

## 로봇트 매니플레이터에 대한 비선형 제어

正會員 李 鍾 龍\* 正會員 李 相 孝\*

## Nonlinear Control for A Robot Manipulator

Jong Yong Lee\*, Sang Hyo Lee\* *Regular Members*

### 요 약

본 논문은 제어 입력  $u(t)$ 에 대하여 비선형 결합된 3차 미분 방정식으로 표현되는 조작기를 갖는 로봇트 매니플레이터에 대하여 제어기의 설계에 관한 논문이다.

제어 방식은 두 단계로 구성되며, 첫째 단계로는 비결합된 제어가 가능한 선형 계통을 얻기 위하여 대역적(global) 선형화를 수행하며, 둘째 단계로는 선형화 계통에 대하여, 모델의 불확실성이 존재하는 경우에도 강건성과 안정도를 보장하도록 Lyapunov 방정식과 전체 안정도 이론을 적용하여 제어기를 설계한다.

제안된 제어기를 조작기가 포함된 자유도가 3인 로봇트 매니플레이터에 대하여 컴퓨터 시뮬레이션을 하였다.

### ABSTRACT

This paper deals with a robot manipulator having actuator which is described by equation  $D(q)\ddot{q} = u - P(q, \dot{q}, \ddot{q})$  where  $u(t)$  is a control input. We employ two steps of controller design procedures. First, a global linearization is performed to yield a decoupled controllable linear system. Then a controller is designed for this linear system.

We provide a rigorous analysis of the effect of uncertainty of the dynamics, which we study using robustness results in time domain based on a Lyapunov equation and the total stability theorem. Using this approach we simulate the performance of controller of a robot manipulator.

### I. 서 론

로봇트 매니플레이터 제어와 관련하여 대부분의 경우 강체 로봇트 매니플레이터의 동특성 모델을 기초로 하였으며, 얻어진 동특성 운동 방정식은 밀접한

결합을 갖는 비선형 미분 방정식으로 표현 되었다.

이러한 동특성 모델에는 조작기(actuator)의 동특성 모델이 포함되어 있지 않다. 그러나 조작기의 동특성은 빠른 속도와 부하가 심하게 변화하는 경우에는 로봇트 동특성의 중요한 역할을 한다는 것을 Goor<sup>[1]</sup>가 지적하였다.

제어기 설계에서는 초기값에 대하여 선형화된 간단한 로봇트 동특성 모델을 기초로 제어기를 설계 하

\*光云大學校 電子工學科  
Dept. of Electronics, Kwangwoon University  
論文番號 : 92 - 132 (接受1992. 1. 15)

였으며, 로봇트 조작기의 동특성이 포함되는 로봇트 동특성 모델인 3차 결합 비선형 미분 방정식을 무시하였다.

또한 Guez<sup>[2]</sup>는 조작기 동특성이 포함된 로봇트 모델의 비선형 케환 선형화와 비결합을 고려 하였다. 이 방법은 일반적인 방법론의 제시가 없으며, 계통 출력의 정확한 표현이 이루어지지 않았다. Beckman과 Lee<sup>[3]</sup>는 이와같은 모델에 Freund의 비선형 제어 방법<sup>[3]</sup>을 기초하여 제어를 설계 하였으며, 계통의 출력은 로봇트 관절 위치를 선택하였으나, 제안된 제어가 복잡하다는 단점을 갖고있다.

본 논문에서는 3차의 로봇트 동특성 방정식을 얻기 위하여 로봇트 운동 방정식과 로봇트 조작기 동특성 모델을 결합하였다.

선형화된 모델에 대한 계통의 안정성을 얻기 위하여 극점 배치법을 적용하며, 모델의 구조적 오차에 대하여 강건성을 부여 하도록 제어를 설계하였다.

## II. Robot 모델의 3차 동특성 방정식 유도

여기서 로봇트 매니플레이터는 아마추어(Armature)제어 직류 전동기에 의해 구동 된다고 하자.

아마추어 전압을 입력으로 관절의 위치 변수를 상태 변수로 하여 전동기의 동특성 방정식을 표현한다. 표현을 간략하게 하기위하여 시간의 함수는 생략하였다. 먼저 i번째 전동기의 아마추어 회로는 그림 1과 같다.

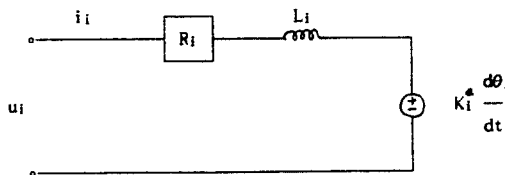


그림 1. i번째 전동기의 아마추어 회로  
Fig 1. The armature circuit of i-th moter

여기서, 변수의 정의는 아래와 같다.  
 $\theta_i$  = 로터(Rotor)의 각 위치  
 $R_i, L_i$  = 아마추어 회로의 저항과 인덕턴스  
 $i$  = 아마추어 회로의 전류  
 $K_i^e$  = 전동기의 전압 상수(Back EMF)

$u_i$  = 아마추어 입력 전압  
 이 회로의 전압 방정식은 식(2-1)과 같으며, i번째 관절의 위치 변수를  $q_i$ 라 하자.

