

## 이산 푸리에 변환의 재귀형 구현과 그의 응용에 관한 연구

正會員 梁原榮\*, 白鍾皓\*, 白俊基\*

### Recursive Implementation of DFT and Its Applications

Won Young Yang\*, Jong Ho Paik\*, Joon Ki Paik\* Regular Members

#### 要 約

본 논문은 이산 푸리에 변환을 계산하는 새로운 알고리즘과 그의 구현 방식을 제시한다. 제안된 알고리즘은 음성 신호와 같은 실시간 데이터를 온라인적으로 처리해야 하는 분야에서 고속 푸리에 변환보다 효율적으로 계산을 수행할 수 있다는 것이 첫 번째 장점이고, 두 번째로는 구현상의 문제로서 Single-Instruction Multiple-Data Stream(SIMD) 계산구조에서 병렬처리가 가능하다는 것이 또 하나의 장점이다. 일반적인 1차원 신호의 푸리에 변환에서, 제안된 알고리즘과 고속 푸리에 변환방식에서 필요한 계산시간을 각각 구하여 상대적 효율성을 비교하였고, 시간-주파수해석 및 스펙트럼 추정에 적용된 예를 제시한다.

#### ABSTRACT

In this paper we present a new computation method which recursively evaluates Discrete Fourier Transform (DFT). The proposed algorithm has two advantages. The first is that it is useful where the DFT is to be computed on-line with real time input. The second is that it is well suited to Single-Instruction Multiple-Data Stream (SIMD) architecture for its implementational efficiency. In evaluating DFT coefficients of one dimension signal, the relative performance of the proposed algorithm is compared with Fast Fourier Transform (FFT) by computing the required time. Finally, we present its applications to on-line Fourier analysis and spectrum estimation.

\* 중앙대학교 전기공학과  
Chung-Ang University, Dept. of Electrical Engineering  
論文番號 : 94336  
接受日字 : 1994年 11月 24日

### I. 서론

연속적으로 들어오는 이산 신호에서 특정 시간의 데이터 블록에 대한 주파수 특성을 분석하기 위한 방법으로 이산 푸리에 변환(discrete Fourier transform, DFT)을 사용할 경우 고속 푸리에 변환(fast Fourier transform, FFT) 알고리즘이 매우 효율적이다[1]. Hostetter는 푸리에 급수식을 이산 시간 상대방정식의 형태로 바꾸어서 그 푸리에 계수들을 추정하기 위해 관측기(Observer)를 적용한 알고리즘을 제안한 바 있다[2].

본 논문에서는 연속적으로 들어오는 이산 신호의 경우 이산 푸리에 변환의 길이가 N이라고 가정하면, 데이터 블록  $\{x(m), x(m+1), \dots, x(m+N-1)\}$ 에서 가장 먼저 들어온 샘플  $x(m)$ 의 영향을 제거하고 새로운 샘플  $x(m+N)$ 을 도입함으로써, 새로운 데이터 블록  $\{x(m+1), x(m+2), \dots, x(m+N)\}$ 의 이산 푸리에 변환을 계산하기 위하여 바로 전 단계의 데이터 블록에 대한 푸리에 변환 결과를 이용하는 재귀형 이산 푸리에 변환 알고리즘을 제안한다.

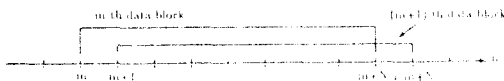


그림 1. 연속적으로 들어 오는 이산 신호열

### II. 재귀형 이산 푸리에 변환 알고리즘

연속적으로 들어오는 이산 신호열이 그림 1에 보여진다. 여기에서 m번째 데이터 블록을

$$\{x_m(0), x_m(1), \dots, x_m(N-1)\} = \{x(m), x(m+1), \dots, x(m+N-1)\} \quad (1)$$

라고 정의하자. 이 신호에 대한 N-point 이산 푸리에 변환은

$$X_m(k) = DFT_N[x_m(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x_m(n)W_N^{nk}, \quad (2)$$

$$W_N = e^{-j2\pi/N} \text{ for } 0 \leq k \leq N-1$$

과 같이 정의된다. 그리고 (m+1)번째 데이터 블록

$$\{x_{m+1}(0), x_{m+1}(1), \dots, x_{m+1}(N-1)\} = \{x(m+1), x(m+2), \dots, x(m+N)\} \quad (3)$$

