

근사 비선형 궤환 선형화를 이용한 도립 진자 계통의 제어

正會員 李 鍾 龍* 正會員 李 相 孝*

The Control of Inverted Pendulum System Using Approximated Nonlinear Feedback Linearization

Jong Yong Lee*, Sang Hyo Lee* *Regular Members*

要 約

로봇 제어와 로켓의 자세 제어에 관련하여 도립 진자 시스템은 제어 이론과 응용면에서 흥미 있는 문제이다. 일반적으로 도립 진자 시스템을 제어하기 위하여 소신호 모델에 의한 근사화 모델이 사용되었다.

본 논문에서는 미분 다양체 이론을 기초로 한 비선형 제어 이론을 도립 진자 시스템에 적용하고자 한다. 먼저 비선형 모델을 비선형 상태 궤환을 이용하여 근사 선형화 모델로 변환시키고, 선형화된 모델에 극점 배치를 통하여 선형 제어를 설계하였다. 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 제안된 방법을 Taylor 급수의 3차 선형화 모델과 비교하였다.

ABSTRACT

The inverted pendulum system has interesting and challenging problems related to robotics and rocket attitude control in view of both control theory and applications. Generally approximately linearized plant models are employed to control the system.

In this paper a recently developed control theory based on differentiable manifold theory is used to control the inverted pendulum system which is typically nonlinear. First, the nonlinear model is transformed into the approximate feedback linearized system by nonlinear state feedback. Secondly, the linear controller is designed using the pole-placement method for the approximate feedback linearized plant model, the output of which are finally inverse-transformed to yield the control input to the actual system of the inverted pendulum. The proposed method is evaluated by the computer simulation to compare with the 3rd order linearization model.

I. 서 론

*光云大學校 電子工學科
Dept. of Electronics, Kwangwoon University
論文番號: 93-40

도립진자 시스템은(inverted pendulum system) 인체 및 항공 역학, 각종 분석, 로봇 시스템등에 해석에 광범하게 응용되는 편리한 시스템중의 하나이

다.

도립 전자 시스템은 현대제어 시스템의 이론과 응용문제를 취급할 수 있는 집약된 실험장치이다. 이론면에서는 고전 및 현대의 다양한 제어방식의 효과를 확인하는 실험장치로 사용되고, 응용면에서는 특히 산업용 robot시스템의 기본 시스템으로, 그리고 우주항공 분야의 비행체 자세 제어 시스템 설계에 필수적인 장치이다.

기계적인 시스템인 도립전자 시스템은 1965년 기계적인 불안정한 모드를 안정한 모드로 유지시키기 위해서 Kapitza에 의해서 처음으로 설계 제작된 이래 Scafer와 Cannon(1969)이 Bang-Bang제어를 사용하여, 도립위치에 있는 Bending beam을 안정화시킬 수 있는 방법으로 출력궤환 기법을 이용한 제어를 제시하였다.^[1]

Sturgeon과 Loscutoff는 1972년에 상태공간을 이용한 출력 궤환 제어기로서 관측기 레귤레이터형 동적 안정화 제어기를 사용하여 도립전자를 안정화시킬 수 있는 제어시스템을 설계하였다.

그리고, 이러한 연구결과의 근거로 Sehba(1983) 및 Furuta(1984)는 이중 및 삼중 도립전자 시스템에 대해서 computer제어를 행하였으며, 최근에 Feng(1988)등은 극점 배치법과 최적 제어법을 비교 분석하여 도립전자 시스템의 안정화에 대한 시뮬레이션 결과를 발표 하였다.^[2,3,4]

그러나 이 결과는 도립전자 계통 차원이 일차원이고, 계통 매개변수의 변동에 민감하고 적절한 궤환이득의 결정을 위한 알고리즘이 아니며, 시스템의 상태가 평형 상태 근방에서 미소각, 미소변위에서 선형화로 얻어진 근사모델에 대하여 만족되며, Track의 진동 및 경사등으로 인한 내부 및 외부 외란 발생시 안정화되지 못하는 결점을 가지고 있으므로 이러한 결점을 보완할 필요가 있다. 그리고 최근에 개발된 비선형 제어기설계는 비선형 시스템을 피드백 선형화를 이용하여 제어가능한 선형 시스템으로 변환하여 선형 제어 이론을 적용하는 것이다. 이 제어 방법은 상태 변환과 제어 변환으로 구성된다. 이와 같은 방법은 시스템의 자유도와 제어 조작기의 수가 같은 경우에 적용 가능하다. 그러나 도립전자 시스템은 입력변수는 하나이고 출력 변수는 방진 운동과 회전 운동을 갖는 경우로서 시스템의 자유도가 제어 조작기의 수보다 많다. 그러므로 도립전자 시스템의 경우 동작점 근방에서의 피드백 선형화를 통한 완전 선형화와 제어기 설계에는 한계가 있다.

본 논문에서는 이러한 결점을 보완하기 위하여 자유도가 2인 도립전자 시스템의 비선형 모델을 그대로 사용하고, 미분 다양체 이론을 도입하여 피드백으로써 비선형 시스템에 대한 근사 선형화 모델을 유도한다. 이 선형 모델을 기반으로하여 극점배치와 같은 선형 제어기의 장점을 최대한 살릴수 있는 설계가 가능해진다.

본 논문의 구조는 제2장에서 비선형 궤환 선형화에 대한 일반적인 방법에 대하여 고찰하고, 제3장에서는 도립전자 계통의 모델 표현에 대하여 서술하며, 비선형 상태궤환 근사 선형화를 구성하고, 선형화된 모델에 대한 안정화 제어를 설계한다. 제안된 방식에 대하여 모의 실험 및 결과 고찰을 한다. 제4절에서는 본 논문에 대한 결론을 서술하였다.

II. 비선형 계통의 궤환 선형화 기법에 대한 고찰⁶⁾

먼저 미분 기하학에서 사용되는 표준적 표기를 아래와 같이 정의하자.

(1) f 와 g 가 R^n 상의 C^x 의 벡터장(vector fields)이라 할때, Lie bracket $[f, g]$ 는 벡터장으로 다음과 같이 정의되며, $[f, g]$ 도 역시 R^n 상에서 C^x 벡터장이다.

$$[f, g] = \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g \quad (1)$$

여기서, $\partial f / \partial x$ 와 $\partial g / \partial x$ 는 Jacobian 행렬이다. x 는 R^n 의 상태 변수 벡터이다.