$$R_i i_i + L_i \frac{di_i}{dt} + K_i^e \frac{d\theta_i}{dt} = u_i \quad (2-1)$$

$$\theta_i = N_i q_i, \quad i=1, \dots, n$$

여기서,  $N_i$ 는 i번째 관절의 기어비(Gear Ratio)이며,  $n$ 은 관절의 수이다.  
 전동기의 출력 토크가 아마추어 전류에 비례하기 때문에 i번째 관절 토크  $T_i$ 는 다음과 같다.

$$T_i = N_i K_i^T i_i, \quad i=1, \dots, n \quad (2-2)$$

여기서,  $K_i^T$ 는 i번째 전동기의 토크 상수이다.  
 다음으로 강체 로봇트 매니플레이터의 동특성은 2차의 미분 방정식으로 다음과 같다.

$$\sum_{j=1}^n D_{ij}(q) \ddot{q}_j + I_{ai} \ddot{q}_i + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n D_{ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k + D_i = T_i \quad (2-3)$$

( $i=1, \dots, n$ ) ( $j=1, \dots, n$ ) ( $k=1, \dots, n$ )

- 여기서,  
 $q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i$  : 관절 i에서의 위치, 속도, 가속도  
 $T_i$  : 관절 i에 작용하는 토크  
 $D_{ij}$  : 관절에 작용하는 관성요소  
 $I_{ai}$  : 관절 i의 Reflected 아마추어 관성  
 $D_{ijk}$  : 원심력과 콜리올리스력의 계수  
 $D_i$  : 중력항

식(2-1)과 식(2-3)을 결합하여 매니플레이터의 링크(Link)와 조작기가 포함되는 매니플레이터의 전체 동특성 방정식이 얻어진다.

$q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T, \dot{q} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n]^T, \ddot{q}_i = [\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \dots, \ddot{q}_n]^T$ 로 벡터 형태로 고려하면 다음과 같은 간략한 표현을 얻는다.

$$D(q)\ddot{q} + P(q, \dot{q}, \ddot{q}) = u$$

여기서,  $u = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{L_1}{N_1 K_1^T}, \dots, 0 \\ 0, \dots, 0 \\ \vdots \\ 0, \dots, \frac{L_n}{N_n K_n^T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} + I_{a1}, \dots, D_{1n} \\ D_{21}, \dots, D_{2n} \\ \vdots \\ D_{n1}, \dots, D_{nn} + I_{nn} \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix}$$

$$P_i = \frac{L_i}{N_i K_i T} \left[ \sum_{j=1}^n D_{ij} \ddot{q}_j + I_{ii} \ddot{q}_i + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n D_{ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k + D_i \right] + \frac{L_i}{N_i K_i T} \left[ \sum_{j=1}^n \dot{D}_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \{ \dot{D}_{ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k + 2D_{ijk} \ddot{q}_j \dot{q}_k \} + \dot{D}_i \right] + K_i N_i T \dot{q}_i$$

위의 식 (2-4)는 계통의 입력이 전압인 비선형 결합된 3차의 미분 방정식이다.

본 논문에서는 위의 식(2-4)에 미분 기하학(differential geometric)을 적용하여 비결합 선형화된 방정식을 얻는다.

### III. 계통의 선형화

조작기의 모델이 포함된 매니플레이터의 동특성 방정식은 매우 복잡하며 비선형 특성때문에 제어를 직접 설계하는 것은 매우 어렵다.

본 논문에서는 비선형 궤환과 상태 변환을 이용하여 비선형 제어 문제를 선형제어 문제로 변환한다.

식(2-4)으로 부터 아래와 같이 상태를 정의하면 다음과 같은 상태 방정식을 얻는다. 여기서, 행렬과 벡터의 transpose는 윗 첨자 T를 사용한다.

$$x_1 = q, x_2 = \dot{q}, x_3 = \ddot{q}$$

$$x = [x_1, x_2, x_3]^T \tag{3-1}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ D^{-1}P(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ D^{-1}(x_1) \end{bmatrix} u$$

$$= f(x) + g(x)u \tag{3-2}$$

출력 방정식은 로보트 매니플레이터가 완벽한 kinematic 모델이라고 가정하여 아래와 같다.

$$y = h(x_1) = \begin{bmatrix} h_1(x_1) \\ \vdots \\ h_n(x_1) \end{bmatrix} \tag{3-3}$$

식(3-2)와 식(3-3)에 대한 비선형 궤환 변환 T(x)가 존재하기 위한 Su, Meyer and Hunt<sup>[4]</sup>의 필요 충분조건을 이용하여 등가의 Brunovsky 정준형의 선형 계통을 얻는다.

$$\dot{z} = Az + Bv$$

$$y = Cz \tag{3-4}$$

여기서,  $A = \begin{bmatrix} A_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A_n \end{bmatrix}$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & B_n \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} C_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & C_n \end{bmatrix}$$

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_i = [1 \ 0 \ 0]$$

i = 1, 2, ..., n

T(x)는 다음과 같다.