에 대한 N-point 이산 푸리에 변환은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} X_{m+1}(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x_{m+1}(n)W_N^{nk} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x_m(n+1)W_N^{nk} \\ &= \sum_{n=1}^N x_m(n)W_N^k W_N^{-k} \\ &= \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} x_m(n)W_N^{nk} + x_m(N) - x_m(0) \right\} W_N^{-k} = \{X_m(k) + x_m(N) - x_m(0)\} W_N^{-k}. \end{aligned} \quad (4)$$

여기서  $x_m(N)-x_m(0)$ 은 모든 k에 대해 공통된 상수 값이다. 이러한 식 (4)는  $k=0, \dots, N-1$ 에 대해서 병렬적으로 계산될 수 있는 온라인 재귀형 이산 푸리에 변환식이다.

### III. 수치 계산적 안정도에 관한 해석

재귀형 알고리즘에 대한 수치 계산적 안정도를 알아보기 위하여 식 (4)를 실수부와 허수부로 분리하여 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} Re\{X_{m+1}(k)\} \\ Im\{X_{m+1}(k)\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{2k\pi}{N}) & -\sin(\frac{2k\pi}{N}) \\ \sin(\frac{2k\pi}{N}) & \cos(\frac{2k\pi}{N}) \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} Re\{X_m(k)\} \\ Im\{X_m(k)\} \end{bmatrix} + [x_m(N) - x_m(0)] \begin{bmatrix} \cos(\frac{2k\pi}{N}) \\ \sin(\frac{2k\pi}{N}) \end{bmatrix}$$

식 (5)에 주어진 시스템은 단위원 상의 점  $z = \cos(\frac{2k\pi}{N}) \pm j\sin(\frac{2k\pi}{N})$ 에서 고유치를 가지므로, 입력항(forcing term)이  $P=N/k$ 의 주기를 갖지 않는 한, 위 식은 발산하지 않는다. 그런데 식 (5)의 입력항이 주기  $P=N/k$ 의 주기성을 가지려면  $x_m(N)-x_m(0)$ 의 값이 m에 관하여 주기  $P=N/k$ 의 주기성을 가져야 한다. 왜냐하면 m에 관하여  $\cos(\frac{2k\pi}{N})$ 과  $\sin(\frac{2k\pi}{N})$ 의 값이 상수이기 때문이다. 그러나,  $x_m(N)-x_m(0)$ 의 값이  $m=m_1 + (N/k)i$ (여기서 i는 정수형 변수, N은 정수형 상수)에

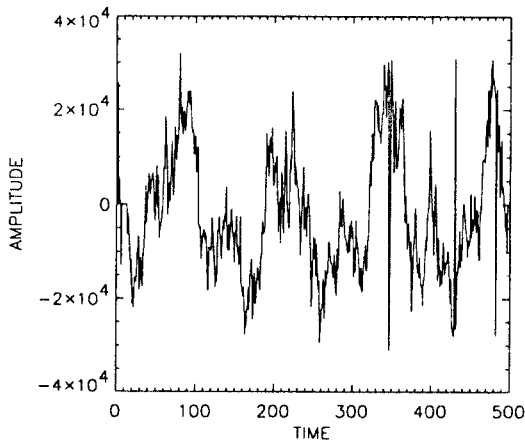


그림 2. 500-point 이산 음성 신호

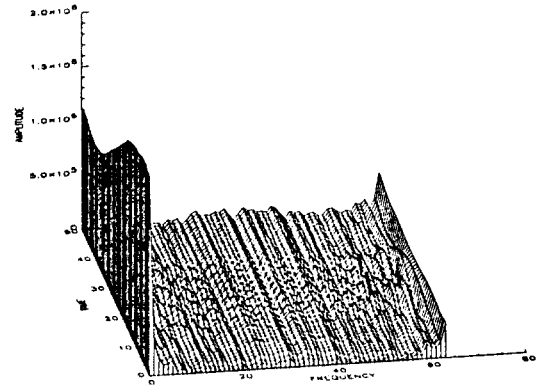


그림 3. 음성 신호의 Spectrogram

대하여 영이 아닌 값을 매번 갖는다면,  $x(n)$ 의 크기는  $n$ 이 커짐에 따라 무한히 커지게 되며, 이러한 경우는 거의 존재하지 않는다. 따라서 식 (5)에 의해 표현된 재귀형알고리즘은 실제적으로 모든 경우에 수치적 안정도를 갖는다고 볼 수 있다.