(2) 반복적인 Lie brackets $[f, [f, g]], [f, [f, [f, g]]]$ 등의 표현은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \text{ad}_f^0(g) &= g \\ \text{ad}_f^1(g) &= [f, g] \\ \text{ad}_f^2(g) &= [f, [f, g]] \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{ad}_f^k(g) = [f, \text{ad}_f^{k-1}(g)]$$

(3) f 가 R^n 상의 C^x 의 벡터장이라 하고, h 가 R^n 상의 C^x 의 스칼라 장(scalar field)이라 할때, f 에 대한 h 의 Lie derivative는 f 와 h 의 경도(gradient)의 내적으로 표현된다. $L_f(h)$ 는 R^n 상의 C^x 의 스칼라 장이다.

$$L_f(h) = \langle dh, f \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i} f_i \quad (3)$$

(4) f 와 g 가 R^n 상의 C^∞ 의 벡터장이라 하고, h 가 R^n 상의 C^∞ 의 스칼라 장이라 할때, 다음과 같은 항등식이 존재한다.

$$\langle dh[f, g] \rangle = \langle d\langle dh, g \rangle, f \rangle - \langle d\langle dh, f \rangle, g \rangle \quad (4)$$

(5) 임의의 점 $p \in R^n$ 의 근방의 개집합 u 에 대하여 독립된 벡터장 f_1, f_2, \dots, f_d 가 존재하면, 이들 벡터장의 p 점에서 선형 공간 $D(p)$ 를 생성하며, 이를 distribution 이라고 부른다.

$$D(p) = \text{span}\{f_1, f_2, \dots, f_d\} \quad (5)$$

또한, 다음의 조건

$$f_i \in D(p) \Rightarrow [f_i, f_j] \in D(p) \quad (6)$$

이 성립하면 벡터장에 의하여 생성된 선형 공간 distribution은 포함적(involutive)이라고 정의한다. 즉, 포함적인 $D(p)$ 의 f_i, f_j 에 대하여 그 Lie bracket $[f_i, f_j]$ 도 $D(p)$ 에 포함된다는 뜻이다.

2-1. 입력-상태 궤환에 의한 선형화 기법^[9,11,12,13,16,17]

다음으로 위의 미분 기하학적 이론을 이용하여, 상태 방정식으로 표현된 단일 입력 비선형 계통의 상태 궤환 선형화에 대하여 살펴보자
먼저 계통 방정식은 아래와 같다.

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (7a)$$

$$y = h(x) \quad (7b)$$

여기서, $x \in R^n$, u, y 을 각각 상태 변수 벡터와 입력과 출력을 나타낸다.

그리고 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 R^n 상의 매끄러운 벡터장(smooth vector field)이며, h 는 R^n 상의 매끄러운 스칼라장(smooth scalar field)이다.

또한 이 계통의 평형 상태를 (x_0, u_0) 라 할때, $f(x_0) = 0, h(x_0) = 0$ 이라 가정한다. 이때 비선형 계통의 궤환 선형화는 궤환 입력 $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ 와 좌표 변환 $z = T(x)$ 를 이용하여 전체 폐경로 계통이 새로운 좌표계에서 가제어성(controllable) 선형 계통이 되도록 만드는 것으로, 입력-상태를 이용한 선형화와 입/출력 선형화를 정의할 수 있다.

정의 2.1: 비선형 계통(7a)에 대하여

$$\dot{z} = Az + Bv \quad (8)$$

가 되는 좌표 변환 $z = T(x)$ 와 궤환 입력 $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ 가 존재하면, 계통 (7a)는 입력-상태 궤환 선형화가 가능하다고 정의한다.

여기서, A 는 $n \times n$ 행렬이고, B 는 $n \times 1$ 벡터이며 다음과 같이 표현된다.

$$A = \begin{bmatrix} 0, 1, 0, \dots, 0 \\ 0, 0, 1, \dots, 0 \\ \dots \\ 0, 0, \dots, 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

그리고 입력-상태 궤환 선형화 필요 충분 조건은 아래의 정리 2.1과 같으며, 참고문헌 [8, 10, 11, 12]에 증명 되어있다.

정리 2.1: 비선형 계통(7a)가 입력-상태 궤환 선형화 하기 위한 필요 충분 조건은 평형 상태 근방에서 다음을 만족한다.^[8,10,11,12]

① 집합 $\{ad^k f(x) ; 0 \leq k \leq n-1\}$ 은 선형 독립(linearly independent)이다.

② 집합 $\{ad^k f(x) ; 0 \leq k \leq n-2\}$ 는 포함적(involutive)이다.

위의 조건이 만족되면, 궤환 입력에 표현된 $\alpha(x)$ 와 $\beta(x)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\alpha(x) = -(L_r^n(T_1(x))) / (L_g(L_r^{n-1}(T_1(x)))) \quad (9a)$$

$$\beta(x) = -1 / (L_g(L_r^{n-1}(T_1(x)))) \quad (9b)$$

또한 첫번째 변환 $T_1(x)$ 는 아래의 조건을 만족한다.

$$(L_g(T_1(x))) = L_{[f,g]}(T_1(x)) = \dots = L_{ad^{n-2}f}(T_1(x)) = 0 \\ L_{ad^{n-1}f}(T_1(x)) \neq 0$$

그리고 다른 T_i 는 반복적 연산에 의해 산출된다.

$$T_2 = \langle dT_1, f \rangle = \hat{T}_1 \\ T_3 = \langle dT_2, f \rangle = \hat{T}_2 \\ \vdots \\ T_n = \langle dT_{n-1}, f \rangle = \hat{T}_{n-1} \\ T_{n+1} = \langle dT_n, f \rangle + \langle dT_n, g \rangle u \quad (10)$$

이와 같은 조건을 만족하는 상태 변환 T는 아래와 같은 성질을 갖는다.

- i) $T(0) = 0$
 - ii) T_1, T_2, \dots, T_n 은 단지 x 만의 함수이며, $n \times n$ Jacobian 행렬은 R^n 각 점에서 비특이 (nonsingular)이다.
 - iii) T_{n+1} 은 x 와 u 의 함수이고, T_{n+1} 은 u 에 대하여 가역적이다.
 - iv) T 변환은 계통 (7)을 계통 (8)로 사상시킨다.
 - v) (T_1, T_2, \dots, T) 은 R^n 상에서 일 대 일 대응이며, T_{n+1} 은 R^{n+1} 상에서 일 대 일 대응이다.
- 이에 대한 block 선도는 그림 2.1과 같다.

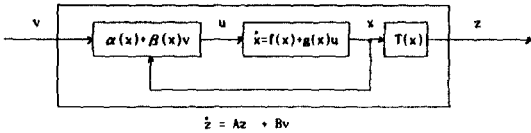


그림 2.1. 입력-상태 제환 선형화
Fig 2.1. Input-State Feedback Linearization

이 입력-상태 선형화는 제환된 상태를 사용하여 입력 변환과 상태 변환이 결합되어 달성된다. 그리고 출력 함수 $y=h(x)=h(T^{-1}(z))$ 가 되는데, 이는 비선형 되어도 무관하다. 이 방법은 개경로 불안정한 비선형 계통에 외란이 존재하고, 궤적 추종을 위한 제어기 설계는 $v-y$ 계통이 일반적으로 비선형 이론적인 어려움이 있다.

2-2. 입/출력 선형화 기법^[9,13,15,16]

그래서 출력 함수까지 선형화 되어야 한다는 조건을 부가하여 다음과 같은 입/출력 선형화에 대한 정의를 할 수 있다.

