

확률 변수 변환을 이용한 BPSK 신호의 해석

正會員 尹東源*, 韓榮烈**

Analysis of BPSK Signals using the Transformation of Random Variables

Dong Weon Yoon*, Young Yearl Han** Regular Members

要 約

이 논문에서는 확률 변수 변환을 행하여 수신 신호 크기의 확률 밀도 함수를 유도하여 이를 바탕으로 BPSK 수신기에서의 판정 영역에서 직접 신호를 해석한다. 가산성 백색 정규 잡음(AWGN) 환경에서 위상 오류의 확률 밀도 함수로부터 수신 신호 크기의 확률 밀도 함수를 유도하여 이로부터 판정 영역에서 수신 신호 크기 비교를 위한 임계값을 얻고 동기 및 차동 복조 BPSK 신호를 해석한다. Rayleigh 페이딩 환경에서는 위상 오류의 확률 밀도 함수를 새로운 형태로 유도하여 나타내고 이로부터 신호 크기의 확률 밀도 함수를 유도한 후 동기 복조 BPSK 신호를 해석하여 타당성을 입증한다.

ABSTRACT

In this paper a new analysis of BPSK signals is proposed. Using the transformation of random variables, we obtain new probability density function (pdf) of received signal magnitude from the pdf of phase error. From the new pdf, the optimum threshold to compare the magnitudes of received signals is derived and the average bit error rate (BER) is calculated for coherent and differential BPSK in AWGN environment. In Rayleigh fading, new pdf expression of the phase error due to Rayleigh fading and that of the received signal magnitude through the random variable transformation are derived. With which optimum threshold and average BER for coherent BPSK signals are derived.

*東西工科大學校 情報通信工學科

Dept. of Information & Communication Engineering,
Dongseo Univ.

**漢陽大學校 電子通信工學科

Dept. of Electronic Communication Engineering,
Hanyang Univ.

論文番號 : 94273-1004

接受日字 : 1994年 10月 4日

I. 서론

일반적으로 AWGN 환경에서 PSK 신호의 오류 확률을 해석할 때에는 AWGN에 의한 위상 오류의 확률 밀도 함수 (pdf)를 위상 영역에서 적분함으로써 구한다. 이는 먼저 판정영역에서 임계값을 정한뒤 다시 위상 영역으로 옮겨서 해석하는 과정을 거치며 또한 수신 신호에서 위상 성분을 검출하여야 하므로 그 과정이 번거롭고 위상 검출의 어려움이 따른다. 이 논문에서는 이러한 과정을 줄이고 판정 영역에서 수신 신호의 크기로 직접 신호를 해석하는 방법을 제안한다.

AWGN 환경의 경우 동기 및 차동 복조 BPSK 신호의 각각의 경우에 위상 오류의 pdf로부터 확률 변수 변환을 하여 수신 신호 크기에 대한 새로운 pdf를 유도하고 이를 바탕으로 판정 영역에서 수신 신호의 크기 비교를 위한 임계값을 우도비 검정 (likelihood ratio test)을 적용하여 결정한 뒤 유도된 pdf로 판정 영역에서 직접 적분하여 평균 BER를 계산하여 타당성을 입증한다.

또한 페이딩이 존재하는 환경에서 해석을 새롭게 시도한다. 이동통신 채널에서는 신호의 다중 경로에 의하여 반사파가 생기며 이로인해 수신기에서는 여러 신호의 합으로 나타나 수신 신호 진폭의 감쇄 현상인 페이딩을 유발하여 시스템의 성능을 저하시키게 된다. 이러한 페이딩 현상은 각 경우에 따라서 여러 확률 분포로 모델화 되는데 이중 수신 신호의 빠른 변화 성분은 Rayleigh 분포로 모델화된다. 일반적으로 페이딩이 존재하는 시스템에서는 평균 BER를 계산할 때 먼저 AWGN만이 존재할 때의 BER에 해당 pdf로 평균을 취하여 BER를 계산한다. 이 논문에서는 Rayleigh 페이딩이 존재하는 환경에서 위상 오류에 대한 pdf를 새로운 형태로 유도하고 이로부터 확률 변수 변환을 하여 신호 크기에 대한 pdf를 유도하며 수신 신호 크기 비교를 위한 임계값을 유도하고 이를 적분하여 페이딩 환경에서 직접 평균 BER를 계산한다.