$$z = [z_1, z_2, z_3]^T \tag{3-5}$$

$$z_1 = T_1(q) = h(q) = T_1(x_1) = h(x_1)$$

$$z_2 = T_2(q, \dot{q}) = \left( \frac{\partial T_1}{\partial q} \right) q = \left( \frac{\partial T_1}{\partial x_1} \right) x_2$$

$$z_3 = T_3(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \left( \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}} \right) \dot{q} = (2)(x_2)^2 + \left( \frac{\partial T_1}{\partial x_1} \right) x_3$$

이와 같이 변환 T<sub>i</sub>의 선택은 제어를 설계하는데 매우 중요하며, 연산 과정을 간단히 하여야 할 필요가 있다. 그러므로 본 논문에서는 로보트 매니플레이터에 대한 오차 방정식을 아래와 같이 고려한다. 먼저 오차를 다음과 같이 정의하자. 여기서, q<sub>d</sub>,  $\dot{q}_d$ ,  $\ddot{q}_d$ , (x<sub>d1</sub>, x<sub>d2</sub>, x<sub>d3</sub>)는 규정된 위치, 속도, 가속도를 나타낸다. 간략히 표현하기 위하여 괄호안의 변수는 생략하였다.

$$e_1 = e = q = x_{d1} - x_1$$

$$e_2 = \dot{e}_1 = x_{d2} - x_2$$

$$e_3 = \ddot{e}_2 = x_{d3} - x_3 \tag{3-6}$$

이때 오차 상태 방정식은 아래와 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ D^{-1}P + \ddot{q}_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -D^{-1} \end{bmatrix} u \tag{3-7}$$

위의 식(3-7)에 선형화 상태 궤환 변환, T<sub>1</sub>(x) = q<sub>d</sub> - q = x<sub>d1</sub> - x<sub>1</sub>을 적용하면 아래와 같다.

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} v = Ae + Bv \tag{3-8}$$

여기서, 1는 3×3의 단위 행렬이며, 외부 입력 v는 다음과 같다.

$$v = D^{-1}P - D^{-1}u + \ddot{q}_d \quad (3-9)$$

즉, 비선형 제어 계통은 제어가능한 비결합 선형 계통으로 표현된다.

식(3-9)는 입력 변환으로 1-1 대응 관계이며 D의 역행렬을 요구하지 않는 입력 u로 표현될 수 있다.

원래의 비선형 계통의 제어문제는 식(3-8)으로 표현된 제어가능한 비결합선형 계통 식(3-8)에 대한 안정한 제어를 설계하는 문제로 요약된다.

#### IV. 안정한 제어기 설계

식(3-8)으로 표현된 계통은 원점에 다중 극점을 갖고 있는 형태이므로 극점 지정을 통하여 전체 계통의 안정을 얻는다.

원하는 폐경로 계통을 다음과 같이 고려하자.

$$e = A_c e \quad (4-1)$$

그리고 식(3-8)의 입력 v를 다음과 같이 고려하자.

$$v = -ke \quad (4-2)$$

식(4-2)를 식(3-8)에 대입하고, 식(4-1)과 등가로 고려하면,

$$A_c = A - Bk = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 \end{bmatrix}$$

여기서, k<sub>1</sub>, k<sub>2</sub>, k<sub>3</sub>는 3×3의 대각 행렬이다.

그리고 A<sub>c</sub>의 원하는 고유치를 μ<sub>1</sub>, μ<sub>2</sub>, ..., μ<sub>m</sub>이라 하고, E, F, G를 다음과 같은 행렬로 정의 하자.

$$E = \text{diag}(\mu_i), F = \text{diag}(\mu_i + \alpha), G = \text{diag}(\mu_i + \omega) \quad (4-3)$$

i = 1, 2, ..., n

그러면 A<sub>c</sub>의 고유치와 제환 이득 k<sub>i</sub>의 관계는 아래의 정리로 요약된다.

##### 정리 4.1

이득 k = [k<sub>1</sub>, k<sub>2</sub>, k<sub>3</sub>]는 식(3-8)의 극점 지정을 위해 사용되며, 대각 행렬로서 다음과 같이 주어진다.

$$k_1 = -EFG$$

$$k_2 = EF + EG + FG$$

$$k_3 = -(E + F + G) \quad (4-4)$$

<증명>

식(3-8)과 식(4-2)을 결합한 특성 다항식과 식(4-1)의 특성 다항식을 고려하면, (1는 n×n의 단위 행렬이다.)

$$\begin{aligned} \det(sI - A_c) &= \det[(sI - E)(sI - F)(sI - G)] \\ &= \det[s^3 - (E + F + G)s^2 + \\ &\quad (EF + EG + FG)s - EFG] \\ &= \det[s^3 + k_3s^2 + k_2s + k_1] \end{aligned}$$

위의 전개된 식을 등가로 고려하면 식(4-4)를 얻는다.

Q.E.E.

결과적으로 얻어진 비선형 제환칙은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u &= D(\ddot{q}_d + k_c) + P \\ D\ddot{q}_d + D[-EFG, EF + EG + FG, -(E + F + G)]^T u &+ P \end{aligned} \quad (4-5)$$

그러나 실제 식(2-4)은 D(q), P(q, q̇, q̈)에는 모델에 대한 불확실성이 포함되어 있다. 이러한 불확실성을 구조적 불확실성(Structural Uncertainty)으로 고려할 수 있다.