정의 2.2: 비선형 계통 (7a,7b)에 대하여, 다음과 같은 C^r 미분 동상(diffeomorphism) v 와 선형 미분 연산자가 존재한다면, 계통 (7a,7b)는 입/출력 선형화가 가능하다고 정의한다.

$$v = \Omega(x, u) \quad (\text{단, } \partial\Omega/\partial u \neq 0 \text{ 이다.}) \quad (11)$$

$$D_r = \sum_{k=0}^r \beta_k \frac{d^k}{dt^k} \quad (\text{단, } D_r(y) = v \text{ 이다.}) \quad (12)$$

여기서, 식(11)과 식(12)를 만족하는 가장 작은 양의 정

수 r 을 계통 (7a,7b)의 상태차수(relative degree)라 한다.

일출력 선형화에 대한 block 선도는 그림 2.2와 같다.

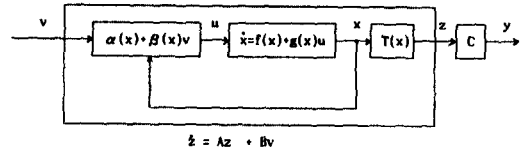


그림 2.2. 입력-출력 제환 선형화
Fig 2.2. Input-Output Feedback Linearization

위의 입/출력 선형화 문제의 필요 충분 조건은 아래와 같으며, 참고문헌[9, 15, 16]에 증명되어 있다.
정리 2.2: 비선형 계통 (7a,7b)이 입력-출력 선형화이기 위한 필요 충분 조건은 다음조건을 만족하는 양의 정수 r 이 존재한다.^[10,14]

$$L_g L_f^i h(x) = 0, \forall i, 0 \leq i < r-1 \quad (13)$$

$$\langle dh, \text{ad}_f^{r-1}(g) \rangle \neq 0 \quad (14)$$

이 정의에 의해 전체 폐경로 계통이 완벽한 선형 계통이 되어 기존의 선형계통에 대한 이론들은 모두 사용할 수 있게 된다. 그리고 $r=n$ 인 경우는 입/출력 선형화는 입력-상태 선형화와 같은 방식이 된다. 즉 비선형 계통이 정리 2.1과 정리 2.2의 선형화조건을 만족하면, 비선형 계통의 제어를 위하여 이미 개발된 선형 계통 이론을 적용할 수 있다. 그래서 이 선형화 기법은 비선형 계통의 효과적인 제어칙(control law) 개발을 위한 아주 강력한 기법으로 알려져 있다. 그러나 정리 2.1이나 정리 2.2의 조건을 만족하지 않는 경우의 계통은 앞에서 서술한 선형화 기법을 사용할 수 없다.

따라서 새로운 접근인 근사 선형화(approximated linearization) 기법과 부분 선형화 (partial linearization) 기법에 대하여 고찰하자.

2-3 근사 선형화 기법과 부분 선형화 기법^{6,7,14}

먼저 근사 선형화 기법에 대하여 간략히 조사하자.
정의 2.3: 비선형 계통 (7a,7b)에 대하여

$$\dot{z} = A_1 z + B_1 v + O_P^{+1}(\tilde{x}, u) \quad (15)$$

가 되는 좌표 변환 $z=z(\bar{x})+O_{p+1}(\bar{x})$ 와 입력 변환 (control transformation) $v=v(\bar{x},u)+O_{p+1}(\bar{x},u)$ 가 존재한다면, 비선형 계통(7a,7b)는 차수(order) p 로 근사 선형화 가능하다고 정의한다.

여기서, $A_1=af/\partial x|_{x=x_0}$, $B_1=g(x_0)$, $\bar{x}=x-x_0$ 이다.

또한 근사 오차의 차수 $O_{p+1}(\bar{x},u)$ 는 $O^{p+1}(\bar{x})$ 이나 $O_p(\bar{x})u$ 를 의미한다.

이 경우 실제 응용에서 $O_{p+1}(\bar{x},u)$ 항은 무시하고 식(15)가 선형 계통이라고 근사해서 제어를 할 것이다. 또한 $p=2$ 이면, 기존의 고전적인 근사방법과 같으며, $p>2$ 이면 고전적 근사방법보다 더 정확하고 p 를 최대로 하므로써 보다 효과적인 제어를 할 수 있다. 그리고 이 기법의 필요 충분 조건은 궤환 선형화의 필요충분조건과 유사한 필요 충분조건을 갖으며, 궤환(선형화)의 경우 1차 편미분 방정식을 풀어야 하는 대신에 근사 선형화는 선형대수 방정식을 풀어야 하므로 계산상 잇점이 존재한다. 또한 p 가 무한대이고, 계통이 해석적(analytic)이면, 완전 궤환 선형화가 가능하다.

근사 선형화에 대한 필요 충분 조건을 정리하기 위하여 다음과 같은 정의가 필요하다. $D_c = \{g, ad_g, \dots, ad_{g^{p-1}}g\}$ 를 포함적 디스트리뷰션(involutivity distribution)이라고 하고, 표현을 간략하기 위하여 $X_i = ad_i^p g$ 라 하자. 이때 다음과 같은 정의가 존재한다.

정의 2.4: 만약 D_c 가 평형상태 x_0 에 차수(rank) n 을 갖고 모든 $Y \in D_c$ 에 대하여 식(16)을 만족하도록 $C_k(x)$ 함수가 존재한다면, D_c 는 x_0 근방에서 차수(order) p 인 국소기저(local basis)를 갖는다.

$$Y = \sum_{k=1}^n C_k(x)X_k(x) + O_{p+1}(\bar{x}) \quad (16)$$

정의 2.5: 만약 식(17)을 만족하도록 함수 $c_{jk}(x)$ 가 존재한다면 D_1 는 평형점 근방에서 차수(order) p 의 포함적(involutivity)이라고 한다.

$$[x, x_j](x) = \sum_{k=1}^n c_{jk}(x)x_k(x) + O_p(\bar{x}) \quad (17)$$

이때 근사 궤환 선형화의 필요 충분 조건은 다음과 같으며, 참고문헌 [6]에 증명되어 있다.

정리 2.3: 비선형 (7a,7b)계통이 (A_1, B_1) 가 가제어성이 성립하는 차수(order) p 의 선형 계통 (15)로 변환하기되기 위한 필요 충분 조건은 아래와 같다. ⁶

(a) D_c 는 평형점 x_0 에서 차수(order) p 인 국소 기저를 갖는다.

(b) D_1 는 평형점 x_0 에서 차수(order) p 에 포함적이다.

즉, 근사 선형화는 정리 2.3을 만족하지 않는 비선형항들을 무시하므로써 선형화를 시도 하였다. 다음으로 이러한 오차로 표시된 비선형항을 무시하지 않고 상태공간 R^n 전체가 선형화가 가능하지 않는다면, 상태공간을 z^1, z^2 로 나누어 z^2 는 z^1 과 독립인 선형 계통이 되게 하고, z^1 은 비선형 계통으로 나타내는 부분 선형화 기법을 소개하면 다음과 같다.

$$\dot{z}^1 = C(z^1, z^2) + D(z^1, z^2)v \quad (18a)$$

$$\dot{z}^2 = A_2 z^2 + B_2 v \quad (18b)$$

여기서 $z^1 \in R^{n-p}$, $z^2 \in R^p$ 이고, A_2, B_2 는 상수 계수 행렬 이다.

