

혼합 정수 선형 계획법을 이용한 최소 연산량을 갖는 비등간격선형 위상 FIR 필터의 설계

正會員 金俊泰*, 吳宇鎭*, 李勇勳*

Design of Non-Uniformly Spaced Linear Phase FIR Filters With Minimum Arithmetic Complexity Using Mixed Integer Linear Programming

Joon Tae Kim*, Woo Jin Oh*, Yong Hoon Lee* Regular Members

要 約

본 논문에서는 탭의 위치가 비등간격으로 존재하고 선형 위상을 갖는 FIR 필터의 설계를 위한 최적화 문제를 제안하고, 혼합 정수 선형 계획법을 이용하여 이 문제를 풀어서 탭의 위치와 그 계수 값들이 얻어질 수 있음을 보인다. 또한 최적 해를 통해 얻어진 필터가 주어진 사양을 최소한의 연산량으로 만족시키는 필터가 되기 위하여 비용 함수가 만족해야 할 몇 가지 성질을 제시하고, 본문에서 정의된 비용 함수가 그 성질을 만족시킨다는 사실을 아울러 보인다. 끝으로 컴퓨터 모의 실험을 이용한 몇 가지 필터 설계의 예를 통하여 제안된 방법이 기존 방법에 비해 보다 많은 형태의 필터를 설계할 수 있으며, 또한 이미 알려진 부분집합 선택 (subset-selection)을 기본으로 하는 방법들보다 좋은 결과를 낸다는 사실을 보인다.

ABSTRACT

One design approach to efficient FIR filters, which require fewer arithmetic operations than conventional ones, is to design non-uniformly spaced FIR filters by using techniques such as the subset selection method. This approach is, however, computationally inefficient and furthermore, cannot guarantee the desired filter with minimal complexity because the "subset size" of the subset selection method is determined by trial and error. In this paper, an optimization problem for designing a non-uniformly spaced, linear phase FIR filter with minimal complexity is formulated, and solved by mixed integer linear programming (MILP). Some observations show the way to define the cost function properly so that the optimal solution of this problem can be guaranteed to be an FIR filter with minimal complexity for given specifications. Design examples illustrate that the proposed method is useful for designing a wide range of filter types including broad band FIR, IFIR, and FIR with cascaded structure, and can outperform the other subset selection-based methods.

*한국과학기술원 전기 및 전자공학과
論文番號 : 95178-0515
接受日字 : 1995年 5月 15日

I. 서 론

일반적인 방법 (예를 들면 Parks MacLellan 알고리즘)을 통해 설계된 필터에 비해 계산량 면에서 효율적인 필터를 제작하는 한 방법은 비등간격의 탭을 갖는 FIR 필터⁽¹⁾⁻⁽⁷⁾를 제작하는 것이다. 그러나 탭의 위치가 시간 축 상에서 실수의 값을 갖도록 허용하는 경우⁽¹⁾⁻⁽³⁾, 비록 같은 필터 사양을 만족하기 위해 필요한 탭 수는 극적으로 줄어들 수 있지만 고속의 양자화기와 연산기들이 지원되지 않는 한 그 구현이 불가능하다. 그래서 구현 가능하면서 비등간격의 탭을 갖는 필터 설계 방법으로, 설계하려고 하는 필터의 길이 L 을 일반적인 최적 필터의 길이 L_c 보다 크게 잡은 후 임펄스 응답은 M ($M < L_c$)개만의 0이 아닌 계수를 가져야 한다는 제약을 두고 이상적인 주파수 응답과의 오차가 최소가 되도록 그 위치와 계수 값들을 설정하는 방법들이 소개되었다. 부분집합 선택 방법(subset selection method (SSM))⁽⁴⁾⁻⁽⁷⁾은 그 대표적인 방법으로서, FIR 필터의 주파수 응답이 서로 독립인 복소 지수 함수(complex exponential function)들의 가중 합으로 표현된다는 사실을 토대로 N 개의 복소 지수 함수들 중에 M ($M < N$)개만의 함수를 골라서 이들의 가중 합으로 주어진 사양을 만족시키는 필터를 설계하게 된다. 이러한 방법은 지연기를 더 사용해야 하는 반면에 한 입력 신호를 필터링 하는데 필요한 곱셈기와 덧셈기의 수를 줄일 수 있다는 이점이 있다. 또한 알려져 있는 대부분의 효율적인 필터 설계 방법⁽⁸⁾⁻⁽¹²⁾이 실제적으로는 협대역 필터를 설계하는데만 그 응용분야가 한정되어 있는 반면에 SSM은 보다 많은 사양의 필터 (예를 들면 통과대역이 $\pi/2$ 근치인 광대역 필터나 또는 비선형 위상을 갖는 필터)를 효율적으로 설계할 수 있다.

