論 文

신경회로망을 이용한 내삽법에 관하여

準會員 文 龍 浩* 正會員 金 侑 信* 正會員 孫 慶 植*

On the Interpolation Using Neural Network

Yong Ho Moon*, Yoo Shin Kim*, Kyung Sik Son* *Regular Members*

요 약

본 논문에서는 신경회로망을 이용하여 함수 내삽을 위한 방법을 제안한다. 사용한 신경회로망의 구조는 3-layer포셉트론이고 학습 알고리듬은 은닉층 가변 오차역전파알고리듬이다. 내삽하는 함수는 sin(7 X), 3rd order polynomial 및 사각파이다. 내삽된 함수들의 근평균제곱오차(root mean squared errors)는 각각 0.00258, 0.00164 및 0.00116이다.

Abstract

In this paper we have proposed a new method to implement the interpolation of the functions, using a neural network. The architecture of neural network is a three-layer perceptron and the training algorithm is a modified error back propagation algorithm adding neurons to hidden layer. The interpolated functions are sin(7 X), 3rd order polynomial $0.5\ X^3-2\ X^2+X+2.5$ and rectangular pulse $0.99\ U\ (X-0.2)\ -0.99\ U(X-0.8)+0.01$, where U(X) is the unit step. The root mean squred errors of the interpolated functions are 0.00258, 0.00164 and 0.00116 respectively.

I. 서 론

Kolmogrov[1]는 $[0.1]^n$에서 R^m으로 사상하는 어떠한 연속함수 f에 대해서도 이를 구현하는 3-layer의 신경회로망이 존재한다는 것을 증명하였다. 이 증명에서 은닉층의 뉴우런갯수는 2n+1이 되어야 한다. 여기서 n은 차원수이다. 한편 Nielsen[2]은 인닉층 뉴우런의 갯수가 2n+1이라는 가정을 하지 않더라도 함수 f가 square integrable하면 3-layer의 신경회로망으로 함수가 근사됨을 이론적으로 보였다. Stinchcombe과 White[3]는 다층 feed ford network를 이용하여 임의의 함수를 한계가 있는 가중치를 이용하여 주어진 정확도로 근사화 시킬 수 있음을 이론적으로 보였다. Jones[4]는 이를 이용하여 time series prediction을 했다. 최근에 Chiang과 Fu[5]는 Rumelhart[6]가 제안한 오차역전파알고리듬을 변형시켜 함수 근사화에 적용하였다. 그들은 다층 은닉층을 가진 퍼셉트론구조에 활성함수로 2차 sigmoid함수를 사용하고 이를 함수 근사법에 적용하여 그 결과를 sigmoid 활성함수를 가진 전통적인 다층퍼셉트론구조와 비교하였다. 그들은 sin(x)등의 몇가지 함수를 신

*釜山大學校 電子工學科
Dept. of Electronics Engineering, Pusan Univ.
論文番號 : 93-92

경회로망을 사용하여 내삽하였다.

본 논문에서는 신경회로망의 일종인 3-1 ayer 퍼셉트론을 사용하여 주어진 함수를 내삽하는 새로운 방법을 제안하였다. 학습에 이용한 알고리듬은 은닉층 가변 학습알고리듬[7]으로, 이것은 중복학습방지 알고리듬과 은닉층 뉴우런을 일정한 규칙에 의해 자동적으로 발생시켜 학습을 수행하는 알고리듬이 결합된 것이다. Chiang 과 Fu가 제안한 학습알고리듬은 기존의 오차역전파알고리듬의 골격을 그대로 유지하면서 활성함수를 2차 sigmoid로 바꾸고 오차변화의 크기에 따라 임의로 제안된 네가지 규칙이 결합된 것이다. 첨가된 네 가지 학습규칙은 각각 heuristic한 변수들을 포함하고 있어 본 논문에서 제안한 방법보다 heuristic하게 결정해야 할 변수가 6개나 더 많다. 따라서 그들의 학습 알고리듬은 학습시키는 과정이 본 논문의 알고리듬보다 훨씬 어렵고 복잡하다.