만약 $p=n$ 이면, z^1 의 차원이 0이 되고, 궤환 선형화가 가능하다.

$p < n$ 이면, z^1 은 z^1, z^2 의 비선형으로 구성된다. 따라서 비선형 계통 (7a,7b)가 주어졌을때 z^2 의 차원 p 를 최대로 하는 좌표 변환과 궤환을 구함으로써 선형 계통에 근사하려고 한다.

다음으로 근사 포함성 차수(approximate involutivity order)를 결정하기 위한계산적 절차에 대하여 살펴보자

이는 완전 포함성(exact involutivity)에 오차항을 갖는 식(17)의 의미를 고려하는 것으로 오차 $e_{ij}(x)$ 를 다음과 같이 고려하자.

$$e_{ij}(x) = [x_i, x_j](x) - \sum_{k=1}^n C_{ij}(x) X_k(x)$$

표현을 간략하게 하기 위하여 벡터장 $X_{ij} = [x_i, x_j](x)$ 라 하고, 계수 벡터 $C_{ij} = [C_{ij1}(x), \dots, C_{ij(n-p)}(x)]^T$ 라 하자.

이때 오차 $e_{ij}(x)$ 를 다음과 같이 고려하자.

$$e_{ij}(x) = e_{i,j} - D_1(x)C_{ij}(x)$$

x_0 인 평형점에 관해서, 이 오차항을 Taylor급수전개하면 다음과 같다.

$$e_{ij}(x) = e_{ij}(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial e_{ij}(x_0)}{\partial x_k} x_k + O^2(\bar{x})$$

$$= X_{ij}(x_0) - D_1(x_0) C_{ij}(x_0) + \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial X_{ij}(x_0)}{\partial x_k} - D_1(x_0) \frac{\partial C_{ij}(x_0)}{\partial x_k} - \frac{\partial D_1(x_0)}{\partial x_k} C_{ij}(x_0) \right] \tilde{x}_k + O_2(x) \quad (19)$$

차수 1의 포함적인 경우, 식(19)의 상수항이 소멸되도록 하는 계수 $C_{ij}(x_0)$ 가 존재한다. 즉, 다음과 같다.

$$X_{ij}(x_0) - D_1(x_0) C_{ij}(x_0) = O_{n \times 1} \quad (20)$$

식(19)는 모든항이 상수이기 때문에, $C_{ij}(x_0)$ 에 대한 선형대수 방정식이다.

그래서 1차 포함적이기 위한 $C_{ij}(x_0)$ 해가 존재하기 위한 필요 충분 조건은 다음과 같다.

$$\text{rank}[D_1(x_0)] = \text{rank}[D_1(x_0), X_{ij}(x_0)] \quad (21)$$

유사한 방법으로, 차수 2의 포함적인 경우 식(19)의 상수와 1차항이 소멸되어야한다.

즉, 식(22)와 식(23)에 대한 해는 상수계수 $C_{ij}(x_0)$ 와 $\frac{\partial C_{ij}(x_0)}{\partial x_k}$ 의 항으로 얻어져야 한다.

$$X_{ij}(x_0) - D_1(x_0) C_{ij}(x_0) = O_{n \times 1} \quad (22)$$

$$\frac{\partial X_{ij}}{\partial x_k} - D_1(x_0) \frac{\partial C_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial D_1}{\partial x_k} C_{ij}(x_0) = O_{n \times 1} \quad (23)$$

식(23)은 $\tilde{x}_k \neq 0$ 일때 계산되어야 한다.

즉, 해 $C_{ij}(x_0)$ 는 식(22)를 이용하여 식(23)과 독립적으로 풀고, 식(23)의 결과를 $\frac{\partial C_{ij}}{\partial x_k}$ 에 대하여 풀기 위해 식(23)에 대입한다.

즉, 식(23)의 해가 존재하기 위한 필요충분 조건은 다음과 같다.

$$\text{rank}[D_1(x_0)] = \text{rank} \left[D_1(x_0), \frac{\partial X_{ij}(x_0)}{\partial x_k} - \frac{\partial D_1(x_0)}{\partial x_k} C_{ij}(x_0) \right] \quad (24)$$

이와같은 결과를 응용하여 고차의 포함성에 대하여 유사한 방법으로 확장할 수 있다. 다음으로 어떤 차수에서 포함적 디스트리뷰션(involutivity distribution)이 소멸되는 근사 출력 함수 $\tilde{T}(x)$ 가 존재한다는 Krener증명의 개념을 이용하여, 차수 p에 대하여 $D_1(x)$ 가 소멸되도록 근사출력 $\tilde{T}_1(x)$ 가 존재는 다음과 같다.

$$\nabla \tilde{T}_1(x) \text{ad}^p f = O^{p+1}(\tilde{x}), i=0, 1, 2, \dots, n-2 \quad (25)$$

식(25)를 완전 선형화의 좌표 변환과 비교하면 다음과 같다.

$$\nabla T_1(x) \text{ad}^p f = 0, i=0, 1, 2, \dots$$

여기서 $T_1(x)$ 는 완전 선형화의 출력함수이다.

즉, 식(25)에서 차수 p가 무한대 일때 $O^{p+1}(\tilde{x})$ 는 0이 되므로 완전선형화의 출력함수 $T_1(x)$ 와 일치한다. 식(25)의 좌변항인 내적(inner product)를 평형 상태 x_0 에 대하여 Taylor급수 전개하고, $d\tilde{T}_1(x) = \nabla \tilde{T}_k^T(x)$ 라 할때, 다음과 같이 정의하자.

$$\varepsilon(x) = [\nabla \tilde{T}_1(x) D_1(x)]^T = D_1^T(x) \nabla \tilde{T}_1^T(x) D_1(x) d\tilde{T}_1(x) \quad (26)$$

식(26)을 x_0 에 관해서 확장하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \varepsilon(x) &= \varepsilon(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varepsilon(x_0)}{\partial x_k} \tilde{x}_k + O^2(\tilde{x}) \\ &= D_1^T(x_0) d\tilde{T}_1(x_0) + \sum_{k=1}^n \left[D_1^T(x_0) \frac{\partial d\tilde{T}_1(x_0)}{\partial x_k} + \frac{\partial D_1^T(x_0)}{\partial x_k} d\tilde{T}_1(x_0) \right] \tilde{x}_k + O^2(\tilde{x}) \end{aligned} \quad (27)$$

식(27)에서 계통이 단지 차수 1의 포함성일때, 이때 식(27)의 상수항은 소멸된다. 즉, $d\tilde{T}_1(x_0)$ 에 대하여 $D_1^T(x_0) d\tilde{T}_1(x_0) = 0_{n-1 \times 1}$ 을 풀어야 하는것이다. 이는 $(n-1) \times n$ 의 $D_1^T(x_0)$ 행렬에 대한 null space원소를 구하는 것이다.

