

論 文

加重函數에 의한 최소 출력오차 分散을 갖는  
 狀態空間 디지털 필터 實現

正會員 金正和\* 正會員 鄭讚壽\*\*

The Realization of State-Space Digital Filters with  
 Minimum Output Error Variance by Weighted Function

Chung Hwa Kim\*, Chan Soo Chung\*\* *Regular Members*

이 논문은 1991년도 교육부지원 한국 학술진흥재단의 자유공모 과제 학술 연구 조성비에 의하여 연구되었음.

要 約

본 논문은 출력 오차 分散을 갖는 狀態空間 디지털 필터의 實現을 제안하였다.  
 이 알고리즘은 加重函數에 의해서 선형 시불변 시스템내의 가제어성 및 가관측성 gramian을 변화시키는 것  
 이며, 狀態空間 계수 변동에 대한 출력 오차 分散을 줄임으로써 디지털 필터의 성능을 개선할 수 있다.  
 수치예에서, 본 알고리즘 구조는 다른 4가지 구조(표준형, 병렬형, 통계적감도형, 평형형)보다 더 적은  
 출력오차 分散을 갖는 것을 알았다.

ABSTRACT

This paper proposes the realization of state-space digital filters with minimum output error variance.

The algorithm is transforms of controllability and observability gramian in linear time invariant systems by weighted function and can improve performance of the digital filters by reducing the output error variance for state space coefficient variation.

A numerical example shows that algorithm structure has much lower output error variance than that of other four structures(canonical, parallel, statistical sensitivity, balanced).

I. 서 론

\*朝鮮大學校 電子工學科  
 Dept. of Electronic Engineering, Chosun Univ.  
 \*\*崇實大學校 電氣工學科  
 Dept. of Electrical Engineering, Soongsil Univ.)  
 論文番號 : 92-91(接受1991. 8. 20)

디지털 신호처리는 음성, 영상, 수치제어 및 의용생체 등의 여러분야에서 광범위하게 이용되고 있는 이

러한 처리의 기능은 디지털 필터가 수행한다.

디지털 필터는 주어진 明細條件에 적합한 전달함수를 얻었다 한지라도 시스템을 實現하고자 할때 디지털화의 물리적인 제약 즉 입력신호의 A/D변환, 계수 양자화, roundoff 오차가 발생하게 되어 원하는 출력을 얻을 수가 없고 안정 영역의 임의의 주파수 불안정 영역으로 이동하는 경우도 있다. 이러한 원인에 의해서 디지털 필터는 출력 分散이 커지게 되며, 즉, 출력 分散을 줄이는 방법은 이 값을 증가시키는 방법과 system의 감도를 줄이는 방법이 있는데, 이 값을 변화시키는 방법들은 디지털 신호 처리 프로세서의 처리 속도 저하 및 규모의 증대를 가져오게 되므로, 후자의 계수 양자화와 배계 변수의 최소 변화에 따른 system의 감도를 최소화 하는 實現 구조에 대하여 여러가지 방법들이 보고 되었다. 이들의 디지털 필터는 각 계수값을 요소로 갖는 상태공간으로 표현할 수 있으며 이들에 대한 임출력과 상태성분의 관계를 나타내는 가제어성 그레미안(gramian) K와 가관측성 그레미안 W 또는 이를 직접적으로 변화시키는 방법이다.

그러나 본 논문에서는 가중함수를 이용한 새로운 실현 모델을 연구하며 본문의 구성을 II 장에서 선형 시스템이론에 의한 가제어성과 가관측성 gramian과 III 장에서 출력 分散오차에 대한 이론을 고찰하고, IV 장에서는 가제어성 및 가관측성 gramian에 가중하는 새로운 방법에 의한 재표현 행렬을 구하여 최소 출력 오차 分散을 갖는 상태공간 디지털 필터(SSDF)의 상태 배계변수(Av, Bw, Cv, dv)를 實現(이하 기중 모델)하며, V 장에서 시뮬레이션을 통하여 이론의 타당성을 확인하고, VI 장으로 결론을 내리고자 한다.

## II. 이산시간 선형시스템의 가제어성과 가관측성

다음과 같은 n차의 안정한 이산시간 선형 시스템을 생각하자.

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (1)$$

$$y(k) = Cx(k) + du(k) \quad (2)$$

여기서 x(k)는 n차 상태벡터이고 u(k), y(k)은 각각 스칼라 입력과 출력이며 A, B, C, d는 각각 n×n, n×1, 1×n, 1×1의 실계수 행렬이다.