그러나 SSM은 설계 과정에서 계산상이나 시간적으로 효율적이지 못하고, 또한 결과로 얻어진 필터가 주어진 사양을 만족하는 필터중에 최소한의 계산량을 필요로 하는 최적의 필터라는 확신을 주지 못한다. 이 사실은 SSM을 이용한 필터 설계 과정에서 독립인 복소 지수 함수들을 그 원소로 갖는 부분집합의 크기(subset size)가 시행착오를 통해서 얻어진다는 것에 기인한다. (임펄스 응답 중에서 0이 아닌 값을 갖는 임펄스 응답의 수가 부분집합의 크기와 직접적으로 관련이 있으므로, 최소의 계산량을 갖는 필터를 구하기 위해서는 0이 아닌

값을 갖는 임펄스의 수가 최소화 되어야 하고 이는 바로 부분집합의 크기가 최소화 되어야 한다는 것을 의미한다. 그러므로 최소화 되지 않은 부분집합으로 필터의 사양을 만족하도록 그 계수를 구한 경우, 설계된 필터가 최소의 계산량을 갖는 필터라고 확신 될 수 없는 것이다.)

이 논문에서는 우선 탭의 위치가 비등간격이고 선형 위상을 가지며 최소한의 계산량을 필요로 하는 FIR 필터를 설계하는 방법을 최적화 문제로 변환한다. 이때 최적 해를 통해 얻어진 필터가 주어진 사양을 만족시키면서 최소한의 연산량을 갖는 필터가 되기 위하여 비용 함수가 만족해야 할 몇 가지 성질을 제시하고, 이를 만족시키는 비용 함수를 정의한다. 그리고 혼합 정수 선형 계획법⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾을 사용하여 이 문제를 풀어서 최소의 계산량을 갖는 필터의 임펄스 응답이 얻어짐을 보인다. 마지막으로 컴퓨터 모의 실험을 통하여 제안된 필터 설계 방법이 많은 형태의 필터 설계에 적용될 수 있음을 보이고 또 기존의 SSM 보다도 나은 성능을 나타냄을 보인다.

II. 필터 설계 방법

본 절에서 제안되는 방법은 선형 위상을 갖는 FIR 필터를 설계하는 데 적용될 수 있다. 지금부터 임펄스 응답이 대칭이고 그 길이가 짝수인 필터를 설계하는 경우에 국한하여 알아보기로 한다.

우선 $h(n)$, $n = 0, 1, \dots, 2N-1$ 을 제작하고자 하는 비등간격의 탭을 갖는 선형 위상 FIR 필터의 임펄스 응답이라고 하고 $2N$ 은 $2N_c$ 보다 크거나 같다고 가정한다. 여기서 $2N_c$ 는 주어진 필터 사양을 만족하는 일반적인 필터의 최소 길이이다. 위에서 임펄스 응답이 대칭이라고 하였으므로 $h(n) = h(2N-1-n)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, 이고, 대응하는 주파수 응답은 (선형 위상 항목인 $\exp(-j(N-1)\omega/2$ 를 생략하면) 아래와 같이 나타내어 질 수 있다.

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} d(n) \cos(n + \frac{1}{2})\omega \quad (1)$$

여기서 $d(n) = 2h(N-n-1)$ 이다. 이제 0 이 아닌 $d(n)$ 의 존재와 그 위치를 나타내는 시퀀스들 $I_d(n)$ 과 $P_d(n)$ 을 아래와 같이 정의하기로 한다.

$$I_d(n) = \begin{cases} 0 & \text{when } d(n) = 0 \\ 1 & \text{when } d(n) \neq 0 \end{cases} \quad (2)$$

그리고

$$P_d(n) = \begin{cases} 0 & \text{when } d(n) = 0 \\ n & \text{when } d(n) \neq 0 \end{cases} \quad (3)$$

상기할 것은 $\sum_{n=0}^{N-1} I_d(n)$ 은 0 이 아닌 $d(n)$ 의 수를 나타내고 $\max_n(p_{d_j}(h))$ 은 $h(n)$ 을 구현하는데 필요한 지연기의 수와 직접적으로 비례한다는 사실이다. 그러므로 최소의 연산량을 갖는 필터를 설계하기 위하여 아래와 같은 최적화 문제를 생각해 보기로 한다.