유사한 방법으로 차수 2의 포함성일때 식(27)의 상수와 1차항이 소멸되기 위하여, 먼저 상수항으로부터 $d\tilde{T}_1(x_0)$ 를 구한후 이결과를 1차항에 대입한다.

즉, 다음과 같다.

$$D_1^T(x_0) \frac{\partial d\tilde{T}_1(x_0)}{\partial x_k} = - \frac{D_1^T(x_0)}{\partial x_k} d\tilde{T}_1(x_0)$$

그래서 $\tilde{x}_k \neq 0$ 이고, $k=1, \dots, n$ 에 대하여

$$\frac{\partial d\tilde{T}_1(x_0)}{\partial x_k} \text{에 대하여 풀어야 한다.}$$

이와같은 방법으로 더 높은 차수에 대하여 확장시킬 수 있다.

이상의 결과로 $\tilde{T}_1(x)$ 가 계산되면, 나머지 상태변환과 제어 변화는 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{T}}_k(x) &= L_f^{k-1} \tilde{T}_1(x) \\ v &= L_f^k \tilde{T}_1(x) + L_g L_f^{k-1} \tilde{T}_1(x)u \end{aligned} \quad (28)$$

이 좌표계에서 변환된 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{T}}_1 &= \tilde{T}_{i+1}(x) + 0^{p+1}(\tilde{x}, u) \\ \dot{\tilde{T}}_n &= v + 0^{p+1}(\tilde{x}, u) \end{aligned}$$

다음으로 이상에서 제기된 기법을 하나의 입력에 두 개의 자유도를 갖는 독립진자 계통에 대하여 적용하여 보자.

III. 독립진자 시스템의 모델 표현

아래 그림과 같은 독립진자 시스템을 고려하자

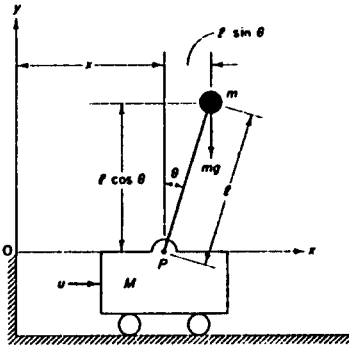


그림 3. 독립진자 시스템의 모델 표현
Fig 3. Model of the inverted pendulum

위의 독립진자 시스템에서 진자의 막대 질량은 무시하고, 끝 절점에 집중 질량 형태로 구성되며, 힘을 구성하는 외부 요소에 대한 구동 모델과 마찰력, 외부의 외란은 생략하였다. 위의 시스템에 Lagrange-Euler방식을 적용하여 모델 표현을 하고자 한다. 먼저 Lagrange Function (L)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} L &= \text{전체운동에너지} - \text{전체위치에너지} \\ &= \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 2 \dot{x} \dot{\theta} l \cos \theta) - mg l \cos \theta \end{aligned} \quad (29)$$

여기서, M : 움직이는 cart의 질량
m : 진자의 질량
l : 진자의 길이
x, \dot{x} : x축 방향의 변위와 속도
 $\theta, \dot{\theta}$: 회전방향의 각변위와 각속도
g : 중력가속도

위에서 정의된 Lagrange Function에 Lagrange-Euler방정식에 대입하면 모델에 대한 전체 표현을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] - \frac{\partial L}{\partial x} &= u \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right] - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned} \quad (30)$$

식(29)를 식(30)에 대입하면 아래와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} (M+m) \ddot{x} + ml \dot{\theta} \cos \theta - ml \dot{\theta} \sin \theta &= u \\ ml \ddot{x} \cos \theta + ml^2 \ddot{\theta} - mg l \sin \theta &= 0 \end{aligned} \quad (31)$$

식(31)을 이용하여 x와 θ 에 대하여 살펴보면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} &= \frac{1}{m \cos^2 \theta - (M+m)l} \begin{bmatrix} ml g \cos \theta \sin \theta - ml^2 \dot{\theta} \sin \theta \\ -(M+m)g \sin \theta + ml \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta \end{bmatrix} \\ &+ \frac{1}{m \cos^2 \theta - (M+m)l} \begin{bmatrix} -1 \\ \cos \theta \end{bmatrix} u \end{aligned} \quad (32)$$

여기서, 아래와 같이 상태 공간을 정의 한다.

$$\begin{aligned} x &= z_1, \dot{x} = z_2, \theta = z_3, \dot{\theta} = z_4, \\ z &= [z_1, z_2, z_3, z_4]^T \end{aligned} \quad (33)$$

식(33)에 의해 정의된 상태 공간을 이용하여 식(32)을 표현하면 아래와 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ \frac{ml g \cos z_3 \sin z_3 - ml^2 z_4^2 \sin z_3}{m \cos^2 z_3 - (M+m)l} \\ z_4 \\ \frac{-(M+m)g \cos z_3 \sin z_3 - ml z_4^2 \sin z_3 \cos z_3}{m \cos^2 z_3 - (M+m)l} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{m/\cos^2 z_3 - (M+m)l}{\cos z_3} \\ 0 \\ \frac{m/\cos^2 z_3 - (M+m)l}{\cos z_3} \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$= f(x) + g(x)u$$

즉, 식(34)는 비선형 시스템의 일반적인 형태임을 보여주고 있다.

그리고 계통의 평형 상태는 $(z_1, 0, 0, 0)$ 이다.

다음으로 주어진 계통에 대하여 소신호(small signal)에 의한 근사 Taylor급수 선형화 비선형 상태 궤환에 의한 선형화에 의하여 고려하여 보고자 한다.

3-1. 도립 전자 계통에 대한 근사 선형화

다음으로 주어진 도립전자 계통(31)에 대하여 궤환 선형화 기법을 적용하자.

이때 식(34)의 표현이 복잡하므로 완전 선형화에 대한 조건을 조사하는 것은 계산량이 많으며 복잡하다. 그래서 계산량을 줄이기 위하여, 비선형항에 대한 부분적 보상을 통하여 도립 전자 계통의 운동 방정식을 간략화 하고자 한다.

식(31)에서 비선형성을 보상하기 위해 새로운 입력 w 을 다음과 같이 고려하자.

$$w = \frac{1}{m/\cos\theta} (u + m/l\theta^2 \sin\theta - (M+m)x) \quad (35)$$

식(35)을 식(31)과 결합하면 다음과 같이 표현한다.

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= g \tan\theta - l \sec\theta w \\ \dot{\theta} &= w \end{aligned} \quad (36)$$

식(36)을 식(33)에서 정의한 상태를 이용하여 표현하면 아래와 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ g \tan z_3 \\ z_4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -l \sec z_3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

식(37)의 상태 방정식은 식(34)의 평형점을 갖는다. 그러므로 식(37)은 도립전자 계통의 간략화된 모

델이다. 다음으로 간략화 된 모델 식(37)에 대하여 완전 선형화 되기 위한 필요 충분 조건인 선형 독립성과 포함성(involutivity)을 조사하자.