이 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 이동통신 채널에서 Rayleigh 페이딩에 의하여 발생하는 위상 오류의 pdf를 유도하고 3장에서는 이로부터 수신 신호 크기에 대한 새로운 pdf로 변환하여 판정영역에서 직접 해석하여, 신호 비교를 위한 임계값을 구하고 평균 BER를 계산한다. 4장과 5장에서는 AWGN 환경에서

앞에서 해석한 방법을 동기 및 차동복조 BPSK에 적용하여 보고 6장에서 결론을 맺는다.

II. Rayleigh 페이딩에 의한 위상 오류

일반적인 BPSK 동기 복조기 블록도는 그림 1과 같다.

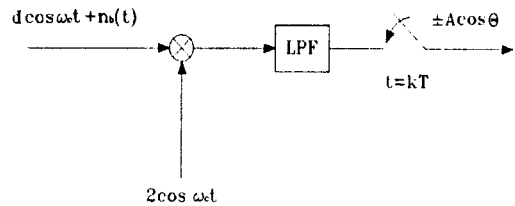


그림 1. BPSK 동기 복조기 블록도
Fig. 1. Block diagram of coherent BPSK receiver

여기서

$$n_b(t) = n_c \cos \omega_c t - n_s \sin \omega_c t \quad (2.1)$$

$$A = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad (2.2)$$

$$x = d + n_c = A \cos \theta, \quad y = n_s = A \sin \theta \quad (2.3)$$

이며 n_c, n_s 는 평균이 0, 분산이 σ_n^2 이고 서로 독립인 정규 잡음이다. 그림 1에서 신호의 진폭 d 가 Rayleigh 페이딩의 영향을 받는다면 신호의 진폭에 대한 확률 밀도 함수는 다음과 같다.

$$f_D(d) = \frac{d}{\sigma_d^2} e^{-\frac{d^2}{2\sigma_d^2}}, \quad d \geq 0 \quad (2.4)$$

이로부터 Rayleigh 페이딩에 의한 위상 오류의 확률 밀도 함수를 구하기 위하여 먼저 x 와 y 에 대한 결합 확률 밀도 함수를 구한 다음 A 와 θ 의 결합 확률 밀도 함수로 변환하여 최종적으로 θ 의 밀도 함수를 구하도록 한다. 먼저 x 에 대한 밀도 함수 $f(x)$ 는 [3]

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{D,N_c}(d, x-d) dd \quad (2.5)$$

인데 d 와 n_c 는 서로 독립이므로 식 (2.5)는

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_D(d) f_{N_c}(x-d) dd \tag{2.6}$$

$$= \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}}}{\sqrt{2\pi} \sigma_n \sigma_d^2} \int_0^{\infty} d e^{-\frac{kd^2}{2} - \frac{x^2 d^2}{\sigma_d^2}} dd$$

이 되며 여기서

$$k = \frac{1}{\sigma_d^2} + \frac{1}{\sigma_n^2} \tag{2.7}$$

이다. 식 (2.6)을 풀기 위하여 적분 테이블 [6, pp.337, 3.462] 에서 다음 관계식을 이용하면

$$\int_0^{\infty} x^{\nu-1} e^{-\beta x^2 - \gamma x} dx = (2\beta)^{-\frac{\nu}{2}} \Gamma(\nu) e^{\frac{\gamma^2}{8\beta}} D_{-\nu}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2\beta}}\right) \tag{2.8}$$

식 (2.6)은

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_n \sigma_d^2 k} e^{-\frac{2k\sigma_n^2-1}{4k\sigma_n^2} x^2} D_{-2}\left(-\frac{x}{\sigma_n \sqrt{k}}\right), \quad -\infty \leq x \leq \infty \tag{2.9}$$

가 된다. 여기서 $D_{\nu}(x)$ 는 parabolic cylinder 함수이며 $\Gamma(\cdot)$ 는 gamma 함수이다. x 와 y 의 결합 확률 밀도 함수는 x 와 y 가 서로 독립이므로 각각의 밀도 함수를 곱하여 정리하면

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi(\sigma_n^2 + \sigma_d^2)} e^{-\frac{2k\sigma_n^2(x^2+y^2) - x^2}{4k\sigma_n^2}} \tag{2.10}$$

$$D_{-2}\left(-\frac{x}{\sigma_n \sqrt{k}}\right)$$

이 되는데 식 (2.10)의 x 와 y 의 결합 확률 밀도 함수로부터 식 (2.3)의 관계를 이용하여 A 와 θ 의 결합 확률 밀도 함수를 구하면 다음과 같다.