$$\underset{d(n)}{\text{Minimize}} J(d(n)) = J_A(d(n)) + J_D(d(n)) \quad (4)$$

subject to

$$|H(\omega) - 1| \leq k(\omega)\delta \text{ when } \omega \in \text{passband.}$$

$$|H(\omega)| \leq k(\omega)\delta \text{ when } \omega \in \text{stopband.}$$

여기서 $J_A(\cdot)$ 그리고 $J_D(\cdot)$ 은 각각 산술 연산(곱셈과 덧셈) 및 지연기에 대응하는 비용함 수들이고, $k(\omega)$ 와 δ 는 각각 필터 사양에 주어져 있는 리플 가중치와 리플 크기를 나타낸다. 이제 우리의 목표는 주어진 필터 사양을 만족시키면서 비용 함수 $J(d(n))$ 을 최소화 하는 $d(n)$ 을 찾는 것이다. 각각의 비용 함수 $J_A(\cdot)$ 과 $J_D(\cdot)$ 를 구체적으로 정의하기 전에, 우선 두 비용 함수가 만족하여야 할 몇 가지 성질들을 아래에 나열하여 보았다.

비용 함수들이 만족하여야 할 성질들 : 0이 아닌 값을 M_1 개와 M_2 개를 각각 갖는 두개의 시퀀스들 $d_1(n)$ 과 $d_2(n)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$ 에 대하여 생각해 보면,

(A) $M_2 > M_1$ 인 경우,

$$J(d_2(n)) > J(d_1(n)). \quad (5)$$

(B) $M_1 = M_2$ 인 경우

$$J_A(d_1(n)) = J_A(d_2(n)) \quad (6)$$

그리고

$$J_D(d_1(n)) > J_D(d_2(n)) \text{ whenever}$$

$$\max_n [P_{d_1}(n)] > \max_n [P_{d_2}(n)]. \quad (7)$$

위 성질들은 두개의 시퀀스들 중에 계산량을 많이 필요로 하는 것이 보다 큰 비용을 필요로 하고, 또 같은 계산량을 필요로 할 경우, 많은 지연기를 필요로 하는

것이 보다 큰 비용을 가져야 한다는 것을 의미한다. 여기서 연산량이 직접적으로 $\sum_{n=0}^{N-1} I_d(n)$ 비례한다는 사실을 이용, 연산 비용 함수 $J_A(d(n))$ 을 아래와 같이 정의한다.

$$J_A(d(n)) = c_A \sum_{n=0}^{N-1} I_d(n) \quad (8)$$

여기서 c_A 는 후에 정해질 상수이다. 우리는 위로부터 정의된 $J_A(\cdot)$ 이 (6)의 성질을 만족함을 알 수 있다. 그리고 약간의 시행착오 끝에 (7)의 성질을 만족하도록 하는 지연기 비용 함수 $J_D(d(n))$ 을 아래와 같이 찾을 수 있었다.

$$J_D(d(n)) = \sum_{n=0}^{N-1} q(n)I_d(n) \quad (9)$$

여기서

$$q(n) = \begin{cases} 1 & \text{when } n = 0 \\ 2 & \text{when } n = 1 \\ \sum_{i=0}^{n-1} q(i) & \text{when } n \geq 2 \end{cases} \quad (10)$$

이다. (10)으로 부터 $q(n) = \sum_{i=0}^{n-1} q(i) = 3 \cdot 2^{n-2}$ for $n \geq 2$ 임을 쉽게 알 수 있다.

관측 1: (9)에 나와있는 지연기 비용 함수는 성질 (7)을 만족한다.

증명 : $\max_n [P_{d_i}(n)] = m_i$, $i=1, 2$ 라고 하고 $m_1 > m_2$ 라고 하면,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} q(n)I_{d_1}(n) &= \sum_{n=0}^{m_1} q(n)I_{d_1}(n) > \sum_{n=0}^{m_1-1} q(n) \\ &\geq \sum_{n=0}^{m_1-1} q(n)I_{d_2}(n) \geq \sum_{n=0}^{m_2} q(n)I_{d_2}(n) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} q(n)I_{d_2}(n) \end{aligned}$$

여기서 첫 번째 부등식은 $q(n) \geq \sum_{i=0}^{n-1} q(i)$ for $n > 0$ 이라는 사실에 기인한다.