비선형 계통에 대한 개선된 제어를 다음과 같다고 하자.

$$u_c = D_c(\ddot{q}_d - v) + P_c \quad (4-6)$$

여기서, D<sub>c</sub>, P<sub>c</sub>는 각각, D, P에 대한 추정된 값이다.

식(4-2)에서 주어진 입력을 이용하면 아래와 같다.

$$u_c = D_c(\ddot{q}_d + ke) + P_c \quad (4-7)$$

위의 식을 식(3-8)에 입력 v에 대한 v<sub>c</sub>를 고려하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} v_c &= \ddot{q}_d + D^{-1}P - D^{-1}u_c \\ &= \Delta\ddot{q}_d + \delta + (\Delta - I)ke \end{aligned} \quad (4-8)$$

여기서, Δ = (I - D<sup>-1</sup>D<sub>c</sub>), δ = D<sup>-1</sup>(P - P<sub>c</sub>)

결과적으로 다음과 같은 계통의 안정도를 고려하게 된다.

$$\begin{aligned} \dot{e} &= A_c e + B v_c \\ &= (A - Bk + B\Delta k)e + B(\Delta q_d + \delta) \\ &= (A_c + B\Delta k)e + B(\Delta q_d + \delta) \end{aligned} \quad (4-9)$$

$$= A'e + Bw$$

$$A' = (A_c + B\Delta k) \quad , \quad w = (\Delta q_i + \delta)$$

즉, 위의 식(4-9)이 안정하도록  $\Delta$ 와  $\delta$ 에 대한 유계(bounded)를 발견하는 문제이다. 먼저  $A'$ 에 대한 점근적 안정을 얻기 위하여 Lyapunov 함수를 이용하자.  $A'$  행렬의  $B\Delta k$ 를  $H$ 라 하면, 다음과 같다.

$$H = B\Delta k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ H_1 & & H_3 \end{bmatrix} \quad (4-10)$$

여기서,  $H_i = \Delta k_i$  ,  $i=1,2,3$   
또한  $H$ 행렬의  $(i, j)$ 번째 요소를  $H_{ij}$ 라 하고, 다음과 같이 두자.

$$H_{ij} \leq |H_{ij}|_{\max} \equiv \epsilon = \max \epsilon_n \quad (4-11)$$

그리고  $D_c$ 와  $P_c$ 의 정확도와  $A_c$ 의 안정도 상호간 합의점(Trade off)에 의해 선택되는 매개변수로  $a$ 를 선택하며, 이때  $A_c$ 는 안정도 여유가  $-a$ 가 되도록  $k$ 를 선택 한다고 하자.

**정리 4. 2**

$(A_c + aI)$ 는 점근적 안정이라고 하자. 이때 Lyapunov 방정식  $P$ 의 해는 아래와 같다.

$$(A_c + aI)^T + P(A_c - aI) + 2I = 0 \quad (4-12)$$

여기서,  $P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ P_2 & P_4 & P_5 \\ P_3 & P_5 & P_6 \end{bmatrix}$   $P_i$ 는 대각 요소 행렬  $i=1,2,\dots,6$

또한  $P_i$ 는  $k_1, k_2, k_3$ 와  $a$ 의 함수로 표현된다.

**<증명>**

식(4-1)의  $A_c$ 와 양의 대칭 행렬  $P$ 를 이용하여, 식(4-12)에 대입하면, 아래와 같은 등식을 얻는다.

$$\begin{aligned} -P_2aI - P_5k_1 + P_1 - P_2aI - k_2P_3 &= 0 \\ P_2 - P_3(k_3 + aI) - P_3aI - P_6k_1 &= 0 \\ r_1 - P_5aI - P_6aI + P_4 - P_5(k_3 + aI) &= 0 \\ P_2 - P_4aI - P_5k_2 &= -I \\ P_5 - P_6(k_3 + aI) &= -I \end{aligned}$$

위의 방정식으로 부터  $P_i (i=1,2,\dots,6)$  구하면,

$$\begin{aligned} P_6 &= [-B + (1 + (k_3 + 3aI)A^{-1})c^{-1}] \\ P_5 &= [(C + (k_3 + aI))P_6 - I - (k_3 + 3aI)A^{-1}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_1 &= [(k_1 + 2aI) - k_1aI - (k_3 + 2aI)A]P_5 - \\ &\quad (2k_1I + k_2A)P_6 + I]A^{-1} \\ P_3 &= (k_2 + 2aI)P_5 + k_2P_6 - P_1 \\ P_2 &= (k_3 + 2aI)P_3 + k_1P_6 \\ P_1 &= 2aIP_2 + k_2P_3 + k_1P_5 \end{aligned}$$

여기서,  $A, B, C$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} A &= k_1 + k_2aI + 2(k_3 + 2aI)a^2I \\ B &= -[k_1aI + (k_3 + 2aI)A](k_3 + 3aI)A^{-1} - k_2 \\ &\quad + (k_3 + 2aI)^2 \\ C &= -(k_3 + aI) - [k_1 + k_2(k_3 + 2aI) - (k_3 + 3aI) \\ &\quad A^{-1}(2k_1a^2I + k_2A)] \end{aligned}$$

위의  $P_i$ 는 식(4-12)을 만족하는 해이며,  $P_i$ 는  $k_1, k_2, k_3, a$ 의 함수이다.