$$f(a, \theta) = \frac{a}{2\pi\sigma^2} e^{-pa^2} D_{-2}(-ma) \tag{2.11}$$

여기서

$$\sigma^2 = \sigma_n^2 + \sigma_d^2 \tag{2.12}$$

$$p = \frac{2k\sigma_n^2 - \cos^2\theta}{4k\sigma_n^4} \tag{2.13}$$

$$m = \frac{\cos\theta}{\sigma_n^2 \sqrt{k}} \tag{2.14}$$

이다. 식 (2.11)로부터 Rayleigh 페이딩에 의하여 발생하는 위상 오류의 확률 밀도 함수는 진폭 a 에 대하여 적분을 함으로써 얻을 수 있다.

$$f(\theta) = \int_0^{\infty} f(a, \theta) da = \int_0^{\infty} \frac{a}{2\pi\sigma^2} e^{-pa^2} D_{-2}(-ma) da \tag{2.15}$$

식 (2.15)의 적분을 계산하기 위하여 다음 관계식을 [6, pp.1064, 9.240] 이용한다.

$$D_{\nu}(x) = 2^{\frac{\nu}{2}} \sqrt{\pi} e^{-\frac{x^2}{4}} \left[\frac{1}{\Gamma(\frac{1-\nu}{2})} {}_1F_1\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, \frac{x^2}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}x}{\Gamma(-\frac{\nu}{2})} {}_1F_1\left(\frac{1-\nu}{2}, \frac{3}{2}, \frac{x^2}{2}\right) \right] \tag{2.16}$$

여기서 ${}_1F_1(\cdot)$ 는 hypergeometric 함수이며 [7, pp.556] 다음 식과 같다.

$${}_1F_1(\alpha, \beta; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+n)x^n}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+n)n!} \tag{2.17}$$

식 (2.16)과 (2.17)을 이용하여 (2.15)를 다시 쓰고 다음 적분식을 [6, pp.337, 3.461] 이용하여 계산하고 정리하면

$$\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-px^2} dx = \frac{(2n)!}{2^{n+1}(2p)^n n!} \sqrt{\frac{\pi}{p}}, \quad (p > 0) \tag{2.18}$$

$$\int_0^{\infty} x^{2n+1} e^{-px^2} dx = \frac{n!}{2p^{n+1}}, \quad (p > 0) \tag{2.19}$$

최종적으로 Rayleigh 페이딩에 의한 위상 오류의 확률 밀도 함수는 다음과 같이 얻어진다.

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi(1+R)} {}_2F_1\left(1, 1; \frac{1}{2}; \frac{R \cos^2 \theta}{1+R}\right) + \frac{\sqrt{R} \cos \theta}{4(1+R \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}}, \quad (2.20)$$

$$-\pi \leq \theta \leq \pi$$

여기서 $R = \frac{\sigma_d^2}{\sigma_n^2}$ 으로 신호대 잡음비 이고 ${}_2F_1(\cdot)$ 은 hypergeometric 함수이며 [7, pp.556, 15.1.1] 다음 식과 같다.

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{z^n}{n!} \quad (2.21)$$

그림 2에는 신호대 잡음비 R에 따른 $f(\theta)$ 를 식 (2.20) 으로부터 구하여 나타내었다. 그림 2로 부터 R이 증가할수록 0을 중심으로 더 첨예하게 모여있음을 알 수 있다.

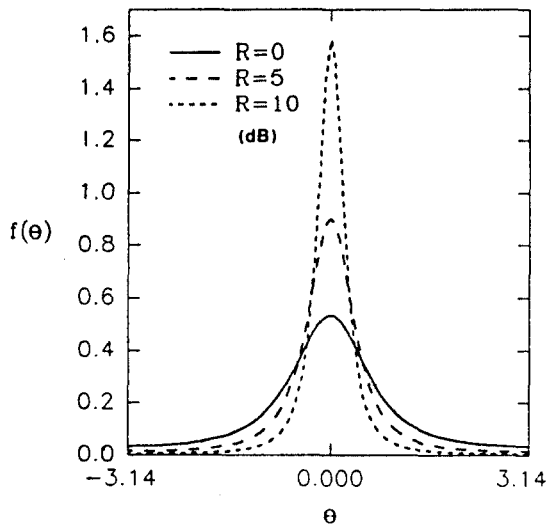


그림 2. Rayleigh 페이딩에 의한 위상 오류의 확률 밀도 함수
Fig. 2. Phase error pdf caused by Rayleigh fading

III. 판정 영역에서의 해석

식 (2.20)에서 구한 위상 오류를 고려하여 그림 1의 BPSK 동기 복조기를 다시 그리면 그림 3과 같다. 여기서 진폭은 정규화 시킨다고 가정한다.