윗식은 시간 k에서 k+1로 바꾸어 질때 상태 벡터

의 전이가 입력u(k)에 어떻게 의존되는가를 나타낸 것이며, 시스템이 임의의 입력 u(k)에 의해 유한시간 동안 임의 초기상태에서 임의의 최종상태로 이끌어 낼 수 있을때 이것을 가제어성이라 하며 시스템이 가제어성이 되기 위한 필요 충분조건은 다음과 같다.

$$Q = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] \quad (3)$$

식(3)의 선형 독립방정식의 해가 존재하기 위해서는 행렬 Q의 선형 독립이 되어야 하고 행렬 Q의 계수(rank)가 n이 되어야 한다.

비라식 Q는 n차 정방행렬이므로 가제어조건이 되기 위한 필요 충분조건은, 다음과 같은 n×n행렬 QQ'가 정칙이 되어야 한다.

$$QQ' = \sum_{i=0}^{n-1} Q_i Q_i' \quad (n \times n) \quad (4)$$

식(4)의 QQ'는 A와 B의 상호 결합 관계를 알기 위한 행렬로 Gramian행렬이라 하고 식(1)의 시스템이 완전 제어되기 위한 필요 충분조건은 다음과 같은 Gramian행렬 K로 나타낼 수 있다.

$$K = QQ' = \sum_{i=0}^{n-1} A^i B B' (A')^i \quad (5)$$

위의 Gramian 행렬 K는 다음의 Lyapunov 방정식을 이용하여 구할 수 있다.

$$AKA' - K = BB' \quad (6)$$

또 시스템의 출력 y(k)를 유한 시간동안 측정 하므로써 모든 초기상태를 정확히 결정할 수 있을때 이것을 가관측성이라 하고 시스템이 가관측성이 되기 위한 필요 충분조건은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$R = [C \ CA \ CA^2 \ \dots \ CA^{n-1}]' \quad (7)$$

식(7)이 선형 독립의 해가 존재하기 위해서는 R의 계수는 n이 되어야 하고 R'R는 다음과 같다.

$$R'R = \sum_{i=0}^{n-1} R_i' R_i \quad (n \times n) \quad (8)$$

시스템의 완전 가관측이 되기 위한 필요 충분 조건은 식(8)이 정착이 되어야 하며 이는 A와 C의 연관 관계를 나타내는 행렬로 가관측성 Gramian행렬 W 하며 다음과 같다.

$$W = RR^T = \sum_{i=0}^{n-1} (A^i)^T C^T C A^i \quad (9)$$

식 (9)의 해를 다음 Lyapunov 방정식을 이용하여 구할 수 있다.

$$A^T W A - W = C^T C \quad (10)$$

여기서 식(5)과 식(9)의 K와 W는 각각 입력과 상태성분과의 결합정도, 출력과 상태성분과의 결합정도를 나타내는 것이며 가제어성과 가관측성의 특성을 알아보기 위해 K, W를 고유치 분해하여 고유값과 고유 Vector로 나타내면 다음과 같다.

$$K = (V_{K1}, V_{K2}, \dots, V_{Kn})$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_{K1}^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_{K2}^2 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{Kn}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{K1} \\ V_{K2} \\ \cdot \\ V_{Kn} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$W = (V_{W1}, V_{W2}, \dots, V_{Wn})$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_{W1}^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_{W2}^2 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{Wn}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{W1} \\ V_{W2} \\ \cdot \\ V_{Wn} \end{bmatrix} \quad (12)$$

단  $V_{Ki}, V_{Wi} = K, W$ 의 정규 직교 고유벡터,  $\lambda_{Ki}^2, \lambda_{Wi}^2 = K, W$ 의 고유값  $i = 1, 2, \dots, n$

또 가제어성의 세기<sup>(13)</sup>에 대해서는 狀態空間에서 표현하면은 에너지가 식(13)과 같이 정규화된 입력  $u(k)$ 에 대해 원점  $x(0)$ 에서 도달할 수 있는 상태의 집합이  $\lambda_{k1} V_{k1}, \lambda_{k2} V_{k2}, \dots, \lambda_{kn} V_{kn}$ 를 主軸으로 한다.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|u(k)\|^2 \leq 1 \quad (13)$$

따라서 그림 1과 같은 타원체의 내부와 같이 되며 고유값  $\lambda_{k1}^2$ 이 작으면 그 값에 대응한 고유벡터의 부분 공간은 입력의 영향이 작은것으로 가제어성이 작다.

