화에 대한 주파수 응답은 그림 3의 (a), (b)와 같다.

$$H_{b3} = \frac{0.32364 - 1.0278Z^{-1} + 1.20657Z^{-2} - 0.544775Z^{-3}}{1 - 1.12645Z^{-1} + 0.836077Z^{-2} - 9.49277e-2Z^{-3}} \quad (41)$$

$$H_{w3} = \frac{0.32364 - 0.9637Z^{-1} + 1.05354Z^{-2} - .430915Z^{-3}}{1 - .966251Z^{-1} + 0.743032Z^{-2} - 8.1681e-3Z^{-3}} \quad (42)$$



(a) 평형 실현(고역 통과)
(a) Balanced realization(high pass)



(b) 가중 실현(고역 통과)
(b) Weighted realization(high pass)

그림 3. 감소 차수 모델의 주파수 응답 곡선
Fig. 3. Frequency response curves of reduction order models.

표 7. 감소차수의 K와 W(차수=3)
Table 7. K and W of reduction model(order=3)

Balance model		K		W	
0.89568	0.00010	-0.00024	0.89568	-0.00010	-0.00024
0.00010	0.60321	0.00050	-0.00010	0.60321	-0.00050
-0.00024	0.000050	0.29490	-0.00024	-0.00050	0.29490
Weighted mosel		K		W	
0.91882	-0.01694	-0.02659	0.83158	0.01313	-0.03359
-0.01694	-0.67879	0.10298	0.01313	0.50188	0.01338
-0.02659	0.10298	0.31384	-0.03359	0.01338	0.19693

표 8. 감소 차수 3의 평가 지수(고역 통과)
Table 8. Evaluation index of reduction order 3(high pass)

	Balanced	Weighted
Q.E.I	9.99316	9.12156
Sensitivity	7.553175	7.367157

고역 통과 필터의 3차 근사 모델에 대한 가제이성 및 가관측성 그래픽안은 표 7과 같이 식(37)과 식(38)에 의한 양자화 오차 지수와 주파수 감도는 표 8과 같다.

이상의 시뮬레이션 1과 2에서 다음과 같은 결과를 얻었다.

그림 2와 3은 4차의 모델을 2차와 3차로 근사 시킨 것으로 본 논문의 제안모델(가중형)이 평형량 보다 통과 대역에서 오차가 작음을 보였으나 저주 대역에서는 오차가 큰것을 알 수 있었고, 표 1에서 직역 통과 필터의 4차를 3차로 감소하는 경우에 제안된 방법에서 QEI는 평형 실현의 경우 10.16461인데 비하여 6.15724로 개선되었음을 알 수 있으며, 감도의 경우도 평형 실현은 7.790568에 비하여 5.45692로 개선(저감)되었다.

또 고역 통과와 경우도 표 8와 같이 제안한 방법이 더 좋은 결과를 나타내었다.

V. 결 론

본 논문에서는 차수감소의 주파수영역에서 통과대역의 오차를 줄이는 것이다. 차수감소 모델들에서 문제가 되는 통과대역에서의 오차를 감소시키기 위하여 가제이성과 가관측성 그래픽안에 변화를 주기위해 가중합수를 사용하였다.

가중된 K와 W는 고유값이 불변이며 대각화 함수 있는 좌표변환 장치행렬 T를 구하여 가중된 모델의 상태공간 계수(Aw, Bw, Cw, d)를 구할 수 있으며 원하는 감소 차수의 계수(Au, Bu, Cu, d)를 얻을 수 있다.

제시된 알고리즘을 직역 통과 필터와 고역 통과 필터에 적용해 본 결과 통과 대역에서 오차 감소가 있을 수 있었고, 직역에서 양자화 오차 지수는 4.0071만큼 개선되었고, 주파수 감도는 2.3336만큼 개선(저감)되었다.

이상의 결과로 본 알고리즘이 평형량 보다 좋은것을 알 수 있었고 제어 이론의 관측자에도 적용이 가능하리라 생각되며 차후에는 가중의 최적 조건에 대해서 연구하고 싶다.