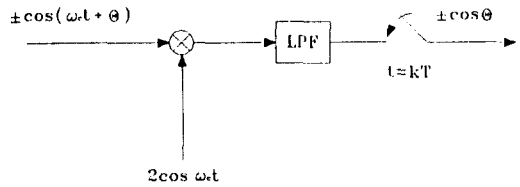


그림 3. 위상 오류로 나타낸 BPSK 동기 복조기 블록도
Fig. 3. Block diagram of coherent BPSK receiver

그림 3으로부터 시스템의 오류 확률을 계산하려면 먼저 위상 영역에서 임계값을 정한뒤 이를 다시 판정 영역으로 옮겨서 계산하여야 한다. 여기서는 그러한 과정을 줄이고자 직접 판정 영역에서 수신 신호의 크기로 부터 시스템을 분석한다. 그림 3에서 최종적으로 수신기에서 받는 신호는 $\cos \theta$ 이므로 $x = \cos \theta$ 로 확률 변수를 변환하여 식 (2.20) 으로부터 새로운 확률 밀도 함수를 유도하면 다음과 같다.

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+R)\sqrt{1-x^2}} {}_2F_1\left(1, 1; \frac{1}{2}; \frac{Rx^2}{1+R}\right) + \frac{\sqrt{R} x}{2\sqrt{1-x^2} [1+R(1-x^2)]^{\frac{3}{2}}} \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (3.1)$$

그림 4에는 신호대 잡음비 R에 따른 $f(x)$ 를 식 (3.1) 로 부터 구하여 나타내었다. 그림 4에서 R이 증가할수록 1 주변에 더 첨예하게 모여 있음을 알 수 있다.

평균 비트 오류 확률을 구하기 위하여 송신단에서 +1과 -1의 데이터가 같은 확률로 발생된다고 가정하면 그림 3의 BPSK 시스템의 수신 신호 판정을 위한 임계값은 likelihood ratio test를 적용하여 구할 수 있다. [2]

$$\frac{f(x|+1)}{f(x|-1)} \stackrel{+1}{\underset{-1}{>}} 1 \quad (3.3)$$

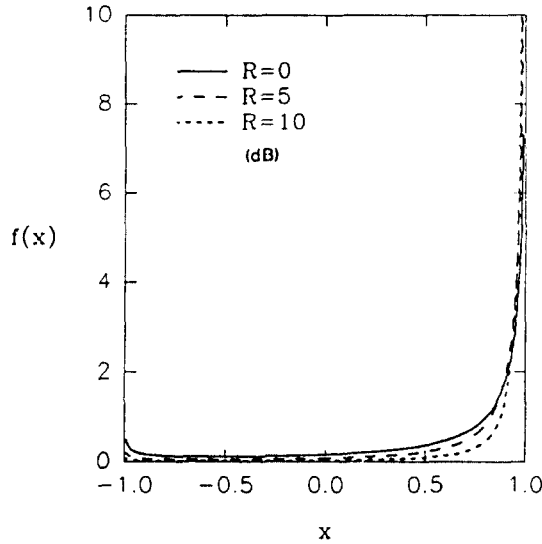


그림 4. $x = \cos^{\theta}$ 의 확률 밀도 함수
Fig. 4. Probability density function of $x = \cos^{\theta}$

식 (3.1)을 이용하여 +일 때와 -일 때의 확률 밀도 함수를 구한 뒤 식 (3.3)에 대입하여 정리하면 식 (3.3)은

$$\frac{\sqrt{R} x}{\sqrt{1-x^2} [1+R(1-x^2)]^{\frac{3}{2}}} \begin{matrix} +1 \\ \geq 0 \\ -1 \end{matrix} \quad (3.4)$$

가 되고 $-1 \leq x \leq 1$ 이므로 식 (3.4)는

$$x \begin{matrix} +1 \\ \leq 0 \\ -1 \end{matrix} \quad (3.5)$$

가 되어 임계값 0 이 얻어진다. 데이터 +1과 -1에 대한 사전 확률이 같고 $f(x|+1)$ 과 $f(x|-1)$ 의 모양은 0 을 중심으로 서로 대칭이 되므로 평균 비트 오류 확률은 다음과 같이 표시된다.