Q.E.E.

위의 정리로  $(A_c - aI)$ 는 점근적 안정이므로, Lyapunov 방정식(4-12)는 유일한 해를 갖는다.

다음으로  $D_c$ 의 정확도와 합의점에 의해 선택되는 양의 설계 매개변수  $b$ 를 선택하여  $A' = (A_c + H)$ 의 고유치가  $-b$  좌측에 있도록  $\Delta$ 의 조건을 살펴보자.

여기서 다음과 같이 정의하자.

$$\epsilon \equiv \max_i [ \max_j |H_{ij} + (a - b)| ] \quad (4-13)$$

또한  $a > b$ 이고  $A_c$ 의 모든 고유치가  $-a$ 보다 작은 실수부를 가지며, 다음조건을 만족하면, 고유치는  $-b$ 보다 작은 실수부를 갖는다.

$$\text{조건 1 : } \epsilon < (S_{\max}(P_m U))^{-1} \equiv \frac{1}{s} \quad ; s \text{는 양의 실수}$$

$$(4-14)$$

여기서,  $S_{\max}(\cdot) = (\cdot)$ 의 최대 특이값(Singular Value),  $P_m$ 은 식(4-12)의 해  $P$ 와  $P_{mij} = |P_{ij}|$ 에 의해 주어진 원소 행렬이고,  $U$ 는  $H_{ij} = 0$ 이면 0이고, 그렇지 않으면 1인 행렬이며,  $(P_m U)$ 는  $P_m U$ 의 대칭 부분을 나타낸다.

조건 1을 만족하면  $\dot{e} = A'e$ 인 천이행렬  $\phi(t, 0)$ 을 유계 시킨다.

$$\|\phi(t, 0)\| \leq \sigma \exp(-at) \quad (4-15)$$

여기서,  $\sigma \geq 1$

$$a \equiv -(3n\sigma\epsilon + |a - b|\sigma + \mu) > 0$$

$$\mu \equiv A_c \text{의 고유치의 최대 실수부, } \mu < -a$$

다음으로 식(4-9)의  $w$ 가 영이 아닐때 오차가 유계됨을 살펴보자.

아래와 같은 부가적인 가정을 하자.

조건 2 : 어떤 양수 L과  $\|e(t)\| < r$  일때

$$\|Bw(e(t))\| \leq Lr \quad (4-16)$$

조건 2는 계통 안정을 위하여 w에 대한 크기의 상계를 주는 조건이다.

**정리 4.3**

만약  $\|e(0)\| < r/\sigma$ , ( $L\sigma/\alpha < 1$ 이면, 이때 식(3-9)은 유일해  $e(t)$ 가 존재한다. 게다가  $t \geq 0$ 에 대하여 오차는 유계된다.

또한  $\|Bw(e(t))\| \leq L\|e\|$ 가 성립하므로, 위의 조건으로

$$\|e(t)\| \leq \sigma \text{Exp}\{-\alpha t\} \|e(0)\|, \alpha \equiv (3n\epsilon + L)\sigma + \mu \quad (4-18)$$

**<증명>**

조건 1로 부터

먼저 외란 w가 없는 식(4-9)과 식(4-13)을 고려하여 다음의 Lyapunov 함수를 고려하자.

$$V(x) = e^T P e > 0 \quad (4-19)$$

여기서, P는 식(4-12)에 의해 얻어진 해이다. 식(4-19)를 시간에 대하여 미분하면,

$$\dot{V}(x) = -e^T(2I)e + e^T(H^T P + P H)e \quad (4-20)$$

또한 조건으로 부터  $\epsilon' < 1/s$ 이므로

$$\epsilon S_{\max}(P_m U) < 1$$

$$\epsilon S_{\max}(P_m \Delta) < 1$$

$$S_{\max}(|PH|_s) < 1$$

$$S_{\max}(PH) < 1$$

$$|\lambda(PH)|_{\max} < 1$$

$$\lambda[(PH)_s - 1] < 0$$

$\therefore [-I + (PH)_s]$ 는 negative definite이다.

$[-2I + H^T P + P H]$ 는 negative definite이다.

그러므로 식(4-20)은 모든 e에 대하여 negative definite이다.

$\therefore (A_c + H)$ 는 점근적으로 안정이다.

조건 2로 부터

$A' = A_c + H(t)$ 는 각각  $A_c$ 와  $A'$ 이 점근적 안정이며, 또한 각각  $-a$ ,  $-b$ 좌반면에 고유치를 갖으므로 다음식이 성립한다.

$$\|\text{Exp}(A_c t)\| \leq \sigma \text{Exp}(\mu t)$$

이때  $\dot{e} = A'e$ 의 해는 다음과 같다.

$$e \text{Exp}(-A_c t) \Big|_{t=0}^{t=\theta} = \int_0^\theta \text{Exp}[-A_c \theta]$$

$$e(t) = \text{Exp}(A_c t) e(0) + \int_0^t \text{Exp}[A_c(t-\theta)] [H(\theta) + |a-b| I - |a-b| I] e(\theta) d\theta \quad (4-21)$$