Ⅱ. 내삽법 구현을 위한 신경망 구조

다층 퍼셉트론의 구조는 입력층과 출력층 그리고 그 사이에 은닉층으로 구성된다. Rumelhart가 제안한 역전파알고리듬(backpropagation)은 가중치에 대한 오차함수의 급하강법(steepst descent method)을 사용하여 반복적 계산으로 오차를 최소화하는 것이다. 이의 학습을 위한 역전파 알고리듬은 다음과 같다.

$$E=\sum_p E_p=\frac{1}{2}\sum_p\sum_k (t_{pk}-O_{pk})^2 \tag{1}$$

$$\triangle w_{kj}=-\eta\frac{\partial E}{\partial w_{kj}} \tag{2}$$

$$\delta_{pk}=(t_{pk}-O_{pk})\, f'(net_{pk}) \tag{3}$$

$$\delta_{pj}=f'(net_{pj})\sum_k \delta_{pk}\, w_{kj} \tag{4}$$

$$\triangle_p w_{kj}(n)=\eta\,\delta_{pk}O_{pj}+\alpha\triangle_p w_{kj}(n-1) \tag{5}$$

k : 출력층의 k번째 뉴우런
j : 은닉층의 j번째 뉴우런
p : p번째 패턴

각 층은 뉴우런으로 구성되고 각 층에 있는 뉴우런은 인접층과 서로 연결되어 각 연결은 가중치를 가진다. 그 구조는 다음 그림1과 같다. 여기서 t_{pk}는 p번째 패턴에 대한 k번째 출력이고 o_{pk}는 실제 나오는 출력이다.

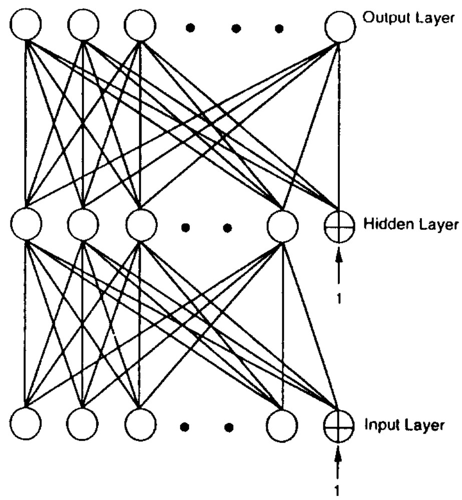

그림 1. 다층 퍼셉트론의 구조
Fig 1. The stucture of multi-layer perceptron

본 논문에서는 1차원 함수에 내삽법을 다루기 때문에 입출력층의 뉴우런 수를 각각 1개로 하였다.

Ⅲ. 학습알고리듬

학습시켜야 하는 총 패턴 수를 n_p라고 하자. 종래의 방법은 모든 학습패턴의 오차 합계가 어떤 ε보다 작을 때까지 모든 학습패턴을 매 학습 때마다 학습시키게 된다. 따라서 이미 학습이 되었다고 생각되는 것까지 중복해서 학습과정을 거치게 된다. 학습시켜야 할 모든 패턴을 한번 신경회로망에 입력시켜 출력을 계산하여 가중치를 수정하는 과정을 반복횟수 1회라고 정의한다. 식(1)에서 계산된 각 패턴의 오차의 합을 패턴 수로 나눈 것을 평균오차라 정의한다. 그 식은 다음과 같다.

$$E=\frac{1}{2}\sum_k^{n_p}(t_{pk}-o_{pk})^2 \tag{6}$$

$$\bar{E}=\frac{1}{n_p}\sum_i^{n_p}E_i \tag{7}$$

여기서 $\bar{E}$ 는 평균오차이고 E_i는 각 패턴의 오차이

다. 학습은 윗층에서 아래층으로 오차가 δ_{pk}에 의해 역전파하여 식(5)에 의해 가중치를 수정함으로써 이루어진다. 각 패턴을 학습시킬 때 평균오차는 주어진 기준치(ε)보다 작지 않지만 각각의 오차를 E_p라 했을 때 어떤 패턴들은 ε 보다 작을 경우가 생긴다. 이 패턴들을 $p_1, p_2, \cdots p_l$이라 하고 패턴들의 오차를 $E_{p1}, \cdots, E_{pl}$이라고 한다.

$$E_{p1}, \cdots, E_{pl} < \varepsilon \qquad (8)$$

이 패턴 $p_1, p_2, \cdots p_l$에 대해서는 식 (4)와 (5)에 따라 δ_{pk}값이 무척 작기 때문에 식(1)에 의해 가중치 변화에 영향을 거의 미치지 않는다. 그러나 종래의 역전파 알고리듬의 경우에는 이러한 패턴들도 매번 학습시키는 불필요한 과정을 수행하여 학습속도를 느리게 한다. 학습 패턴 감소 알고리듬에서는 이러한 패턴 $p_1, p_2, \cdots, p_l$의 학습 과정을 생략하여 수렴속도를 개선한다. 알고리듬의 그림2와 같다.