이제 성질 (5)를 만족하도록 하는 총체적인 비용 함수

$$J(d(n)) = c_A \sum_{n=0}^{N-1} I_d(n) + \sum_{n=0}^{N-1} q(n)I_d(n) \quad (11)$$

는 c_A 를 조절 함으로서 얻어질 수 있다. 다음 관측은 이

문제에 관하여 언급한다.

관측 2: 만일 상수 c_A 가 아래 부등호를 만족하도록 설정된다면,

$$c_A \geq \sum_{n=0}^{N-1} q(n) = 3 \cdot 2^{N-2} \quad (12)$$

(11)에 나와 있는 비용 함수 $J(d(n))$ 은 이상 성질 (5)를 만족한다.

증명: $c_A \geq \sum_{n=0}^{N-1} q(n)$ 이라고 하고 $M_2 > M_1$ 이라고 가정하면,

$$\begin{aligned} J_A(d_2(n)) &= \sum_{n=0}^{N-1} c_A I_{d_2}(n) = M_2 c_A \geq (M_1 + 1) c_A \\ &> M_1 c_A + \sum_{n=0}^{N-1} q(n) \\ &\geq M_1 c_A + \sum_{n=0}^{N-1} q(n) I_{d_1}(n) \\ &= J(d_1(n)) \end{aligned}$$

여기서 우리는 (11)에 나타난 총체적 비용 함수 $J(\cdot)$ 이 $I_d(n)$ 의 선형 함수로 표시되어 있음을 알 수 있다. 그러나 (4)에 나타나 있는 제약식은 조밀한 주파수 격자 위에서 변수 $d(n)$ 의 선형 함수들로 표현되어 있으므로 (2)에 정의된 $d(n)$ 과 $I_d(n)$ 과의 상관관계를 맺어 주는 제약식이 추가로 필요하게 된다. 다음은 어떻게 $I_d(n)$ 이 $d(n)$ 으로 부터 유추될 수 있는 지 알아 보기로 한다.

관측 3: 주어진 $d(n)$, $n = 0, \dots, N-1$ 에 대하여 양의 상수 u 와 v 가 존재하여 0이 아닌 모든 $d(n)$ 에 대하여 $u < |d(n)| < v$ 를 만족한다고 가정하자. 여기서 $I(n) \in \{0, 1\}$, $n = 0, \dots, N-1$ 을 아래와 같은 식을 만족하는 시퀀스로 정의하면,

$$\frac{1}{v} |d(n)| \leq I(n) \leq \frac{1}{u} |d(n)|, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (13)$$

$I(n) = I_d(n)$ 이 된다.

증명: 이 증명은 $d(n)$ 이 0이면 $I(n) = 0$ 이고 $d(n)$ 이 0이 아니면 $I(n) = 1$ 임을 보이는 것으로 충분하다. $d(n) = 0$ 인 경우: $0 \leq I(n) \leq 0$ 그러므로 $I(n) = 0$. $d(n)$ 이 0이 아닌 경우: $|d(n)|/v$ 는 1보다 작은 양의 수이고 $|d(n)|/u$ 는 1보다 큰 양의 수이다. 여기에 $I(n)$ 은 0과 1만을 가지는 이진 변수라는 조건을 결

합하면 $I(n) = 1$ 이다.

이제 위의 결과들을 정리하여 보면, (4)에 나와 있는 최적화 문제는 아래와 같이 변형되어 다시 쓰여질 수 있다.

$$\underset{d(n)}{\text{Minimize}} \quad J(d(n)) = \sum_{n=0}^{N-1} [c_A + q(n)] I_d(n) \quad (14)$$

subject to

$$\left| \sum_{n=0}^{N-1} d(n) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \omega - 1 \right| \leq k(\omega) \delta$$

when $\omega \in \text{passband}$,

$$\left| \sum_{n=0}^{N-1} d(n) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \omega \right| \leq k(\omega) \delta$$

when $\omega \in \text{stopband}$,

$$|d(n)|/v \leq I_d(n) \leq |d(n)|/u, \quad n=0, 1, \dots, N-1, \\ 0 \leq I_d(n) \leq 1, \quad I_d(n) \text{은 정수.}$$