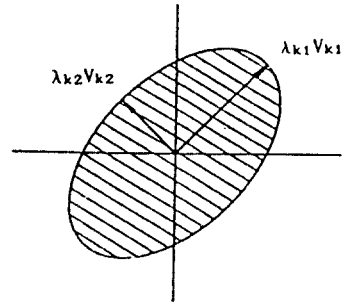


그림 1. 狀態空間의가제어성 영역  
Fig. 1. Controllability domain of the state space

또한 가관측성이 세기에 대한 狀態空間 표현은 에너지가 식(14)와 같이 정규화된 출력  $y(k)$ 가 되도록 하는 초기 상태의 집합은  $\lambda_{w1}^{-1} V_{w1}, \lambda_{w2}^{-1} V_{w2}, \dots, \lambda_{wn}^{-1} V_{wn}$ 된다.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|y(k)\|^2 \leq 1 \quad (14)$$

따라서 이것은 그림 2과 같은 타원체 모양으로 고유값  $\lambda_{w1}^{-1}$ 은 커지고 그에 대응하는 고유벡터의 펼쳐진 공간에 속한 곳은 출력의 영향이 작으며 가관측성이 작다.

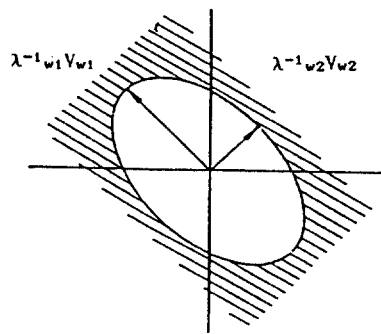


그림 2. 狀態空間의 가관측성 영역  
Fig. 2. Observability domain of the state space

### III. 출력 오차 分散

출력  $y(k)$ 를 얻기 위한 계산 과정에서 유한어장 필터의 實現구조에 대한 방정식은 식(15), (16)과 같은 신호 흐름 선도<sup>(13)</sup>는 그림 3과 같다.

$$\bar{x}(k+1) = A \bar{x}(k) + B u(k) + \alpha(k) \quad (15)$$

$$\bar{y}(k) = C \bar{x}(k) + d u(k) + \beta(k) \quad (16)$$

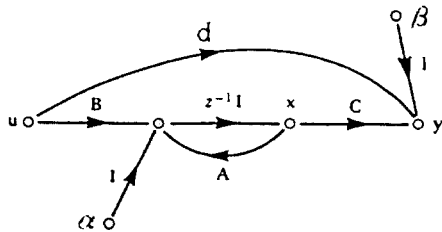


그림 3. 출력 오차의 신호 흐름 선도  
Fig. 3. Signal flow graph of output error

출력 오차는 식(2)와 식(16)에 의하여 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Delta y(k) &= \bar{y}(k) - y(k) \\ C \{ \bar{x}(k) - x(k) \} + \beta(k) &= C \{ ex(k) \} + \beta(k) \end{aligned} \quad (17)$$

단  $ex(k) = \bar{x}(k) - x(k)$ ,  $\beta(k)$  = 반올림 잡음

식(17)에서 오차를 다른 오차 신호에 상관없는 백색 잡음으로 가정 할때 출력 오차 分散값은 다음과 같다<sup>(16)</sup>.

$$\begin{aligned} Ver &= E \{ \Delta y^2(k) \} = E \{ \Delta y(k) \Delta y^t(k) \} \\ &= E \{ [ Cex(k) + \beta(k) ] [ Cex(k) + \beta(k) ]^t \} \\ &= C E \{ ex(k) ex(k)^t \} C^t + E \{ \beta^2(k) \} \\ &= C E \{ ex(k) ex(k)^t \} C^t + E \{ \beta^2(k) \} \end{aligned} \quad (18)$$

상태변수의 오차分散  $V_{ex} = E \{ ex(k) ex(k)^t \}$ 는 狀態空間 시스템이 안정하면 정상상태 ( $k \rightarrow \infty$ )에서 수렴하며 이때 수렴값  $V_{ex}$ 는 다음과 같다.

$$V_{ex} = \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} A^i P (A^i)^t \quad (19)$$

단,  $P =$  행렬  $A, B$ 의 제  $i$ 행의 비 정수 계수의 수

$$\sigma^2 = 2^{-2b} / 3 \quad (b = \text{어장})$$

식(18)을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$V_{er} = C V_{ex} C^t + \sigma^2 q \quad (20)$$

단  $q =$  행렬  $c, d$ 의 제  $i$ 행의 비 정수 계수의 수

식(20)에 식(19)을 대입하면 다음과 같은 출력 오차 分散식을 구할 수 있다.