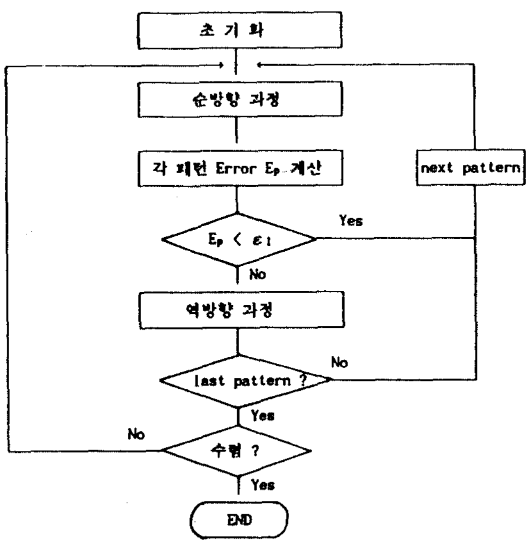

그림 2. 학습 패턴 감소 알고리즘의 순서도

Fig 2. Flowchart of omitting redundant learning algorithm

기존의 역전과 알고리듬에서 은닉층 뉴우런의 갯수는 보통 미리 주어지고 학습과정에서 은닉층의 뉴우런 갯수는 변화하지 않는다. 본 논문에서 사용한 알고리듬은 앞에서 설명한 학습 패턴 감소 알고리듬을 이용하여 처음 학습을 시작할 때 은닉층의 뉴우런 수를 1-2개부터 시작한다. 이때 패턴들의 평균오차가 주어진 은닉층의 뉴우런 수로는 원하는 수준보다 더 떨어지지 않아 학습을 멈추기에 충분한 평균오차 수준에 이르지 못한다. 또한 학습시 일어나는 Oscilation으로 인하여 학습이 올바르게 이루어지지 않아 수렴하지 못할 경우가 있다. 그래서 학습 초기에 Oscilation을 극복하기 위해 기준치보다 적은 오차 감소율이 일정한 횟수이상 나타나면 뉴우런이 일정 갯수까지 첨가되도록 했다. 그 이후 오차의 변화률 ($\triangle E = E(i) - E(i-1)$)이 미리 정한 기준값보다 적고 평균오차가 기준치보다 적어서 학습은 되어있지 않지만 학습이 더 이상 이루어지지 않을 경우를 극복

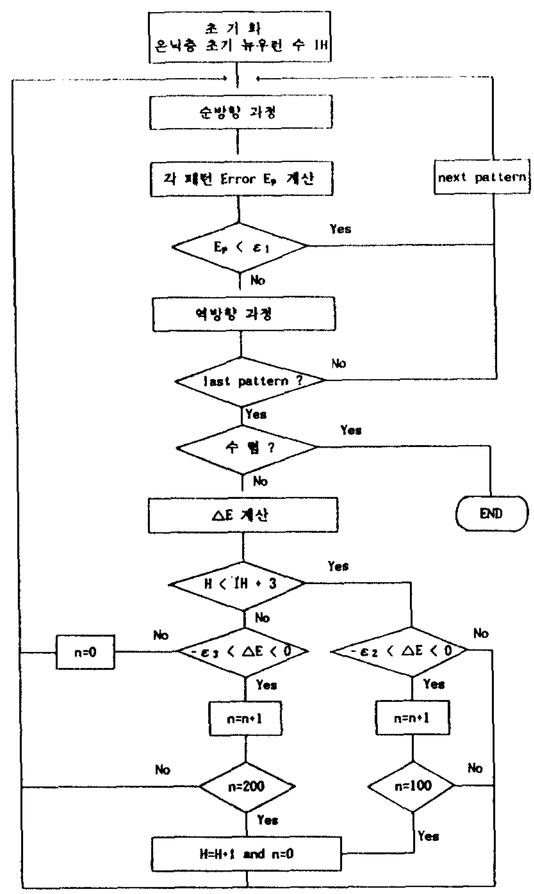

그림 3. 은닉층 뉴우런 추가 학습 알고리듬의 순서도

Fig 3. Flowchart of back propagation algorithm adding neurons to hidden layer

하기 위해서 기준치보다 적은 오차 감소율이 연속적으로 일정한 횟수이상 나타나면 뉴우런이 첨가되게 하였다. 이렇게 추가된 은닉층의 뉴우런과 연결되는 모든 가중치는 적은 값으로 초기화 시킨다. 이는 새로운 은닉층 뉴우런을 추가시킴으로써 생기는 가중치를 작은 값으로 초기화하여 지금까지 해온 학습에 영향을 줄이기 위한 것이다. 그리고 같은 방법으로 전체 학습을 멈추기 위하여 오차가 미리 설정해 놓은 기준값 이하가 될 때까지 수렴시켜 나간다.