$$P(E) = P(E|+1) P(+1) + P(E|-1) P(-1) = P(E|+1) \quad (3.6)$$

식 (3.6)은

$$P(E) = \int_{-1}^0 f(x) dx = A + B \quad (3.7)$$

이 되며 여기서 $f(x)$ 는 식 (3.1)이고 A와 B는 각각

$$A = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n \Gamma(n+1)}{(1+R)^{n+1} \Gamma(n+\frac{1}{2})} \quad (3.8)$$

$$B = \frac{\sqrt{R}}{2} \int_{-1}^0 \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (3.9)$$

$$\int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt{1-x^2} [1+R(1-x^2)]^{\frac{3}{2}}} dx$$

이다. 식 (3.8)은 적분 테이블 [6, pp.294, 3.248]에서

$$\int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(n+\frac{1}{2})}{2 \Gamma(n+1)} \quad (3.10)$$

그리고 다음 관계식을 이용하면 [8]

$$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{2^{2n} n!} \quad (3.11)$$

식 (3.8)은

$$A = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{(1+R)^{n+1}} = \frac{1}{2} \quad (3.12)$$

이 된다.

식 (3.9)를 계산하기 위하여 $R(1-x^2) = t^2$ 라 놓고 적분하여 계산하고 정리하면

$$B = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{1+R}} \quad (3.13)$$

이 되어 최종적으로 판정 영역에서 직접 구한 평균 비트 오류 확률은 식 (3.7), (3.12), (3.13)으로 부터

$$P(E) = \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{\frac{R}{1+R}} \right] \quad (3.14)$$

가 되는데 이는 잘 알려진 Rayleigh 페이딩 환경에서의 동기 BPSK의 오류 확률식이다.

IV. AWGN 환경에서 동기 BPSK 시스템 해석

그림 3에서 위상의 확률 밀도 함수가 AWGN에만 영향을 받는다면 다음과 같이 나타낼 수 있다. [1]

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi} e^{-R} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R}{\pi}} e^{-R \sin^2 \theta} \cos \theta [1 + \operatorname{erf}(\sqrt{R} \cos \theta)] \quad , \quad -\pi \leq \theta \leq \pi \quad (4.1)$$

그림 3에서 최종적으로 받는 수신 신호는 $\cos \theta$ 이므로 앞에서 해석한 것과 마찬가지로 $x = \cos \theta$ 로 확률 변수를 변환하여 식 (4.1)로부터 수신 신호 크기에 대한 새로운 확률 밀도 함수를 유도하면 다음과 같다. [5]

$$f(x) = \frac{e^{-R}}{\pi \sqrt{1-x^2}} + \sqrt{\frac{R}{\pi(1-x^2)}} e^{-R(1-x^2)} x [1 + \operatorname{erf}(\sqrt{R}x)] \quad , \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (4.2)$$

그림 5에는 R에 따른 f(x)를 식 (4.2)로부터 구하여 나타내었다.

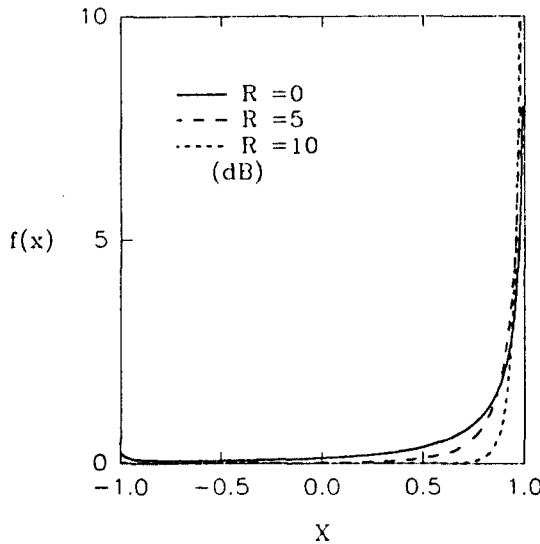


그림 5. $x = \cos \theta$ 의 확률 밀도 함수
Fig. 5. Probability density function of $x = \cos \theta$

수신 신호 비교를 위한 임계값을 구하기 위하여 식 (3.3)의 likelihood ratio test 를 적용하여 식 (4.2)를 대입하여 정리하면

$$\frac{1 + \sqrt{\pi R} x e^{Rx^2} [1 + \operatorname{erf}(\sqrt{R}x)]}{1 - \sqrt{\pi R} x e^{Rx^2} [1 - \operatorname{erf}(\sqrt{R}x)]} \stackrel{+1}{\underset{-1}{\gtrless}} 1 \quad (4.3)$$