$$V_{er} = \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} C A^i P (A^i)^t C^t + \sigma^2 q \quad (21)$$

식(21)에서  $C, C^t$ 는 스칼라양이므로 trace를 하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} V_{er} &= \sigma^2 \text{Tr} \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} C A^i P (A^i)^t C^t \right\} + \sigma^2 \text{Tr}(Q) \\ &= \sigma^2 \text{Tr} \left[ P \sum_{i=0}^{\infty} (A^i)^t C^t C A^i \right] + \sigma^2 \text{Tr}(Q) \\ &= \sigma^2 \text{Tr} [ P W ] + \sigma^2 \text{Tr}(Q) \end{aligned} \quad (22)$$

식(22)에서 보는 것과 같이 출력 오차 分散은 가관측성 그래미안에 영향을 받는다.

따라서 가관측성 그래미안  $W$ 을 변화시키기 위하여 다음과 같은 새로운 선형 변환 방법을 제안한다.

### VI. 加重函數에 의한 등가 좌표 변환

선형 시스템의 實現 구조로서 가중함수에 의한 선형 등가 변환으로 이는 상태 공간의 가제어성과 가관측성의 값에 의하여 구성된 實現 구조로서 시스템의 주파수 감도를 이용한 實現으로 다음과 같다. 이산 시간의 안정한  $n$ 차 전달함수  $H(z)$ 에 대한 최소 차수의 상태방정식이 식(1)과 (2)라면 이 시스템 ( $A, B, C, d$ )에 정칙행렬  $T \in R^{n \times n}$ 을 이용하여 좌표변환을 행하면 새로운 상태벡터  $x'(k)$ 로 하는  $TAT^{-1}, TB, CT^{-1}, d$ 가 얻어진다<sup>(25, 7, 9, 11)</sup>.

$$\begin{aligned} x'(k) &= Tx(k) \\ x'(k+1) &= TAT^{-1} x'(k) + TBu(k) \end{aligned} \quad (23)$$

$$y(k) = CT^{-1}x'(k) + du(k) \quad (24)$$

여기서 식(23)과 (24)의  $K'$ ,  $W'$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} K' &= \sum_{i=0}^{\infty} (TAT^{-1})^i TB(TB)^i [(TAT^{-1})^i]^T \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} TA^i BB^i (A^i)^T T^i \\ &= TK T^T \end{aligned} \quad (25)$$

$$W' = T^{-1} W T^{-1} \quad (26)$$

식(25)과 (26)에서  $K$ 와  $W$ 는 식(5)와 식(9)과 같으므로 불변이며, 좌표계에 대응한 상대적인 것이며  $K'$ ,  $W'$ 의 곱은 다음과 같이 구하여 진다.

$$K' W' = TKWT^{-1} \quad (27)$$

식(27)의 고유값 행렬  $\text{diag}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2, \dots, \lambda_n^2)$ 은 불변이고 시스템의 고유값이 되며  $K'$ ,  $W'$ 가 正定(positive definite)이면 임의의 정칙행렬  $T$ 를 선택하여  $K'$ ,  $W'$ 을 동시에 대각화 하는 것이 가능하다.

대각화 하는 방법<sup>(9)</sup>으로는 3가지 경우를 생각할 수 있다. 즉 입력정규형( $K' = T^{-1} W' = \Sigma^2$ ), 출력정규형( $K' = \Sigma^2$ ,  $W' = T$ ), 그리고 내부 평형형( $K' = W'$ )이 있다.

주파수 영역에서 가중을 주기 위해 식(1)과 (2)를  $z$  변환<sup>(15)</sup>하면 다음식이 된다.

$$X(z) = (zI - A)^{-1} zX(0) + F(z) u(z) \quad (28)$$

$$Y(z) = G(z) zX(0) + H(z) u(z) \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \text{단 } X(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k}, F(z) = (zI - A)^{-1} B, \\ G(z) &= C (zI - A)^{-1}, H(z) = C (zI - A)^{-1} B + d \end{aligned}$$

식(28)과 (29)의  $K$ 와  $W$ 는 다음과 같다.

$$K = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F(z) F(z)^* \frac{dz}{z} \quad (30)$$

$$W = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} G(z)^* G(z) \frac{dz}{z} \quad (31)$$

단 \*은 공액 전치이다.