이러한 방법을 사용하여 학습을 시켜 나가면 학습이 진행됨에 따라 은닉층의 뉴우런 수는 증가하게 되고 수렴이 이루어져 학습이 완료되었을 때 은닉층 뉴우런 수는 어떤 값에 이른다. 이 알고리듬의 순서도는 그림3과 같다.

Ⅳ. 실험결과 및 검토

함수 내삽은 본 논문에서 다음과 같이 이루어진다. 주어진 표본점들을 신경회로망으로 학습시키고 내삽해야 하는 정의역내에 있는 모든 점들 X를 입력시킬 때 출력층에서 나오는 값 Y가 내삽값이다. 본 논문에서 실험한 함수는 세종류로 sin함수, 3차 polynomial 및 rectangular pulse이다.

1) $Y=\sin(7X)$에 대한 내삽

정의역은 [0, 1]으로 하고 12개의 표본점을 등간격으로 선택해서 학습을 시켰다. 학습초기의 은닉층 뉴우런 수는 2개로 시작했고 학습이 끝났을때는 7개였다. 이때 내삽오차와 반복횟수와의 관계는 그림 4이다. 내삽하려는 점은 100개로 선정해서 입력시키고 이때 나오는 출력을 구하였다. 원파형과 내삽된 파형을 비교한 것이 그림 5에 이다.

그림 5에서 가장 큰 오차는 0.109이고 근평균제곱오차는 0.00258이였다.

2) $Y=0.5X^3-2X^2+X+2.5$에 대한 내삽

정의역은 [0, 3]으로 하고 20개의 표본점을 등간격으로 선택해서 학습시켰다. 학습 초기의 은닉층 뉴우런수는 2개로 시작하여 학습시켰다. 학습이 끝났을 때의 은닉층 뉴우런 수는 5개였다. 이때 내삽오차와 반복횟수와의 관계는 그림 6이다. 300개의 점을 입력

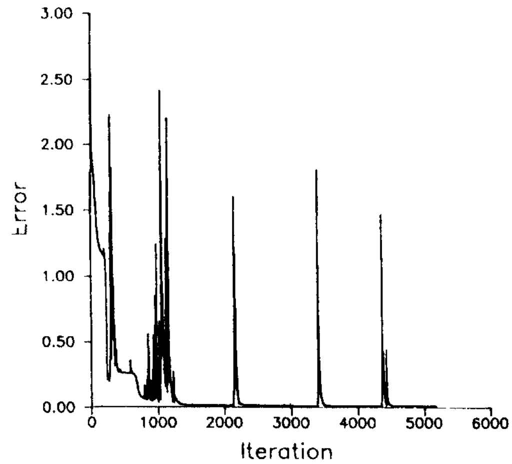

그림 4. 오차와 반복횟수와의 관계
Fig 4. The relation between error and iteration

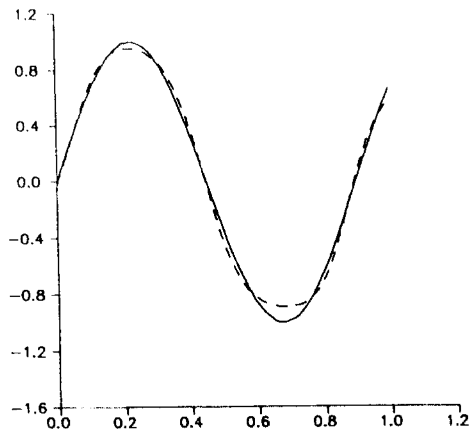

그림 5. sin(7X)와 신경회로망을 이용한 내삽법에 의한 함수 근사그래프(실선은 sin함수, 점선은 내삽함수)
Fig 5. Sin(7X) and the its interpolated graph through neural net work.(solid line is Sin function and dashed line is its interpolated function)

시켜 내삽을 하였는데 출력중 가장 큰 오차는 0.175이고 근평균제곱오차는 0.00164이였다. 원파형과 내삽된 파형을 비교한 것이 그림 7이다.