이 되며 식 (4.3)은

$$x + x \operatorname{erf}(\sqrt{R}x) \stackrel{+1}{\underset{-1}{\gtrless}} -x + x \operatorname{erf}(\sqrt{R}x) \quad (4.4)$$

$$x \stackrel{+1}{\underset{-1}{\leq}} 0 \quad (4.5)$$

가 되어 임계값 0 이 얻어진다. 이로부터 평균 비트 오류 확률은 식 (3.6)으로부터

$$P(E) = \int_{-1}^0 f(x) dx = A + B + C \quad (4.6)$$

이 되며 여기서 f(x)는 식 (4.2)이며 A, B, C 는 각각 다음과 같다.

$$A = \int_{-1}^0 \frac{e^{-R}}{\pi \sqrt{1-x^2}} dx \quad (4.7)$$

$$B = \int_{-1}^0 \sqrt{\frac{R}{\pi(1-x^2)}} x e^{-R(1-x^2)} dx \quad (4.8)$$

$$C = \int_{-1}^0 \sqrt{\frac{R}{\pi(1-x^2)}} x e^{-R(1-x^2)} \operatorname{erf}(\sqrt{R}x) dx \quad (4.9)$$

먼저 식 (4.7)을 계산하기 위하여 $x = \sin \theta$ 로 치환하여 적분하면

$$A = \frac{1}{2} e^{-R} \quad (4.10)$$

이 되며 식 (4.8)은 $Rx^2 = R - t^2$ 으로 치환하여 적분하면

$$B = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{R}} e^{-t^2} dt = -\frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{R}) \quad (4.11)$$

이 된다. 마지막으로 식 (4.9)를 계산하기 위하여 식 (3.10), (3.11)과 다음 관계식을 이용한다. [8]

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+2} x^{2n+1} (n+1)!}{(2n+2)!} \quad (4.12)$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (4.13)$$

식 (3.10), (3.11), (4.12), (4.13)을 이용하여 식 (4.9)를 계산하여 정리하면

$$C = \frac{1}{2} [1 - e^{-R}] \quad (4.14)$$

그러므로 평균 비트 오류 확률은 식 (4.6), (4.10), (4.11), (4.14)로부터

$$P(E) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{R}) \quad (4.15)$$

가 되는데 이는 잘알려진 동기 복조시 BPSK 의 오류 확률 식이다.

V. AWGN 환경에서 비동기 BPSK 시스템 해석

여기서는 차동복조 BPSK 시스템에 대한 해석을 행한다. 이 경우 복조기 블록도는 그림 6과 같다.

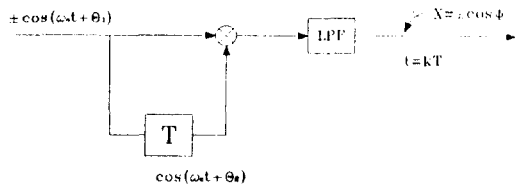


그림 6. 차동 복조 BPSK 복조기 블록도
Fig. 6. Block diagram of differential BPSK receiver

여기서 θ_1 과 θ_2 는 AWGN 에 의한 위상 오류이며 그 분포는 식 (4.1)과 같다. θ_1 과 θ_2 의 위상차를 ϕ 라 하면

$$\phi = \theta_1 - \theta_2 \quad (5.1)$$

이때 위상차 오류 ϕ 의 확률 밀도 함수는 다음과 같다. [4]

$$f(\phi) = \frac{1}{2\pi} e^{-R} \left[1 + \frac{R}{2} \int_0^{\pi} (\sin \alpha + \cos \phi) e^{R \sin \alpha \cos \phi} d\alpha \right], \quad -\pi \leq \phi \leq \pi \quad (5.2)$$

여기서도 앞에서 해석한 것과 마찬가지로 $x = \cos \phi$ 로 변환하여 식 (5.2)의 위상차 오류의 확률 밀도 함수로부터 수신 신호 크기의 확률 밀도 함수를 유도하면 다음과 같다.

$$f(x) = \frac{e^{-R}}{\pi \sqrt{1-x^2}} \left[1 + \frac{R}{2} \int_0^{\pi} (\sin \alpha + x) e^{R x \sin \alpha} d\alpha \right], \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (5.3)$$

그림 7에는 R 에 따른 $f(x)$ 를 식 (5.3)으로 부터 구하여 나타내었다.