따라서 식(30), 식(31)은 식(5), 식(9)과 같은 방법으로 나타낼 수 있다.

$$K = \sum_{i=0}^{\infty} (zI - A)^{-1} BB^i [(zI - A)^{-1}]^i \quad (32)$$

$$W = \sum_{i=0}^{\infty} (zI - A)^i C^i C (zI - A)^i \quad (33)$$

여기서 그림 4에서와 같이 시스템에 가중을 하기 위한 가중 함수는 기본 시스템의 주파수 특성과 같은 임의로 전달함수를 상태 공간으로 표현하면 다음식과 같다<sup>(17)</sup>.

$$\phi(z) = C_{\phi} (zI - A_{\phi})^{-1} B_{\phi} + d_{\phi} \quad (34)$$

$$\varphi(z) = C_{\varphi} (zI - A_{\varphi})^{-1} B_{\varphi} + d_{\varphi} \quad (35)$$

식(34)과 (35)식에 의해 가중된 시스템의  $K$ 와  $W$ 는 다음식과 같다.

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F(z) \phi(z) [F(z) \phi(z)]^* \frac{dz}{z} \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F(z) F(z)^* |\phi(z)|^2 \frac{dz}{z} \end{aligned} \quad (36)$$

$$W = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} G(z)^* G(z) |\phi(z)|^2 \frac{dz}{z} \quad (37)$$

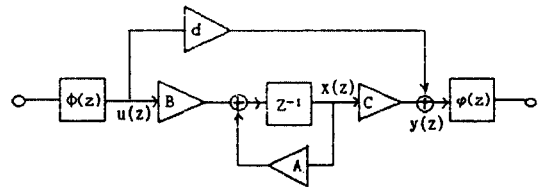


그림 4. 가중함수에 의한 디지털 필터의 모델  
Fig. 4. Model of digital filter with weighted function

그림 4 모델의 實現에 있어서, 식(34), 식(35)의 가중 상태 공간 함수  $\phi(z)$ ,  $\varphi(z)$ 는 처음의 모델과 주파수 영역에서 같은 통과대역을 갖도록 설계자가 필터의 사양에 의하여 선택한다.

이때 모델함수의 척도라 할 수 있는  $K$ 와  $W$ 를 구하기 위해 다음과 같은 Lyapunov 방정식을 이용한다.

$$\begin{bmatrix} A & BC\phi \\ 0 & A_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & BC\phi \\ 0 & A_\phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Bd\phi \\ B\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Bd\phi^{-1} & \mathbf{K} & 0 \\ B\phi & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ B_\phi C & A_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{W} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_\phi C & A_\phi \end{bmatrix} + [d_\phi C \ C_\phi] \begin{bmatrix} \mathbf{W} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

식 (38)과 (39)에서 얻어진  $\mathbf{K}$ 와  $\mathbf{W}$ 을 이용한 정칙 등가변환 행렬  $T$ 는 다음과 같은 엔코리슘으로 구할 수 있다.

$$Q = R \cdot W \cdot R^{-1} \\ U \cdot \Sigma \cdot V^T = Q \quad (\text{SVD}(Q) = U, D, V^T) \\ T = R^{-1} \cdot V \cdot \text{diag}(D) \quad (40)$$

단  $R = \mathbf{K}$ 의 상삼각행렬,  $D = \Sigma$ 은  $Q$ 의 특이값 대각행렬  $U, V^T = Q$ 의 임의행렬

식(40)의  $T$ 를 식(23) (24)과 같이 좌표 변환하면

가중을 해한 새로운 상태 공간 모델( $A_w B_w C_w d_w$ )은 다음과 같이 實現할 수 있다.

$$X'(k+1) = A_w x'(k) + B_w u(k) \quad (41)$$

$$Y(k) = C_w x'(k) + d_w u(k) \quad (42)$$

### V. 시뮬레이션 및 결과

#### V-1. 방법과 비교모델

본 논문에서 제시한 加重函數를 이용한 상태 공간 테크닉을 필터의 實現은 비교 모델과  $K$ 와  $W$ , 그리고 출력 오차 분산, 계수 양자화에 대한 주파수 특성을 비교하기 위하여 다음과 같은 4차 저역통과 필터를 모델로 선정하였다.

$$H(z) = \frac{0.00533Z^{-1} + 0.01817Z^{-2} + 0.00395Z^{-3}}{1 - 3.05920Z^{-1} + 3.8247Z^{-2} - 2.29205Z^{-3} + 0.54960Z^{-4}} \quad (43)$$

가중을 위한 상태 공간 전달함수는 다음과 같으며,  $\phi(z)$ 에 부분에 가중한다.