먼저 집합 $\{g, \text{ad}_f g, \text{ad}_f^2 g, \text{ad}_f^3 g\}$ 의 선형 독립성을 조사하면, $z_3 = \pm\pi/2$ 를 제외한 모든 점에서 가제어성이 성립하므로 집합 $\{g, \text{ad}_f g, \text{ad}_f^2 g, \text{ad}_f^3 g\}$ 는 선형 독립이다. 다음으로 포함성 디스트리뷰션(involutivity distribution) $D_1\{g, \text{ad}_f g, \text{ad}_f^2 g\}$ 의 포함성을 조사하면, 집합 D_1 는 포함적(involutive)이 아니다.

그러므로 완전 선형화 조건이 만족하지 않으므로, 근사 선형화 기법을 적용하고자 한다. 먼저 선형화 차수 p 에 대한 조건을 살펴보면, 선형화 가제어성 행렬이 $z_3 = \pm\pi/2$ 을 제외한 모든 곳에서 전차수(full rank)을 갖으므로, 비선형 가제어성 행렬은 비특이(nonsingular)이다. 그러므로 계통이 임의의 차수 p 에 대하여, 차수 p 제어가 가능 계통이라는 것을 의미한다. 그래서 선형화 차수에 대한 제한 조건은 필요가 없다. 다음으로 포함성(involutivity)조건을 살펴보자.

차수 1의 경우, 포함성 디스트리뷰션 D_1 는 차수 1의 포함적이다. 이 경우 식(22)을 만족하는 $C_{ij}(x_0)$ 는 $[0, 0, 0]^T$ 이다.

다음으로 차수 2의 포함성에 대하여 살펴보자.

차수 1 포함성에서 $C_{ij}(x_0) = O_{3 \times 1}$ 이기 때문에 조건식(23)은 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial X_{ij}(x_0)}{\partial x_k} - D_1(x_0) \frac{\partial C_{ij}(x_0)}{\partial x_k} = O_{n \times 1} \quad k=1, 2, 3, 4 \quad (38)$$

$k=1$ 인 경우는 $x_1=0$ 이기 때문에 1차항의 x_1 과 관련된 계수는 소멸된다. 그래서 $k=2$ 부터 시작한다. 표현을 간단히 하기 위하여 다음과 같이 설정하자.

$$\begin{aligned} X'_{ij}(x_0) &= \left[\frac{\partial X_{ij}(x_0)}{\partial x_2}, \frac{\partial X_{ij}(x_0)}{\partial x_3}, \frac{\partial X_{ij}(x_0)}{\partial x_4} \right] \\ C'_{ij}(x_0) &= \left[\frac{\partial C_{ij}(x_0)}{\partial x_2}, \frac{\partial C_{ij}(x_0)}{\partial x_3}, \frac{\partial C_{ij}(x_0)}{\partial x_4} \right] \end{aligned} \quad (40)$$

식(39)와 식(40)을 이용하여 식(38)를 다음과 같은 형태로 둘 수 있다.

$$\begin{aligned} D_1(x_0) C'_{12}(x_0) &= X'_{12} \\ D_1(x_0) C'_{13}(x_0) &= X'_{13} \\ D_1(x_0) C'_{23}(x_0) &= X'_{23} \end{aligned} \quad (41)$$

식(41)에 대한 해의 존재를 위하여 차수(rank)을 조사하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{rank}[D_1(x_0)] &= \text{rank}[D_1(x_0), X'_{12}(x_0)] \\ \text{rank}[D_1(x_0)] &\neq \text{rank}[D_1(x_0), X'_{13}(x_0)] \\ \text{rank}[D_1(x_0)] &\neq \text{rank}[D_1(x_0), X'_{23}(x_0)] \end{aligned}$$

결국 차수 2의 포함성에 대한 조건은 만족하지 않는다. 다음으로 선형화 변환을 얻기위한 근사 출력함수를 계산하자.

출력함수에 대한 해는 차수 1의 포함성 디스트리뷰션이 근사적으로 소멸되도록 설정하므로, 식(26)을 이용하여 표현하면 아래와 같다.

$$D_1^T(x_0) \nabla \tilde{T}_1^T(x_0) = 0_{3 \times 1}$$

즉, $D_1^T(x_0)$ 의 nullspace를 계산하면 다음과 같이 얻어진다.

$$\nabla \tilde{T}_1^T = [1/l, 0, 1, 0]^T \quad (42)$$

식(42)를 적분하므로서 근사 출력 함수 T_1 을 얻는다.

$$\tilde{T}_1 = \frac{1}{l} z_1 + z_3$$

근사 출력 함수 T_1 을 통하여, 오차항을 무시한 좌표변환과 입력변환은 다음과 같다.

$$\tilde{T}_2 = \frac{1}{l} z_2 + z_4$$

$$\tilde{T}_3 = \frac{g}{l} \tan z_3$$

$$\tilde{T}_4 = \frac{g}{l} \sec^2(z_3) z_3 = \frac{g}{l} \sec^2(z_3) z_4$$

$$w' = \frac{2g}{l} \sec^2(z_3) z_4^2 + \frac{g}{l} \sec^2(z_3) w \quad (43)$$

식(43)을 이용하여 변환된 좌표계에서 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{T}}_1 \\ \dot{\tilde{T}}_2 \\ \dot{\tilde{T}}_3 \\ \dot{\tilde{T}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{T}_2 \\ \tilde{T}_3 \\ \tilde{T}_4 \\ w' \end{bmatrix} \quad (44)$$

또한 변환된 좌표계에서 무시된 오차항을 고려한 전체 운동 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{T}}_1 \\ \dot{\tilde{T}}_2 \\ \dot{\tilde{T}}_3 \\ \dot{\tilde{T}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{T}_2 \\ \tilde{T}_3 \\ \tilde{T}_4 \\ w' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ z_3^2 w / 2 \\ z_3 z_4 w \\ z_4^2 w + z_3 w^3 \end{bmatrix} \quad (45)$$

식(45)의 근사 선형화는 오차항들이 상태와 제어 좌표계의 결합된 3차항이므로 차수 2의 근사화이다. 제안된 선형화를 비교하기 위하여 식(37)의 간략화된 모델에 대하여 Taylor 급수의 3차 선형화는 다음과 같다.

$$\dot{z} = Az + bw + \begin{bmatrix} 0 \\ gz_3^3/3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -Jz_3^2/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} w \quad (46)$$

여기서,

$$A = af(z_0)/az = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; b = g(z_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

식(45)와 식(46)의 차이점은 Taylor 급수에 의한 선형화가 독립진자 각도의 3차항으로 표현된다는 것이다. 즉, 독립진자의 각도가 큰 경우, 오차의 3차항은 매우 중요한 역할을 하고 있음을 알 수 있다. 반면에 좌표 변환에 의한 오차는 독립진자의 각도에 대하여 2차의 함수로 표현되므로 오차항의 효과가 Taylor 급수의 경우보다 무시된다. 이와같은 결과를 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 살펴보자.

3-2. 독립진자 시스템에 대한 제안된 기법의 시물레이션 및 고찰

본 연구에서 그림 3.에 표현된 car의 질량 $M=1\text{Kg}$, 진자의 질량 $m=0.1\text{Kg}$, 길이 $l=1\text{m}$ 로 고려하였다.