여기서,

$|H(\theta) + |a-b|| \leq \epsilon$ 이므로 행렬 norm의 정의에 의해  $\|H(\theta) + |a-b|\| \leq 3n\epsilon$

이 성립한다. 그러므로 위식(4-21)은 다음과 같다.

$$\|e(t)\| \leq \sigma \text{Exp}(\mu t) \|e(0)\| + t \sigma \text{Exp}[\mu(t-\theta)] [3n\epsilon + |a-b|] \|e(\theta)\| d\theta \quad (4-22)$$

식(4-22)에 대하여 Bellmann-Gronwall 정리를 적용하면,

$$\|e(t)\| \leq \sigma \|e(0)\| \text{Exp}[3n\sigma\epsilon + |a-b|\sigma]t \quad (4-23)$$

또한, 천이 행렬을  $\phi(t, 0) \equiv \text{Exp}[(\epsilon n \sigma \epsilon + |a-b|\sigma)t]$ 라 정의하면, 식(4-15)의 조건은 성립한다.

그리고  $\|e(0)\| < r\sigma$ , ( $L\sigma/\alpha < 1$ )이 성립하고,  $\|e(t)\| \leq r$ 이면, 식(4-9)의 유일해가 존재하며, 전체 안정도 이론<sup>11)</sup>에 의하여 식(4-17)과 식(4-18)이 성립한다.

Q.E.E.

그러므로  $e(t)$ 는 만약  $\alpha > 0$ 이면 점근적 안정이다. 위의 정리는 오차 유계에 대한 보장과 오차가 점근적으로 수렴한다는 것을 보장한다.

결과적으로 만약 k가 식(4-2)을 만족 이상적인 폐경로 계통 (4-1)의 안정도 여유  $-a$ 를 보장하고, 계산된 제어값 대신에 식(4-6)이 사용될때, 실제 폐경로 모델 식(4-9)는 D가 식(3-14)를 만족하는 경우는 안정도 여유  $-b$ 를 갖으며, P가 식(4-16)과 정리 2.3의 조건을 만족하면 (4-9)로 주어지는 오차는 유계된다. 또한 P가 식(4-18)을 만족하면 오차의 유계는 개선된다.

**V. 시뮬레이션 및 고찰**

본 논문에서는 아래와 같은 집중질량의 자유도가 3인 로봇 매니퓰레이터를 고려 하였다.

여기서  $L_2, L_3, m_2, m_3$ 는 각 링크의 길이와 질량이며 다음과 같이 고려하였다.

$$L_2 = L_3 = 0.5m, m_2 = 10kg, m_3 = 8kg.$$

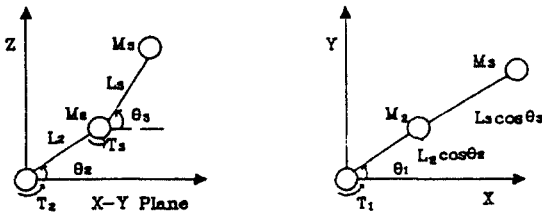


그림 2. 로봇트 매니플레이터의 모델  
Fig 2. The model of robot manipulator

그리고, 부하는 링크3의 맨 끝에 존재 한다고 가정하였다.

각 관절을 구동시키는 조작기의 매개변수는 아래와 같다.

$$R_i = 1.6 \Omega \quad L_i = 0.0048 \text{ ohms-s}$$

$$K_i^v = 0.19 \text{ v / rad / sec}, K_i^T = 37.00, (i = 1, 2, 3)$$

$$N_1 = 62.55, N_2 = 107.81 \text{m}, N_3 = 53.65$$

주어진 궤적 계획은 아래와 같다.

$$q(t) = q_i + (q_f - q_i) \frac{t}{2} - (q_f - q_i) \sin(\pi t) / 2$$

$$\dot{q}(t) = (q_f - q_i) / 2 - (q_f - q_i) \cos(\pi t) / 2$$

$$\ddot{q}(t) = \pi (q_f - q_i) \sin(\pi t) / 2$$

$$\ddot{q}(t) = \pi^2 (q_f - q_i) \cos(\pi t) / 2$$

시뮬레이션에서 초기위치  $q_i(0, 1, 0.1) \text{rad}$ 에서 최종 위치  $q_f(1.2, -0.5, 1.6) \text{rad}$ 으로 설정 하였으며 샘플링 시간은 0.01초로 2초 동안 수행 하도록 하였다. 또한 실제모델과 계산된 모델 사이의 매개변수 오차를 5%

로 고려 하였으며  $K_1 = (1000, 1000, 1000)$ ,  $K_2 = (300, 300, 300)$ ,  $K_3 = (10, 10, 10)$ 으로 이득을 고려하였다. 본 논문에서 고려된 로봇트 매니플레이터의 전체 블록 선도는 그림 3과 같다.

각 관절에 대한 오차는 무부하시 그림 4, 5, 6에 있으며, 부하가 존재하는 경우는 그림 7, 8, 9에 나타나 있다. 그리고 매개 변수의 불확실성을 5%와 10%로 고려하여 시뮬레이션 하였다.