Table. 1. State space coefficient

	A				B		C	d
canonic al model	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0		
	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0039		
	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0182		
	-0.5496	2.2920	-3.8325	3.0592	1.0	0.0053		0.0
parallel model	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	-0.0545		
	0.6549	1.5658	0.0	0.0	1.0	0.1543		
	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0699		
	0.0	0.0	-0.8392	1.4934	1.0	-0.1190		0.0
statisti- cal model ref. 9	0.9034	0.0	0.3036	0.1697	0.2943	0.2943		
	0.0	0.6491	0.1285	0.4506	-0.2750	0.2750		
	0.3036	0.1285	0.7193	0.0	0.3741	-0.3741		
	0.1697	0.4506	0.0	0.7875	-0.1302	-0.1302		0.0
balan- ced model	0.9034	-0.3436	-0.0021	0.0318	0.2966	0.2966		
	0.3436	0.7406	-0.3615	0.0316	-0.3829	0.3829		
	0.0021	0.3615	0.6491	0.3013	0.2726	0.2726		
	0.0318	-0.0316	0.3013	0.7661	-0.1015	0.1015		0.0
weigh- ted model	0.8906	0.3323	-0.0057	0.0322	0.2773	0.3287		
	-0.3435	0.7042	0.3477	0.0202	0.4282	-0.3708		
	0.0431	-0.3838	0.6395	0.2929	0.4257	0.2998		
	0.0512	-0.0794	-0.3241	0.8248	0.2491	0.0658		0.0

$$\begin{matrix}
 3 & 1 \\
 3 & A & B \\
 1 & C & d
 \end{matrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\
 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\
 0.543463 & -1.783386 & 2.1291 & 1.0 \\
 8.69587e-2 & -0.1014112 & 0.1190183 & 0.05634
 \end{bmatrix}
 \quad (44)$$

가중형의 상태 공간 계수는 표1의 표준형에 식(44)을 가중하여 식(40)의 T에 의해 식(23) 식(24)와 같이 하면 표1과 같다.

V-2. 가제어성 Gramian K과 가관측성 Gramian W  
 표 1의 實現구조들에 대한 共分散행렬인 가제어성 gramian K와 잡음행렬인 가관측성 gramian W<sup>[5, 13]</sup>는 식(6)과 식(10)으로 구하며 표2와 같다.

식(43)에 의한 표준형, 병렬형, 통계적 감도형<sup>[9]</sup>과

Table. 2. The covariance matrix K and, Noise matrix W

canonical model K				W			
273.2332	250.6207	189.6976	108.3283	0.0585	0.1901	-0.2246	-0.0980
250.6207	273.2332	250.6209	189.6976	0.1901	0.6265	0.7509	0.3336
189.6976	250.6207	273.2332	250.6207	0.2246	-0.7509	0.9146	-0.4141
108.3283	189.6976	250.6207	273.2332	0.0980	0.3336	-0.4141	0.1937
parallel model K				W			
16.7109	15.8111	0.0000	-0.0000	0.0808	-0.1176	-0.0279	0.0138
15.8111	16.7109	0.0000	0.0000	-0.1176	0.1816	0.0569	-0.0439
4.6228	6.0326	0.4690	0.2547	0.0279	0.0569	0.0760	0.0745
1.8411	4.6228	0.2547	0.2639	0.0138	-0.0439	0.0745	0.1010
statistical <sup>[9]</sup> K				W			
0.8903	-0.0049	0.0000	-0.0000	0.8903	-0.0049	-0.0000	0.0000
-0.0049	0.2877	0.0000	0.0000	-0.0049	0.2877	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.4690	0.2547	0.0000	-0.0000	0.4690	0.2547
-0.0000	0.0000	0.2547	0.2639	0.0000	0.0000	0.2547	0.2639
balanced model K				W			
0.8904	0.0000	0.0000	0.0000	0.8904	0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	0.6411	0.0000	0.0000	0.0000	0.6411	0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	0.2876	0.0000	0.0000	0.0000	0.2876	0.0000
0.0000	-0.0000	0.0000	0.0918	0.0000	0.0000	0.0000	0.0918
weighted model K				W			
0.9677	0.0582	-0.0035	-0.0047	0.8154	0.0000	0.0000	-0.0000
0.0582	0.7998	0.1635	0.0489	0.0000	0.5080	0.0000	0.0000
-0.0035	-0.1635	0.4638	0.0489	0.0000	-0.0000	0.1905	0.0000
-0.0047	0.0489	0.1287	0.1636	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0679

V-3. 주파수 應答과 출력 오차 分散

표 1의 모델에 따른 상태 공간계수 행렬 SSDF (ABCd) 내부에서의 승산 결과를 반올림함에 따라 발생하는 출력 오차 分散을 계산하기 위하여 그림5와 같이 입력u(k)를 평균 0, 分散 1인 정규 난수를 사용하였으며 4-bit에서 12bit까지 양자화 했을때 나타나는 출력 오차 分散을 (dB)로 계산하면 표3과 같으며 어장 비트별 주파수 응답은 표준형은 그림 6(a)에 가

중형은 그림 6(b)에 나타내었다.