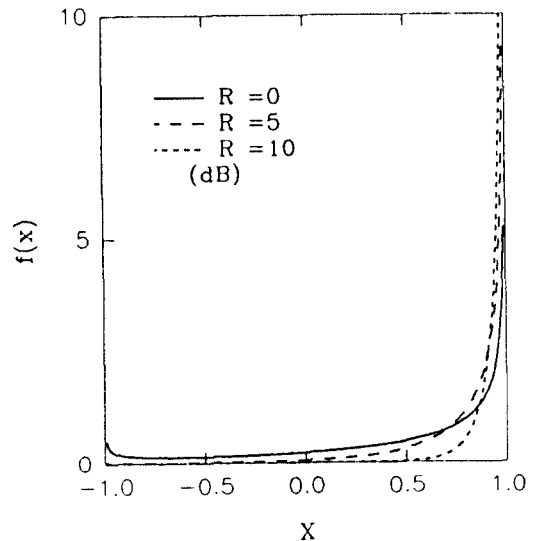


그림 7. $x = \cos \phi$ 의 확률 밀도 함수
Fig. 7. Probability density function of $x = \cos \phi$

차동 복조 BPSK 신호 비교를 위한 임계값을 구하기 위하여 식 (3.3)의 우도비 검정을 적용하여 식 (5.3)을 대입하여 정리하면

$$\frac{1 + \frac{R}{2} \int_0^x (\sin \alpha + x) e^{Rx \sin \alpha} d\alpha}{1 + \frac{R}{2} \int_0^x (\sin \alpha - x) e^{-Rx \sin \alpha} d\alpha} \underset{-1}{\overset{+1}{\geq}} 1 \quad (5.4)$$

가 되고 식 (5.4)를 다시쓰면

$$\int_0^x \sin \alpha [e^{Rx \sin \alpha} - e^{-Rx \sin \alpha}] d\alpha + x \int_0^x [e^{Rx \sin \alpha} + e^{-Rx \sin \alpha}] d\alpha \underset{-1}{\overset{+1}{\geq}} 0 \quad (5.5)$$

식 (5.5)를 풀기 위하여 식 (4.13)을 이용하여 전개하면

$$e^{Rx \sin \alpha} - e^{-Rx \sin \alpha} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Rx \sin \alpha)^{2n+1}}{(2n)!} \quad (5.6)$$

$$e^{Rx \sin \alpha} + e^{-Rx \sin \alpha} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Rx \sin \alpha)^{2n}}{(2n)!} \quad (5.7)$$

또한 적분 테이블을 이용하면(6)

$$\int_0^x \sin^n \alpha d\alpha = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{2} + \frac{n}{2})}{\Gamma(1 + \frac{n}{2})} \quad (5.8)$$

식 (3.11), (5.6), (5.7) 과 (5.8)을 이용하여 식 (5.5)를 다시쓰면

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^{2n+1} x^{2n+1}}{n! (n+1)! 2^{2n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^{2n} x^{2n+1}}{n! n! 2^{2n}} \underset{-1}{\overset{+1}{\geq}} 0 \quad (5.9)$$

가 된다. 여기서

$$A_n = \frac{R^{2n+1}}{n! (n+1)! 2^{2n+1}} + \frac{R^{2n}}{n! n! 2^{2n}} \quad (5.10)$$

이라 하면 식 (5.9)는

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{2n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{2n} \underset{-1}{\overset{+1}{\geq}} 0 \quad (5.11)$$

이 되고 $A_n x^{2n}$ 은 음수가 될 수 없으므로 식 (5.11)은

$$x \underset{-1}{\overset{+1}{\leq}} 0 \quad (5.12)$$

가 되어 임계값 0 이 얻어진다. 앞에서의 경우와 마찬가지로 평균 비트 오류 확률은 식 (3.6) 으로부터

$$P(E) = \int_{-1}^0 f(x) dx = D + E + F \quad (5.13)$$

이 되며 여기서 $f(x)$ 는 식 (5.3)이며 D, E, F 는 각각 다음과 같다.

$$D = \int_{-1}^0 \frac{e^{-R}}{\pi \sqrt{1-x^2}} dx \quad (5.14)$$

$$E = \frac{R e^{-R}}{2\pi} \int_{-1}^0 \int_0^x \frac{\sin \alpha e^{Rx \sin \alpha}}{\sqrt{1-x^2}} d\alpha dx \quad (5.15)$$

$$F = \frac{R e^{-R}}{2\pi} \int_{-1}^0 \int_0^x \frac{x e^{Rx \sin \alpha}}{\sqrt{1-x^2}} d\alpha dx \quad (5.16)$$