또한 초기조건에 대한 독립진자 시스템의 폐경로 특성을 시뮬레이션 하기위하여 모델은 식(34)를 기초로 하고, 제어기는 두가지 부분으로 구성된다. 먼저 식(34)에 대하여 선형 독립성과 포함성 조건 계산을 간략하게 하기 위하여, 평형점이 불변인 상태인

간략화된 모델 식(36)을 얻기 위하여 비선형 보상기 식(35)를 고려 하였다. 그리고, 식(37)을 기초로 근사 선형화를 통한 선형화 입력 식(43)으로 구성 된다. 또한 식(44)로 표현된 근사 선형화 모델에 대하여 계통의 원하는 폐경로의 극점을 (-3, -3, -3)에 위치하기 위하여 상태 제환에 의한 선형 제어기로 구성 된다. 여기서, 제어기 설계의 극점 지정 방법은 도립진자 시스템의 안정화에 주된 관심을 두었으므로 계통 응답의 최적화는 고려 되지 않았다. 즉, 제어 목적은 진자를 수직으로 유지하도록 하며, cart의 위치는 원점 근방에서 유지하는 것이다. 이와 같이 고려된 전체 계통의 블록 선도는 그림 4. 와 같다. 블록 선도에서는 z_d 는 기준신호를 나타낸다.

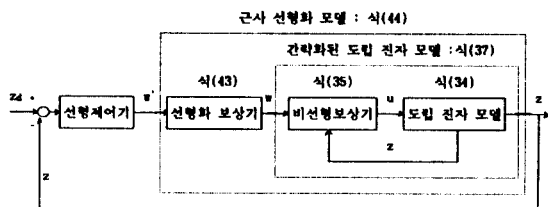


그림 4. 전체 계통에 대한 블록 선도
Fig 4. The Block Diagram for Closed-Loop System

그리고 식(34) 계통에 대한 초기값은 진자의 각도는 20°, 40°, 60°까지이고, cart의 초기 위치는 1m로 하였다. 또한 각각의 속도와 각속도는 0m/sec, 0rad/sec으로 고려 하였다. 또한 제안된 기법을 비교하기 위하여 식(46)으로 표현된 Taylor 급수에 의한 선형화 모델도 폐경로의 극점 지정을 (-3, -3, -3)에 두었다.

그림 5, 그림 6, 그림 7에 각각의 초기 위치에 따른 근사 선형화와 급수 전개에 의한 선형화의 응답을 나타내고 있다. 그림 5와 그림 6의 결과에서 도립진자의 안정화를 근사 선형화와 Taylor급수 2차 선형화는 유사한 결과를 보여 주고 있으며, 3초 경과후에는 진자는 도립된 상태에 도달됨을 보여준다. 그러나 그림 7에서 보여준 초기 값이 60°에서는 근사 선형화는 수렴하고 있으며, Taylor급수에 의한 선형화 모델은 불안정한 상태로 됨을 보여주고 있다. 즉, 제안된 근사 선형화 기법이 급수 전개에 의한 선형화가 도립진자 각도의 3차항으로 표현되기 때문이다. 즉 도립진자의 각도가 큰 경우, 오차의 3차항은 매우 중요한 역할을 하고 있음을 보여 주었다. 반면에 좌표 변화에 의

한 오차는 도립진자의 각도에 대하여 2차의 함수로 표현되므로 오차항의 효과가 Taylor급수의 경우 보다 무시된 것을 보여 주고 있다.

VI. 결 론

본 연구에서는 Krener의 근사 선형화 기법을 이용하여 완전 선형화가 불가능한 모델에 적용하여 근사 선형화를 유도하였으며, 선형화 차수에 대한 계산적 절차와 근사 출력함수에 대한 구성을 유도하여 계산 하였다. 제어 대상은 자유도가 2이며, 입력이 1인 도립진자 계통에 적용하였다. 먼저 도립진자의 모델을 평형점이 불변인 상태에서 부분적 비선형 보상을 통하여 간략화된 모델을 유도하였으며, 이 모델을 이용함으로써 모델 근사화 차수의 계산과 포함성 조사를 간략화 할 수 있었으며, 근사 출력 함수를 보다 편리하게 구성할 수 있었다. 계산 결과, 도립진자 모델은 2차의 근사 선형화가 가능하고, 차수 1 포함성을 식(38)을 통하여 만족하고, 차수 2에 대한 조건은 만족하지 않는 것을 보였다. 차수 1의 포함성이 만족하므로 근사 출력 함수의 계산은 식(42)와 같이 얻어진다. 결과적으로 얻어진 차수 2의 근사 선형화 모델을 얻었다. 또한 제안된 근사 선형화를 비교하기 위하여, Taylor 급수 선형화 모델을 고려 하였다.

Taylor 급수에 의한 선형화 모델의 오차항이 도립진자 각도의 3차항으로 표현된다는 것이다. 즉 도립진자의 각도가 큰 경우, 오차의 3차항은 매우 중요한 역할을 하고 있음을 알 수 있다. 반면에 좌표 변화에 의한 오차는 도립진자의 각도에 2차항으로 표현되므로 오차항의 효과가 Taylor 급수의 경우 보다 무시된다. 이와같은 결과를 근사선형화 모델과 Taylor 급수 선형화 모델에 동일한 극점 배치를 하여, 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 살펴 보았다. 시뮬레이션 결과 근사 선형화 모델이 Taylor 급수에 의한 모델 보다 더 넓은 동작 범위를 보여 주고 있다.