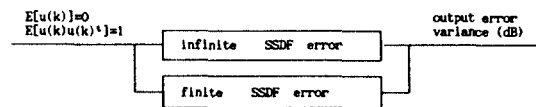
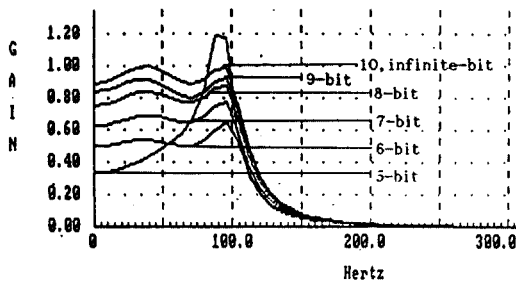


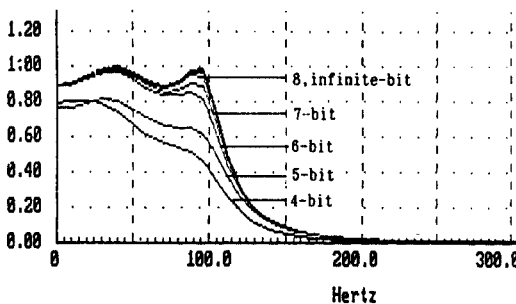
그림 5. 출력 오차 分散 시뮬레이션을 위한 블록 다이어그램  
 Fig. 5. Block diagram for the output error variance simulation

Table 3. The variance value of output error [dB]

	canonical	parallel	statist.	balanced	weighted
4bit	-2.092	-1.906	-11.169	-12.489	-18.738
5bit	-2.092	-8.740	-15.995	-16.237	-18.045
6bit	-6.243	-22.514	-19.275	-20.200	-34.522
7bit	-9.292	-28.272	-28.077	-26.849	-39.437
8bit	-12.688	-46.820	-37.825	-35.855	-46.113
9bit	-18.367	-43.532	-38.701	-40.356	-50.689
10bit	-26.903	-39.925	51.564	-53.531	56.384
11bit	-35.550	-65.078	-56.627	60.261	-61.631
12bit	-38.024	-66.186	-63.665	-61.617	-68.6937



(a) 표준 實現  
(a) Canonical realization



(b) 가중 함수 實現  
(b) Weighted function realization

그림 6. SSDF의 상태계수 양자화에 따른 주파수 응답 곡선  
Fig. 6. Frequency response curve for the state-space coefficient quantization of SSDF(A B C d)

이상의 결과에서 그림 6의 (a)와 (b)같이 표준형과 가중형의 양자화에 따른 주파수 특성 응답을 비교

하여 보면 유한 비트에서 가중형이 더 좋은 결과를 보이고 있으며 표2의共分散 행렬과 잡음행렬, 그리고 표3의 출력 오차 分散은 본 논문에서 제안한 가중형이 좋은 결과를 나타내고 있다.

이상의 결과에서 그림 6의 (a)와 (b)같이 표준형과 가중형의 양자화에 따른 주파수 특성 응답을 비교하여 보면 유한 비트에서 가중형이 더 좋은 결과를 보이고 있으며 표 2의共分散 행렬과 잡음행렬, 그리고 표 3의 출력 오차 分散은 본 논문에서 제안한 가중형이 좋은 결과를 나타내고 있다.

## VI. 결 론

본 논문에서 디지털 필터 實現시 문제가 되는 계수 변동에 따른 출력 오차 分散을 줄이는 방법으로 加重 函數을 사용하여 출력오차의 감도를 줄이는 방법에 대하여 연구하였다.

이 알고리즘은 상태 방정식의 계수에 가중을 주는 것으로 加重 函數에 의해서 가제어성과 가관측성 그 래미안이 변화되므로 감도에 변화를 주게 되며,共分散 및 잡음행렬 그리고 출력 오차 分散값이 가제어성과 가관측성에 의해서 변화됨을 알 수 있었다.

또 가중된  $K$ 와  $W$ 은 고유값이 불변이며 대각화 할 수 있는 좌표변환 정칙행렬  $T$ 를 선택하여 가중형 SSDF( $A_w, B_w, C_w, d_w$ )을 實現할 수 있다.