### VI. 결 론

본 논문에서는 조작기가 포함된 강체 로봇트 매니플레이터에 대한 해석을 통하여, 미분 기하학적 개념을 적용하여 비선형 제환에 의한 비결합 선형화 모델을 얻는 과정에서 변환 행렬 T의 계산량을 줄이기 위하여 오차 모델에 대한 비선형 제환을 제안하였다. 또한 계통의 구조적 모델오차를 고려하여, 전체 계통에 대한 안정도 해석과 제안된 제어기의 강건성을 제시 하였다.

즉, 시뮬레이션 결과 모델의 구조적 오차 5%와 10%의 경우를 비교하면, 초기 최대 오차는 무부하인 경우 0.2도(degree) 정도의 차이가 발생하며, 최종 오차를 상대 오차로 표현하면 0.5%~0.7%의 범위안에 있으며, 오차 수렴은 관절 1의 경우 그림 4에서 보듯이 0.7초 후에는 수렴하며, 그림 5, 그림 6에서 관절 2, 3은 1초후에 수렴을 나타내고 있다. 이와같이 관절 1

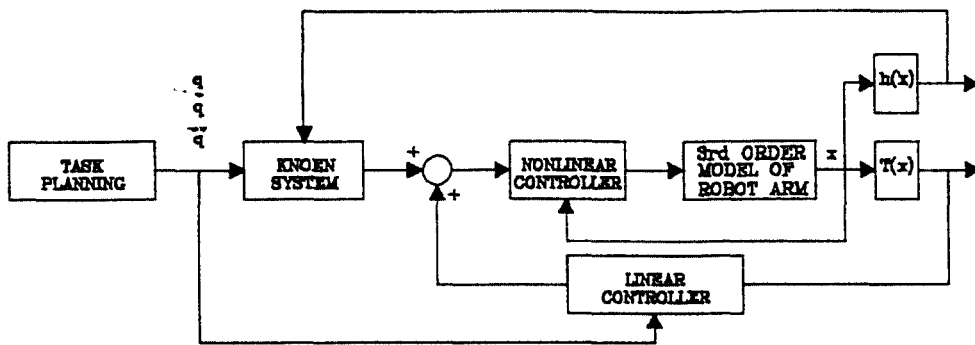


그림 3. 로봇트 매니플레이터에 대한 전체 블록 선도  
Fig 3. The total block diagram of robot manipulator

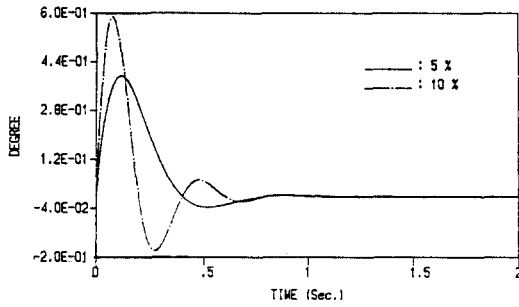


그림 4. 부부하시 관절 1에서의 오차  
Fig 4. The error of joint 1 (payload=0Kg)

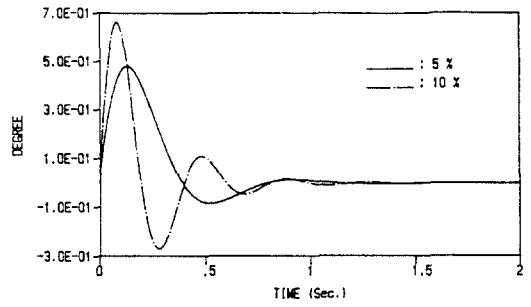


그림 7. 2Kg부하시 관절 1에서의 오차  
Fig 7. The error of joint 1 (payload=2Kg)

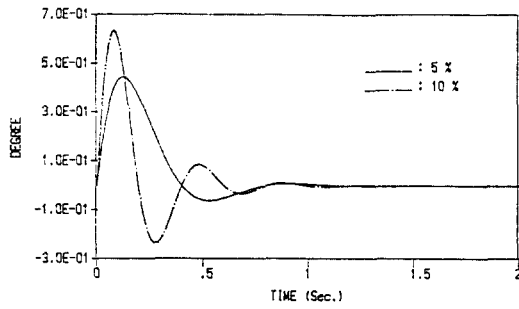


그림 5. 부부하시 관절 2에서의 오차  
Fig 5. The error of joint 2 (payload=0Kg)

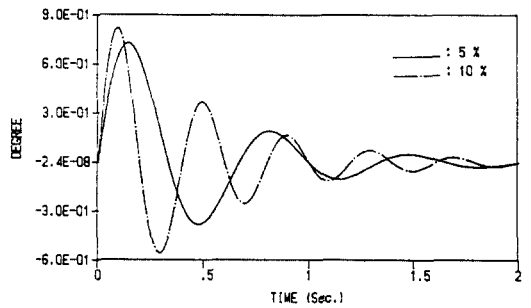


그림 8. 2Kg부하시 관절 2에서의 오차  
Fig 8. The error of joint 2 (payload=2Kg)