3) $F(X)=0.99\,U(X-0.2)-0.99\,U(X-0.8)+0.01$에 대한 내삽

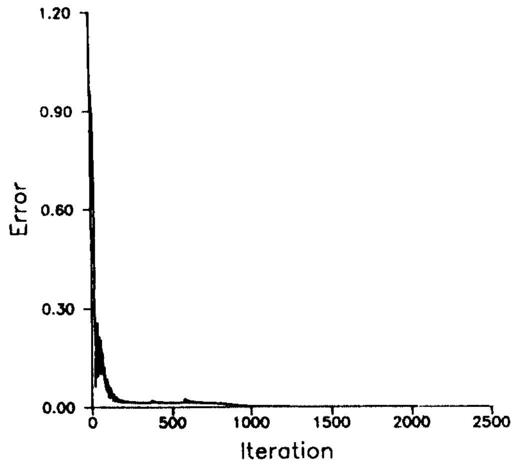

그림 6. 오차와 반복횟수와의 관계
Fig 6. The relation between error and iteration

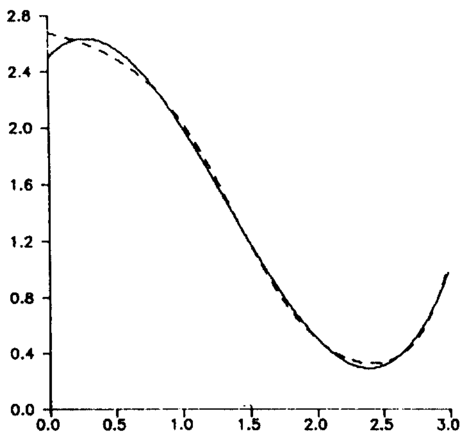

그림 7. 3차 polynomial과 신경회로망을 이용한 내삽법에 의한 함수 근사그래프(실선은 3차 다항함수, 점선은 내삽함수)
Fig 7. 3rd order polynomial and interplated graph through neural network(solid line is 3th order polynomial and dashed line is its interpolated function)

여기서 U(X)는 unit step함수이며 정의역은 [0, 1]이다. 초기 은닉층 뉴우런 수는 1개로 하고 7개의 표본점을 취하여 학습시켰다. 학습이 끝났을 때 은닉층 뉴우런 수는 4개였다. 이때 내삽오차와 반복횟수와의 관계는 그림 8이다. 내삽을 위해 100개의 점들을 입력시켜 출력을 구하였다. X=0.2와 0.8에 존재하는 불연속점에 대해서도 근사가 잘 되었다. 원파형과 내삽된 파형을 비교한 것이 그림 9이다. 그림 9에서 가장 큰 오차는 0.03이고 근평균제곱오차는 0.00116이였다.

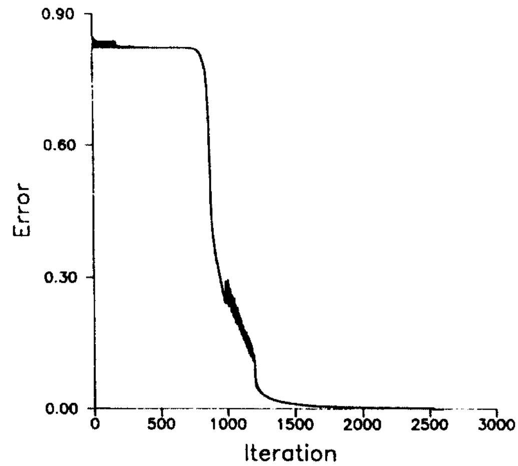

그림 8. 오차의 반복횟수와의 관계
Fig 8. The relation between error and iteration

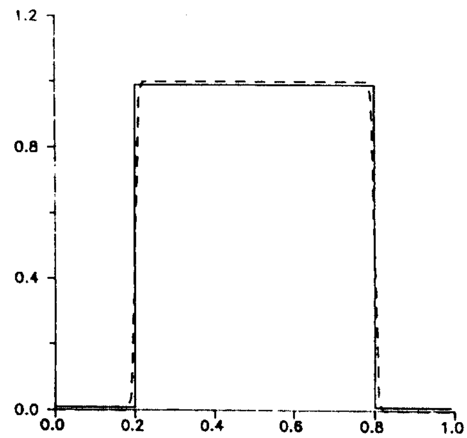

그림 9. rectangular pulse와 신경회로망을 이용한 내삽법에 의한 함수 근사그래프.(실선은 사각함수, 점선은 내삽함수)
Fig 9. Rectangular pulse and its interpolated graph through neural network.(solid line is rectangular pulse and dashed line is its interpolated function)