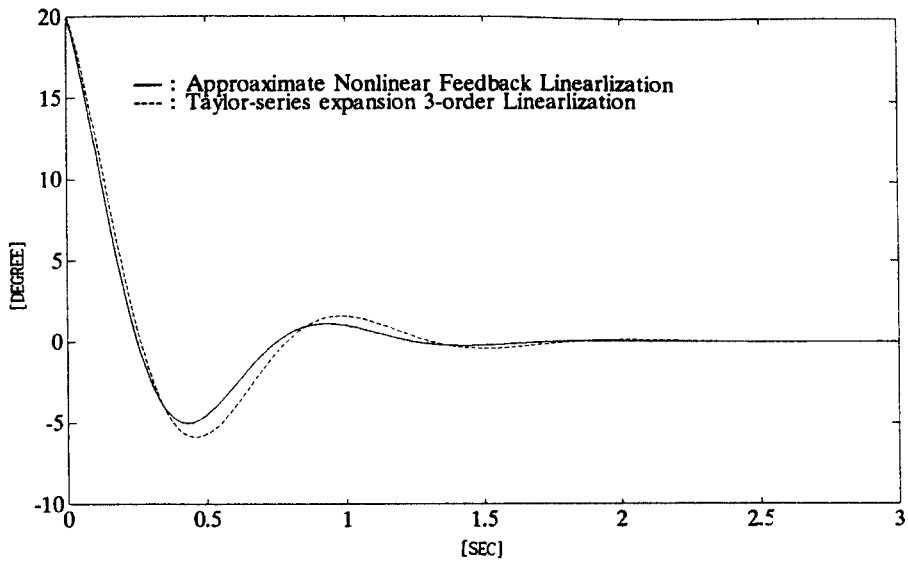


그림 5. 초기값 20° 에 대한 각도 변화

Fig 5. Angular displacement at the initial value of 20°

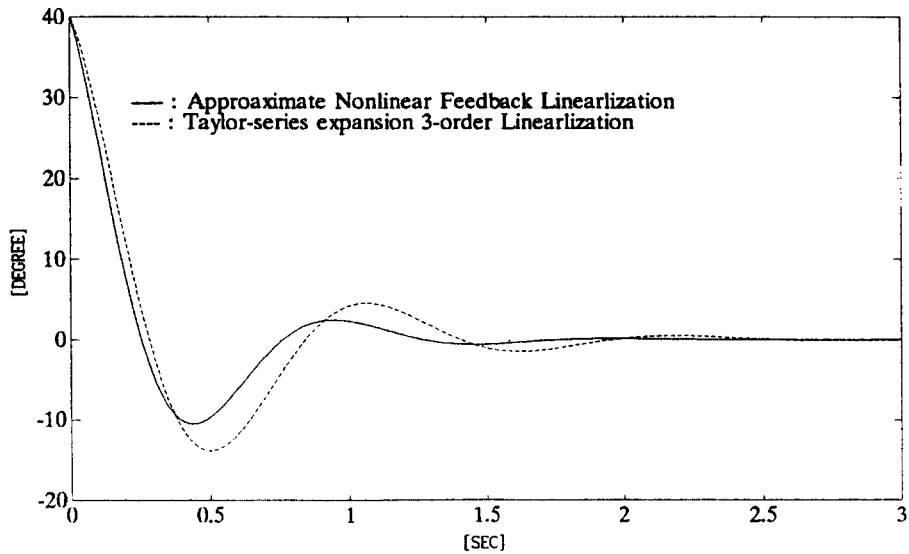


그림 6. 초기값 40° 에 대한 각도 변화

Fig 6. Angular displacement at the initial value of 40°

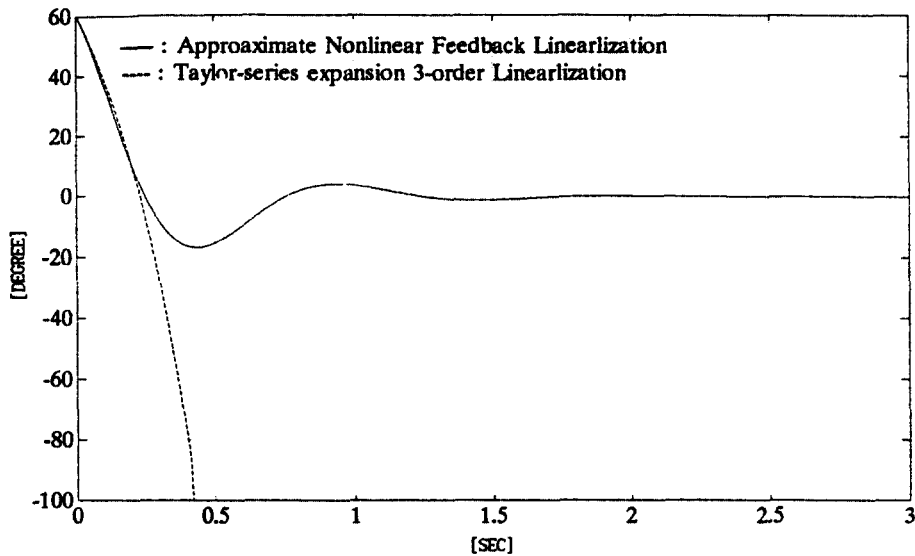


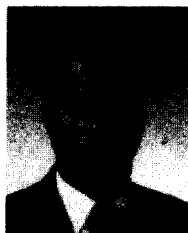
그림 7. 초기값 60° 에 대한 각도 변화
Fig 7. Angular displacement at the initial value of 60°

참 고 문 헌

1. R.H.Cannon, "Dynamics of physical system," McGraw-Hill, N.Y, 1967
2. K.Furuta & T.Okutani and H. Sone, "Computer control of a double inverted pendulum," Comput. & Elect.Eng., Vol.5, pp. 67-84, Nov. 1978.
3. Qing Feng and Kazuo Yamafuji, "Design and simulation of controlsystems of an inverted pendulum," Robotica, Vol.6, pp. 235-241, Mar. 1987.
4. K. Furuta & T. Ochiai and N.One, "Attitude control of a triple inverted pendulum," Int. J. Control, Vol.39, No.6, pp. 1351-1365, 1984.
6. B. Bavarian & B. F. Wyman and H. Hemami, "Control of the constrained Planar simple inverted pendulum," Int. J. Control, Vol.37, No.4, 741-753.
7. J. Krener, "Approximate Linearization Linearization by State Feedback and Coordinate Change," Sys. & Con. Letters, pp.181-185, 1984.
8. N.S. Bedrossian, "Approximate Feedback Linearization: The Cart-Pole Example," IEEE Int. Con. Robotics and Automaiton, pp. 1987-1992, 1992.
9. L. R. Hunt, R. Su and G.Meyer, "Global Transformations of Nonlinear Systems," IEEE Tran. AC-28, PP.24-31, 1983.
10. C.Kravaris and C.B Chung, "Nonlinear State Feedback Synthesis by Global Input /Output Linearization," AICHE J. Vol 33, 1987.
11. L. R. Hunt, R. Su and G. Meyer, "Design for Multiinput Nonlinear System," Diff. Geo, Cont. Theory, 1983.
12. R. Su, G. Meyer, R. L. Hunt, "Robutness in Nonlinear Control," Differential Geomentric Cont. Theory, 1983.
13. R. Su, "On the Linear Equivalent of Nonlinear Systems," Syst. Contr. Lett. vol-2, PP. 48-52, 1982.
14. I. J. Ha and G. Gilbert, "Robust Tracking in Nonlinear System," IEEE Trans., AC-32, PP. 763-771, 1987.
15. A. Isidori & A. J. Krener, "On Feedback

Equivalence of Nonlinear Systems” Sys. & Cont. Letters, Vol-2, PP.118-121, 1982.

16. A. Isidori, “Nonlinear Control Systems : An Introduct ion,” Springer-Verlag, 1985.



李 鍾 龍(Jong-Yong Lee) 正會員
1957년 1월 19일생
1983년 2월 26일 : 한양대학교 원자
력 공학과 졸업
1988년 2월 23일 : 광운대학교 대학
원 전자 공학과 졸
업
1991년 8월 : 광운대학교 대학원 박
사과정 수료

李 相 孝(Sang Hyo Lee) 正會員
1941年 5月 23日生
1969年 2月 : 首都 工科大学 電氣工
學科 卒業(工學士)
1971年 2月 : 延世大 大學院 電氣工
學科 卒業(工學碩士)
1981年 2月 : 延世大 大學院 電氣工
學科 卒業(工學博士)

1984年 : U.C. Berkely 客員研究員
現在 : 光云大學校 制御計測工學科 教授