제안된 알고리즘은 시뮬레이션을 통하여 표준형과 가중형의 양자화에 따른 주파수특성을 비교하였고, 각 model에 대한共分散 행렬과 잡음 행렬 그리고 출력 오차 分散을 비교해본 결과 그것들이 적게 발생할



을 알 수 있었다.

이상의 결과로 본 알고리즘의 타당성을 확인 할 수 있었고 차후에 시간영역 및 최적 加重函數 선택방법에 대해서도 연구하자 한다.

### 참 고 문 헌

1. S.Y.Hwang, "Roundoff Noise in State-Space Digital Filter: A General Analysis," IEEE Trans. on ASSP, pp.256-262, June, 1976.
2. C.T.Mullis, R.A.Roberts, "Synthesis of Minimum Roundoff Noise Fixed Point Digital Filters," IEEE Trans. vol. CAS-23, pp.555-562, no.9,1976.
3. Y.Inouye, "Generation of a Time Series Having a Specified Power Spectrum with Minimum Roundoff Noise," IEEE Trans. vol. ASSP-37, pp.496-504, no.4,1980.
4. G.Amit and U.Shaked, "Small Roundoff Noise Realization of Fixed-Point Digital Filters and Controllers," IEEE Trans.vol.ASSP-36, pp. 880-890, no.6,1988.
5. M.Iwatsuki, M.Kawamata, T.Higuchi, "Statistical Sensitivity and Minimum Sensitivity Structures with Fewer Coefficients in Discrete Time Linear Systems," IEEE Trans. vol. CAS-37, pp.72-80, no.1,1989.
6. J.H.F.Ritzerfeld, "A Condition for the Overflow Stability of Second-Order Digital Filters that is Satisfied by All Scaled State-Space Structures Using Saturation," IEEE Trans. vol.CAS-36, pp.1049-1057, no.8,1989.
7. B.W.Bomar, J.C.Hung, "Minimum Roundoff Noise Digital Filters with Some Power of-Two Coefficients," IEEE Trans. vol. CAS-36, pp. 833-840, no.10,1984.
8. Lawrence H. Goldstein: "Controllability / Observability Analysis of Digital Circuits" IEEE. Vol.cas-26, pp.685-693, no.9, 1979.
9. M.Kawamata, M.Iwatsuki, T.Higuchi, "Balanced Realizations as Minimum sensitivity Structures in Linear Systems" 日本計測自動制御學會誌, vol.21,pp.900-906, no.9,1985.
10. V.Tavsanoglu, L.Thiele, "Optimal Design of State-Space Digital Filters by Simultaneous Minimization of Sensitivity of Roundoff Noise," IEEE. Trans. vol. CAS-31, pp.884-888, no.10,1984.
11. S.Y.Hwang, "Minimum Uncorrelated Unit Noise in State-Space Digital Filtering," IEEE Trans. vol.ASSP-25, pp.273-281, no.4,1977.
12. B.C.Kuo, "Digital Control Systems" HRW, pp.421-451, 1980.
13. R.A.Roberts, C.T.Mullis, "Digital Signal Processing," Addison Wesley, pp.316-321, 377-384, 1987.
14. Bruce C.Moore: "Principal Component Analysis in Linear systems:Controllability, Observability, and Model Reduction" IEEE Trans. Vol. Ac-26, pp.17-32, no.1, 1981.
15. T.Hinamoto, M.Nouri-Shinazi, R.Yamaguchi, "Minimization of Sensitivities with Frequency Weighting Functions for MIMO State-Space Digital Filter, 日本電子通信學會誌," vol. J73-A, pp.1058-1065, no.6,1990.
16. T.Higuchi, "Digital 信號處理의 基初" 昭濶堂, pp.53-135, 1986.
17. 김정화, 정찬수, "加重函數에 의한 최소오차분산을 갖는 이산 시간 선형 시스템," 한국통신학회 91년 춘계종합학술발표논문집, 제10권 1호, pp. 76-80, 1991.

金正和(Chung Hwa Kim)

- 朝鮮大學校 工科大學 電子工學科 卒業
- 朝鮮大學校 大學院(工學碩士)
- 崇實大學校 大學院(工學博士92/2 豫定)
- 現在: 朝鮮大學校 電子工學科 助教授 在職

正會員

鄭讚壽(Chan Soo Chung)

- 서울大學校 工科大學 電氣工學科 卒業
- 서울大學校 大學院(工學碩士)
- 서울大學校 大學院(工學博士)
- 現在: 崇實大學校 電氣工學科 教授 在職

正會員