V. 결 론

본 논문에서는 신경회로망의 일종인 3-layer 퍼셉트론을 사용하여 sin(7 X),3차 polynomial및 사각펄스(rectangular pulse)를 내삽하였다. 본 논문에서 내삽한 함수의 근평균제곱오차는 각각 0.00258, 0.00164및 0.00116이였다. 3-layer퍼셉트론은 은닉층 뉴우런 수 가변에 의한 오차역전파알고리듬으로 학습시켰다. 특히 본 논문에서 제안한 방법에 의한 함수의 내삽법은 사각펄스와 같은 급격한 변화(혹은 불연속성)를 갖는 함수에도 잘 적용됨을 알 수 있었다 다차원 함수일 경우 함수 내삽은 일반적인 수치해석법으로는 무척 힘들다. 따라서 신경회로망으로 다차원 함수를 내삽하는 것은 의의가 클 것이다. 이는 앞으로의 연구과제이다.

참 고 문 헌

1. R. Hecht-Nielson, "Kolmogorov Mapping Neural Network Existence Theorem" In IEEE First International Conference on Neural Networks pages III(11-13), 1987
2. R. Hecht-Nielson, "Theory of the Backpropagation Neural Network" IJCNN'89 Vol 1 pp. 593-605
3. Maxwell Stinchcombe and Halbert White, "Approximationing and Learning Unknown Mapping Using Multilayer Feedforward Networks with Bounded Weights." IJCNN'90, Vol 3 pp. 7-16
4. R.D. Jones, Y.C. Lee, C.W. Barnes, G.W. Flake, K.Lee, P.S. Lewis and S. Qian, "Function Aproximation and Time Series Prediction with Neural Networks." IJCNN'90, Vol 1 pp. 649-665
5. Cheng-Chin Chiang and Hsin-Chia Fu, "A Variant of Second-Order Multilayer Perceptron and Its Application to Fnction Approximations" IJCNN'92, Vol 3 pp.887-892
6. D.E. Rumelhart, G.E. Hinton, and R.J. Williams, "Learning internal representations by error propagation" in D.E.Rumelhartand J.I. McCl-elland(Eds.), Parallel Distributed processing : Explorationsin the Microstructure of Congnition, Vol. 1 : Foundations, MIT press, pp. 318-362, 1986.
7. 백준호, 김유신, 손경식, "은닉층 추가에 의한 역전파 학습 알고리듬," 대한전자공학회 논문지, 29-B, pp.292-299, 1992,4.

文 龍 浩(Yong Ho Moon) 준회원

1969년 5월 5일생

1992년 2월 : 부산대학교 전자공학과 졸업(공학사)
1992년 3월~현재 : 부산대학교 대학원 전자공학과 석사 3학기 과정

孫 慶 植(Kyung Sik Son) 정회원

1950년 3월 25일생

1973년 2월 : 부산대학교 전자공학과 졸업(공학사)
1977년 8월 : 부산대학교 대학원 전자공학과 졸업(공학석사)
1979년~1982년 : 부산대학교 전자공학과 전임강사
1985년 1월 : 미국 알라바마 주립대학 박사과정 수료
1985년 10월 : 부산대학교 전자공학고 조교수
1991년 8월 : 경북대학교 대학원 전자공학과 졸업(공학박사)
1991년 10월~현재 : 부산대학교 전자공학과 부교수
※주관심분야 : 디지탈 신호처리 및 신경회로망 등임

金 侑 信(Yoo Shin Kim) 정회원

1951년 9월 21일생

1974년 2월 : 서울대학교 전자공학과 졸업(공학사)
1974년 3월~1978년 8월 : 한국원자력 연구소 근무
1980년 6월 : U.C.Berkely 전자공학과 졸업(공학석사)
1983년 6월 : Stanford대학 박사과정 수료
1983년 9월~현재 : 부산대학교 전자공학과 부교수
※주관심분야 : 신경회로망 알고리듬 개발 및 집적회로 등임