#### Ⅳ. 온라인 푸리에 해석에의 응용

제안된 재귀형 푸리에 변환 알고리즘은 실시간 데이터를 온라인적으로 처리하는 여러가지 분야에 적용될 수 있으나, 본 절에서는 시간에 따라 변화하는 주파수 특성을 가진 신호의 스펙트럼 분석에 응용해 보기로 한다. 실험에 사용된 신호는 500-point의 16비트로 샘플된 이산 음성 신호이고, 그림 2에 그 파형이 보여진다. 시간에 따라 변화하는 주파수 성분을 해석하기 위해서 매 블록마다 길이 64-point의 직사각형 윈도우를 적용하고, 50개의 연속된 데이터 블록에 대해 재귀형 이산 푸리에 변환을 사용해서 구한 스펙트럼을 그림 3에 도시하였다. 그림 3에서  $x$ 축은 주파수,  $y$ 축은 시간을 의미하며, 시간축은 첫 번째 블록의 이산 푸리에 변환에 대해 시간 지표를 0으로 정한 것이다.

#### Ⅴ. 스펙트럼 추정에서의 응용

이산 신호처리 분야에서 스펙트럼 추정은 신호의 해석 자체뿐만 아니라 코딩 및 복원 등 다양한 응용분야를 갖고

있다. 이와 같은 이유로 오래 전부터 스펙트럼 추정을 위한 여러 방식들이 소개된 바 있다[3]. 이들 중 고속 푸리에 변환에 근거한 방식들이 그 계산상의 효율성으로 인하여 많이 사용되고 있는데, 본 절에서는 Welch의 modified periodogram [4]를 본 논문에서 제안한 재귀형 이산 푸리에 변환을 사용하여 구현한 예를 소개하기로 한다.

일반적으로 스펙트럼의 추정기법으로는 데이터의 윈도우가 직사각형인 periodogram과 직사각형 윈도우를 제외한 데이터 윈도우를 사용하는 modified periodogram이 있다. 이러한 두 방법 모두가 원 신호의 전력 스펙트럼과 데이터 윈도우의 비주기적 자기상관도에 대한 푸리에 변환에 근거한 방법이므로 원 신호에 대한 전력 스펙트럼 값에 대하여 바이어스(실제 신호값에 대한 추정값의 평균 편차)가 발생한다. 또한, 이산 푸리에 변환을 이용하여 스펙트럼을 추정할 경우, 데이터 윈도우의 길이를  $L$ , 원 신호 길이를  $N$ , 자기상관도 인덱스를  $m$ 이라고 가정하면,  $m$ 이  $L$ 에 가까워짐에 따라 periodogram의 계산에 관계되는 원 신호의 데이터 수가 적어지므로 그 추정치의 정확도가 떨어지고, 따라서  $L$ 에 인접한 periodogram은 심하게 변한다. 반면에  $m$ 이 작을 경우에는 periodogram의 계산에 관계되는 데이터의 수가 많으므로 periodogram의 변화 정도는 매우 작다. 그러므로  $L$ 이 큰 경우에는 periodogram의 추정 결과가 주파수에 따라 매우 심하게 변화함을 알 수 있다. 또한  $N$ 이 커짐에 따라 이산 푸리에 변환 주파수

가 더욱 조밀해지므로 전력 스펙트럼의 정확한 추정이 곤란해진다[1].

바람직한 스펙트럼 추정이란 추정 과정에서 불규칙한 동요가 없는 안정된 스펙트럼을 추정하는 것이다. 그러한 이유로 보다 안정된 스펙트럼의 추정을 하기 위하여 Welch가 제안한 modified periodogram averaging 기법을 사용한다[4]. 이 방법은 독립적인 다수의 periodogram에 평균을 취함으로써 불규칙한 동요성분을 제거할 수 있다. Welch의 알고리즘은 Bartlett의 알고리즘에 비하여 적은 스펙트럼 밀도의 주파수에 관하여 바이어스가 적게 발생하므로 보다 정확한 스펙트럼을 추정할 수 있다[5].

Welch의 알고리즘을 간략하게 살펴보면 다음과 같다. 연속 신호에서 샘플된 N개의 이산신호열  $x(n)$ 이 그림 4에서 보여진다.