먼저 식 (5.14)를 계산하기 위하여 $x = \sin \theta$ 로 치환하여 적분하면

$$D = \frac{1}{2} e^{-R} \quad (5.17)$$

이 된다. 식 (5.15)를 계산하기 위하여 식 (4.13)으로부터 x^n 을 짝수항과 홀수항으로 나누어 계산하여야 한다.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} \quad (5.18)$$

식 (3.10), (4.13), (5.8)과 (5.18)를 이용하여 식

(5.14)를 먼저 α 에 대하여 적분하고 다시 x 에 대하여 적분하면

$$E = \frac{Re^{-R}}{2\pi} B_n \quad (5.19)$$

가 되며 여기서 B_n 은 다음과 같다.

$$B_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^{2n} \pi \Gamma(n + \frac{1}{2})}{(2n)! \Gamma(n + \frac{3}{2})} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^{2n+1} \pi \Gamma(n+1)}{2(2n+1)! \Gamma(n+2)} \quad (5.20)$$

마찬가지로 식 (5.16)을 계산하기 위하여 $x^{n!}$ 을 짝수 항과 홀수항으로 나누어 계산하여야 한다.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+2} \quad (5.21)$$

식 (3.10), (4.13), (5.8) 과 (5.21)을 이용하여 식 (5.16)을 먼저 α 에 대하여 적분하고 다시 x 에 대하여 적분하면

$$F = \frac{Re^{-R}}{2\pi} (-B_n) \quad (5.22)$$

가 되며 여기서 B_n 은 식 (5.20) 이다. 그러므로 평균 비트 오류 확률은 식 (5.13), (5.17), (5.19), (5.22)로부터

$$P(E) = \frac{1}{2} e^{-R} \quad (5.23)$$

이 되는데 이는 잘알려진 차동 복조시 BPSK 의 오류 확률 식이다.

VI. 결 론

이 논문에서는 AWGN 만이 존재할 때의 동기, 비동기 BPSK와 Rayleigh 페이딩이 함께 존재할 때 동기 BPSK 신호를 새로운 방법으로 해석하였다.

먼저 Rayleigh 페이딩이 존재하는 환경에서 Rayleigh 페이딩에 의한 위상의 확률 밀도 함수를 유도하였으며 이로부터 수신기에서 복조한 신호의 크기로 직접 해석하고자 확률 변수 변환을 하여 신호 크기에

대한 새로운 확률 밀도 함수를 유도 하였다. 유도한 새로운 확률 밀도 함수로 우도비 검정을 적용하여 임계값을 구하고 이로부터 평균 비트 오류 확률을 구하여 타당성을 입증하였다.

또한 AWGN 만이 존재하는 환경에서도 기존의 AWGN에 의한 위상의 확률 밀도 함수로부터 신호 크기에 대한 새로운 확률 밀도 함수를 구하여 동기 및 차동 복조 BPSK 시스템을 해석하고 임계값을 확인한 다음 비트 오류 확률을 유도하여 타당성을 검증 하였다.

앞으로 이러한 해석 방법을 MPSK 시스템에 적용하는 연구가 이어져야 할 것으로 사료된다.

참고문헌

1. R. W. Lucky, J. Salz and E. J. Weldon Jr., Principle of Data Communication, McGraw-Hill, Inc., 1968.
2. H. L. Van Trees, Detection, Estimation, and Modulation Theory, Part I, John Wiley & Sons, Inc., 1968.
3. A. L. Mood, F. A. Graybill and D. C. Boes, Introduction to the Theory of Statistics, McGraw-Hill, Inc., 1982.
4. R. F. Pawula, "On the Theory of Error Rates for Narrow Band Digital FM," IEEE Trans. Comm., COM-29, pp. 1634-1643, Nov. 1981.
5. Y. Y. Han, W. C. Lee and D. W. Yoon, "On the Error Rate Evaluation and Modulation Classification for Coherent and Noncoherent PSK Signals Using the Transformation of Random Variable," IEEE ICC'93, pp. 1508-1514, Geneva, Switzerland, May 1993.
6. L. S. Gradshteyn and L. M. Ryzhik, Table of Integrals, Series and Products, Academic Press, Inc., 1965.
7. M. Abramowitz and I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Appl. Math. Series, vol. 55, National Bureau of Standard, 1964.
8. C. B. Rorabaugh, Communications Formulas & Algorithms, McGraw-Hill, Inc., 1990.