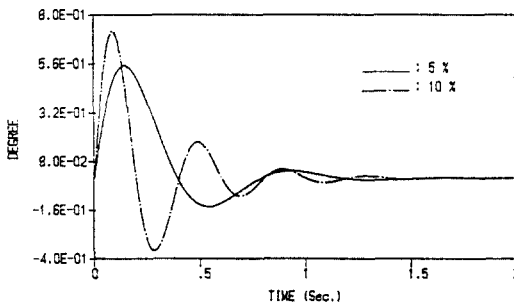


그림 6. 부부하시 관절 3에서의 오차  
Fig 6. The error of joint 3 (payload=0Kg)

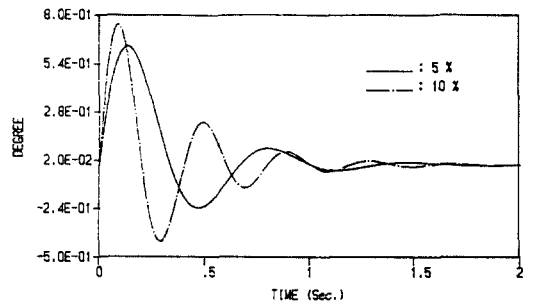


그림 9. 2Kg부하시 관절 3에서의 오차  
Fig 9. The error of joint 3 (payload=2Kg)



표 1. 무부하, 부하시 각관절에 대한 위치 오차

Table 1. The position error of each joint with no payload, 2Kg payload

(단위 : Degree)

관절	구분	최 대 오 차		최 종 오 차	
		5 %	10 %	5 %	10 %
1	0 Kg	0.3872	0.5890	0.0052	0.0057
	2 Kg	0.4813	0.6723	0.0050	0.0055
2	0 Kg	0.4392	0.6413	0.0042	0.0053
	2 Kg	0.7320	0.8421	0.0082	0.0084
3	0 Kg	0.5612	0.7356	0.0052	0.0062
	2 Kg	0.6524	0.7623	0.0053	0.0064

에 비하여 관절 2, 3이 최대 오차 및 수렴도가 낮은 이유는 관절간의 결합항과 비선형성이 심하기 때문이다. 또한 2Kg의 부하가 존재하는 경우 그림 7, 8, 9를 살펴 보면 무부하인 경우 보다 초기 최대 오차가 0.1도에서 0.3도 정도 증가하고, 수렴 시간도 0.5초 정도 차이가 존재하나 최종 오차는 무부하인 경우와 비슷한 0.5%~0.8%의 상대 오차를 갖는다. 본 연구에서 제안된 제어기는 최종 오차의 유계성은 보장되고 있다. 모델의 구조적 오차와 부하 변화시의 최대, 최종 오차의 비교는 표 1과 같다.

앞으로의 과제로 관절 모델 구조의 flexibility를 고려하여, zero dynamic 상태에 의한 문제와 설계 매개 변수 설정에 대한 최적화 문제를 고려하고자 한다.

### 참 고 문 헌

1. Goor, R.M., 'A New Approach to minimum Time Robot Control', Reserch Publication General Motors Reach, 1984

2. Gues,a. 'Optimal Control of Robotic Manipulators', Pb.D. Dissertation, University of Florida, 1983

3. Beekman,R,K.Lee, 'Nonlinear Robotic Control including Drive Motor Interaction', Proceeding of American Control Confrence, pp 1333-1338, 1988

4. Hunt,L,R., Su,R. and Meyer,G. 'Global Transformations of Nonlinear Systems', IEEE Trans. AC-28, pp.24-31, 1983

5. Gutman,S. 'Uncertain Dynamical-System-A Lyapunov Min-Max Approach', IEEE TranAC-24, pp437-443, 1979

6. R.K.Yedavali, 'Perturbation Bounds for Robust stability in Linear State Space Models', Int.J.Control, Vol-42, pp1507-1517, 1985

7. Abdallah,C. and Lewis F.L., 'On Robustness Analysis in The Control of Nonlinear System', proc. ACC, pp2196-2198, 1988

8. Spong,M.W. and Vidyasagar M. "Robust Linear Compensator Design for Nonlinear Robotic Control", IEE J.Robotics and Automation, RA-3, pp345-351, 1987

9. Paul,R.P. "Robot Manipulators : Mathematics, Programming, and Control", New York : MIT Press, 1981

10. 이종용, 이승원, 이상호, "로봇트 매니플레이터에 대한 비선형 제어", '90 한국 자동제어 학술회의 논문집, Vol-1, pp263-268, 1990

11. B.D.O. Anderson, et. al. "Stability of adaptive Systems Passivity and Averaging Analysis", Cambridge, The MIT Press, 1986



李 鍾 龍(Jong-Yong Lee) 正會員  
1957년 1월 19일생  
1983년 2월 26일 : 한양대학교 원자  
력 공학과 졸업  
1988년 2월 23일 : 광운대학교 대학  
원 전자 공학과 졸  
업  
1991년 8월 : 광운대학교 대학원 박  
사과정 수료

李 相 孝(Sang Hyo Lee) 正會員  
1941年 5月 23日生  
1969年 2月 : 首都 工科大学 電氣工  
學科 卒業(工學士)  
1971年 2月 : 延世大 大學院 電氣工  
學科 卒業(工學碩士)  
1981年 2月 : 延世大 大學院 電氣工  
學科 卒業(工學博士)

1984年 : U.C. Berkely 客員研究員  
現在 : 光云大學校 制御計測工學科 教授