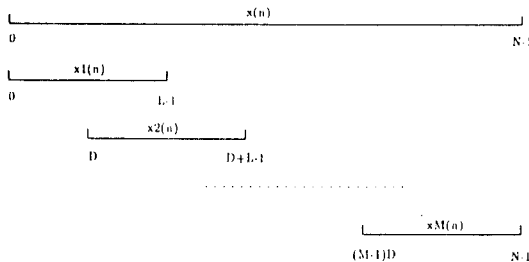


그림 4. 이산 신호열의 분할

여기서  $x(n)$ 의 평균값은 알고리즘상의 간략화를 위하여 영이라고 가정하며, 스펙트럼 밀도를  $P(f)$ ,  $|f| \leq \frac{1}{2}$ 라고 가정하자. 그림 4에서와 같이 중복을 허용하여 L개의 데이터를 갖는 분할을 얻을 수 있으며 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} x_1(n) &= x(n) \\ x_2(n) &= x(n + D) \\ &\vdots \\ x_M(n) &= x(n + (M - 1)D), \\ &n = 0, \dots, L - 1. \end{aligned} \tag{6}$$

여기서 D는 중복되는 부분의 첫 번째 시작점이고, M은 이산 신호열의 분할 수이다. 분할 길이 L의 각각 분할에 대하여 데이터 윈도우  $w(n)$ ,  $n=0, \dots, L-1$ 을 취해서 새로운 신호열  $\{x_1(n)w(n), \dots, x_M(n)w(n)\}$ 을 만든

다. 새로운 신호열에 대한 각각의 푸리에 변환을  $X_1(k), \dots, X_M(k)$ 이라고 정의하면 식(7)과 같다.

$$X_m(k) = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} x_m(n)w(n)e^{-j2\pi nk}. \tag{7}$$

따라서, M개의 분할에 대한 modified periodograms는

$$I_m(f_k) = \frac{L}{U} |X_m(k)|^2, \quad m = 1, \dots, M \tag{8}$$

으로 정의된다. 여기서,  $f_k = \frac{k}{L}$ ,  $k=0, \dots, L/2$ 이고,  $U = \sum_{n=0}^{L-1} w^2(n)$ 이며, 상수 U는 데이터 윈도우에 의한 바이어스를 제거하기 위한 정규화 요소이다. 식(8)의 periodogram들에 대한 평균 스펙트럼 추정값은 다음과 같다.

$$\hat{P}(f_k) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M I_m(f_k). \tag{9}$$

또한, 식(9)의 평균값은

$$E\{\hat{P}(f_k)\} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} h(f)P(f - f_k)df \tag{10}$$

로 정의할 수 있으며, 여기서  $h(f) = \frac{1}{LU} |\sum_{n=0}^{L-1} w(n)e^{j2\pi nf}|^2$ 이고,  $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} h(f)df = 1$ 이다. 식(10)으로부터 데이터 윈도우는 스펙트럼의 넓이가 1이고 폭이  $1/L$ 인 스펙트럼 추정기임을 알 수 있다. 지금까지 소개한 Welch의 알고리즘은 스펙트럼의 추정을 하기 위하여 고속 푸리에 변환을 사용한다. 그런데, 그림 4에서 분할한 데이터의 푸리에 변환을 하기 위해서 본 논문에서 제안된 재귀형 알고리즘을 이용하면 보다 효율적인 계산이 가능해진다.

### IV. 결 론

이산 푸리에 변환의 계산을 하기 위한 방법으로 재귀형 알고리즘을 제안하였다. 이러한 알고리즘은 SIMD구조에 적합하며, 실시간 신호의 스펙트럼을 온라인으로 구해야 하는 분야에 매우 효율적으로 사용될 수 있다.

연속적인 데이터에 대하여 새로운 데이터를 액세스하는 동안에 재귀형 알고리즘의 한 단계를 계산할 수 있다는 전제하에서, 이산 푸리에 변환 계산에 가장 많이 사용하고 있는 고속 푸리에 변환 방법과 본 논문에서 제안한 재귀형 알고리즘과의 처리시간은 표 1과 같이 비교될 수 있다.