참 고 문 헌

1. L.Antonio, V.Uniberto, "Model Reduction using Output Equation Error", INT.J.Systems SCI., vol.15, pp.1011-1021, no.9, 1984.
2. Keming Zhou, "Remarks on Stochastic Model Reduction", IEEE Trans., vol.AC 32, pp. 356-358, no.4,1987.
3. T.Liu, B.D.O.Anderson, "Model Reduction with Time Delay", IEE Proc, vol.131, Pt.D, no. 6, November, 1987.
4. P.Hippe, "Modified Doubly Coprime Fractional Representations Related to the Reduced Order Observer", IEEE Trans., vol.AC 31, pp.573-576, no.5, 1989.
5. B.C.Moore, "Principal Component Analysis in Linear Systems: Controllability, Observability,

- and Model Reduction”, IEEE Trans. vol.AC-26, pp.17-32, no.1, 1981.
6. Hu Xiheng, “FF-Pade Method of Model Reduction in Frequency Domain”, IEEE Trans. vol.AC-32, pp.243-246, no.3, 1987.
 7. Ubaid M.Al-saggaf, G.F.Franklin, “Model Reduction via Balanced Realization : An Extension and Frequency Weighting Techniques”, IEEE Trans.vol.33, pp.687-691, no.7, 1988.
 8. W.S.Lu, E.B.Lee, “Model Reduction via a Quasi-Kalman Decomposition”, IEEE trans. vol.AC-30, pp.786-790, No.8, 1985.
 9. L.Pernebo, L.M.Silverman, “Model Reduction via Balanced State Space Representations”, IEEE Trans. vol.AC-27, pp.382-387, no.2, 1982.
 10. G.J.Lastman, N.K.Sinha, “A comparison of the Balanced Matrix Method and the Aggregation Method of Model Reduction”, IEEE Trans. vol.AC-30, pp.301-304, March, 1985.
 11. 김 정화, 정 환수, “가중함수에 의한 최소오차분산을 갖는 이산 시간 선형 시스템”, 한국통신학회 91년 춘계종합학술발표논문집, 제10권 1호, pp. 76-80, 1991.
 12. T.Hinamoto, M.Nouri-Shirazi, R.Yamaguchi, “Minimization of Sensitivities with Frequency Weighing for MIMO State Space Digital Filters”, IECEJ.A vol. J73-A, pp.1058-1065, no.6, 1990.
 13. L.Thiele, “On the Sensitivity of Linear State Space systems”, IEEE Trans. vol.CAS-33, 502-510, no.5, 1986.
 14. J.C.Doyle, G.Stain, “Robustness with Observers”, IEEE Trans.vol.AC 24, pp. 607-611, 1979.
 15. V.C.Klema, A.J.Laub, “The Singular Value Decomposition : Its Computation and Some Application”, IEEE Trans. vol.AC 25, pp. 164-176, no.2, 1980.
 16. C.T.Mullis, R.A.Roberts, “Synthesis of Minimum Roundoff Noise Fixed Point Digital Filter”, IEEE Trans. vol.CAS 23, pp.551-562, Sept.1976.
 17. M.Kawamata, M.Iwatsuki, T.Higuchi, “Balanced Realization as Minimum Sensitivity Structure in Linear Systems”, IECEJ vol.21, pp.900-906, no.9, 1985.



金正和 (Chung Hwa KIM) 正會員
 • 朝鮮大學校 工科學院 電子工學科 卒業
 • 朝鮮大學校 大學院 (工學碩士)
 • 崇實大學校 大學院 (工學博士: 92 / 2 豫定)
 • 現在: 朝鮮大學校 電子工學科 助教授 在職

鄭讚壽 (Chan Soo CHUNG) 正會員
 • 서울大學校 工科學院 電氣工學科 卒業
 • 서울大學校 大學院 (工學碩士)
 • 서울大學校 大學院 (工學博士)
 • 現在: 崇實大學校 電氣工學科 教授 在職