표 1. 재귀형 DFT와 FFT의 계산 시간 비교

Algorithm	Data Access Time	Computation Time
Recursive DFT	$N \times \text{times } T_A$	$N \times T_C$
FFT	$N \times T_A$	$\frac{(\log_2 N)}{2} \times N \times T_C$

표 1에서  $T_A$ 는 한 개의 데이터를 액세스하는데 소요되는 시간,  $T_C$ 는 이산 푸리에 변환을 새롭게 갱신하는데 소요되는 시간, 다시 말해서 하나의 복소수 곱셈과 덧셈을 하는데 소요되는 시간을 뜻한다. 개략적으로 말해서 N-point 고속 푸리에 변환 알고리즘은 계산을 시작하기 전에 한 블록의 데이터가 수집되어 있어야 하는데, 이에 반해 재귀형 알고리즘에서는 새로운 데이터를 액세스할 동안에 한 단계의 계산과정이 스며들게 할 수 있으므로 가장 늦게 액세스된 데이터 블록에 대해 이산 푸리에 변환을 구하는 데 단지 한 단계만의 처리 시간이 소요된다.

본 논문에서 제안한 재귀형 계산 알고리즘의 대한 이점은 다음과 같이 요약할 수 있다.

- N개의 프로세서를 가진 SIMD 구조에서 병렬적인 계산처리가 가능하다.
- 이산 푸리에 변환의 데이터 수 N이 2의 멱급수일 필요가 없다.
- 관심 있는 영역의 특정 주파수 point만의 계산이

가능하다.

제안된 재귀형 이산 푸리에 변환의 응용 예로서 시변 주파수 해석과 스펙트럼 추정을 제시하였는데, 이외에도 2차원으로 확장된 알고리즘을 사용한 영상복원의 응용 (6) 및 재귀형 이산 코사인 변환을 사용한 영상 부호화 등의 응용도 앞으로 연구되어야 할 과제이다.

이 논문은 1994년도 과학재단의 특정연구과제 지원에 의해서 연구되었음.

### 참고문헌

1. A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer, *Discrete-Time Signal processing*, Prentice Hall, 1989.
2. G. H. Hostetter, "Recursive Discrete Fourier Transformation," *IEEE trans. Acous., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-28, no. 2, pp. 184-190, April 1980.
3. S. M. Kay and S. L. Marple, Jr., "Spectrum Analysis - A Modern Perspective," *Proc. IEEE*, vol. 69, no. 11, pp. 1380-1419, November 1981.
4. P. D. Welch, "The Use of Fast Fourier transform for the Estimation of Power Spectra : A Method Based on Time Averaging Over Short, Modified Periodogram," *IEEE trans. Audio, Electroacoustics*, vol. au-15, no. 2, pp. 70-73, June 1967.
5. B. Porat, *Digital Processing of Random Signals, Theory and Methods*, Prentice Hall, 1994.
6. W. Na and J. K. Paik, "Image Restoration Using Spectrum Estimation," *Proc. 1994 SPIE's Visual Comm. Image Processing*, vol. 2308, no. 2, pp. 1313-1321, September 1994.



**梁原榮 (Won Young Yang) 정회원**  
 1953년 10월 6일생  
 1975년 2월 : 서울대학교 전기공학과 졸업 (공학사)  
 1981년 2월 : 서울대학교 대학원 전기공학과 졸업 (공학석사)  
 1986년 8월 : Univ. of Southern California 전기공학과 대학원 졸업 (공학박사)

1986년 9월~현재 : 중앙대학교 전기공학과 부교수

※저서 : 신호 및 시스템, 제어 시스템

※주관심분야 : 제어 응용 및 신호처리 분야



**白鍾皓 (Jong Ho Paik) 정회원**  
 1971년 1월 1일생  
 1994년 2월 : 중앙대학교 전기공학과 졸업 (공학사).  
 1994년 9월~현재 : 중앙대학교 대학원 전기공학과 석사과정 재학중  
 ※주관심분야 : 영상처리, 영상복원 및 영상부호화



**白俊基 (Joon Ki Paik) 정회원**  
 1960년 7월 10일생  
 1984년 2월 : 서울대학교 제어계측공학과 졸업 (공학사)  
 1987년 6월 : Northwestern 전기 및 컴퓨터 공학과 대학원 졸업 (공학석사)  
 1990년 6월 : Northwestern 전기 및 컴퓨터 공학과 대학원 졸업 (공학박사)

1990년 7월~1993년 1월 : 삼성전자 반도체 부천연구소 근무 (선임연구원)

1993년 3월~현재 : 중앙대학교 전자공학과 조교수

※주관심분야 : 영상 처리, 영상 복원, 영상처리 VLSI 설계