여기서 $c_A = 3 \cdot 2^{N-2}$ 이고, u 와 v 는 각각 충분히 작고 큰 값으로 설정된다. (다음장에서 보여질 설계 예에서는 u 와 v 가 각각 10^{-4} 과 10^2 으로 설정되었다.) 이 문제는 $d(n)$ 을 부호에 상관없는 실수 변수로 놓고 $I_d(n)$ 을 이진 정수 변수로 놓은 후 MILP를 이용하여 풀 수 있으며, 결과적으로 얻어지는 $I_d(n)$ 은 탭의 위치를 나타내고 $d(n)$ 은 $I_d(n)$ 의 위치에 해당하는 탭의 계수를 나타낸다. 얻어진 최적해 $d(n)$ 으로 얻어진 임펄스 응답 $h(n)$ 은 주어진 사양을 만족하는 필터 가운데 최소의 연산량을 필요로 하게 되며, 만일 최소의 연산량을 갖는 필터가 둘 이상 존재하는 경우에는 그 가운데 최소의 지연기를 필요로 하는 필터가 된다. 다음은 지금까지의 설계 과정을 요약해 놓은 것이다.

비등간격의 탭을 갖는 선형 위상 FIR 필터의 설계과정

과정 1: 주어진 필터 사양으로부터 N_c 를 추정해 내고, N 을 N_c 보다 크도록 설정한다. (다음절에 나올 예제들에서 볼 수 있듯이 $2N$ 이 설계될 실제 필터 길이를 의미하지는 않으므로 충분히 크게 잡아도 된다)

과정 2: 다음 상수들 u, v, c_A 를 (12), (13)을 만족하도록 충분히 여유를 두어 설정하고 (10)의 $q(n)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, 또한 미리 구하여 저장해 둔다.

과정 3: $H(\omega)$ 가 필터 사양을 만족하도록 하는 제약 부등식을 통과대역과 저지대역에 대해 조밀한 주파수 격

자 위에서 각각 구한다.

과정 4 : $H(\omega)$ 의 변수인 $d(n)$ 으로부터 $I_d(n)$ 이 생성 되도록 하는 변환 부등식 (13)을 $n = 0, 1, \dots, N-1$ 에 대하여 구한다.

과정 5 : 과정 2)에서 구하여 놓은 상수 $c_A, q(n)$ 을 이용하여 비용 함수를 수식화 하고, 여기에 과정 3과 과정 4)에서 구한 부등식을 제약식으로 삼아 궁극적으로 최적화 문제를 수식화 한다. 그리고 혼합 정수 선형 계획법을 사용하여 이 문제를 푼다.

과정 6 : 결과로 얻어진 $I_d(n)$ 과 $d(n)$ 으로 부터 임펄스 응답 $h(n)$ 을 최종적으로 얻는다. 여기서 상기할 것은 $n > n_{max}$ 일때 $d(n) = 0$ 이 되는 n_{max} 가 존재할 경우 $h(n)$ 의 길이는 $2N$ 이 아니라 $2(n_{max} + 1)$ 가 된다는 사실이다.

지금까지 임펄스 응답이 대칭이고 그 길이가 짝수인 타입 II FIR 필터의 설계 방법에 국한하여 알아보았으나 임펄스 응답이 점대칭이거나 필터 길이가 홀수인 다른 타입의 FIR 필터의 설계에도 큰 변환 없이 사용 가능하다. 예를 들어 임펄스 응답 $h(n), n = 0, 1, \dots, 2N$ 이 대칭이고 그 길이가 홀수인 경우 그 주파수 응답은 아래와 같이 나타나므로,

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^N d(n) \cos n\omega$$

$$d(n) = \begin{cases} h(L) & \text{if } n = 0 \\ 2 \cdot h(L-n) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (15)$$

위의 설계 과정 중에서 바뀌게 되는 것은 과정 3의 제약식을 구하는 데 필요한 $H(\omega)$ 가 (1) 대신 (15)가 사용되게 된다는 것과 최종 해 $d(n)$ 로부터 $h(n)$ 을 구할때 (15)의 오른쪽 식이 사용된다는 것뿐, 나머지 모든 과정은 같다.

III. 컴퓨터 모의 실험 결과

이 절에서 고려된 MILP 문제들은 (14)에 나와 있는 상업용 패키지를 사용하여 풀었고 각 문제를 푸는데 걸리는 시간은 대략 스파크 2 상에서 5분 정도 걸렸다. 또한 각 예제에서 비등간격의 탭을 갖는 선형 위상 FIR 필터를 설계함에 있어서 필터 길이 $2N$ 을 $2N_c$ 에 비해 충분히 크게 ($N = 1.5 N_c$) 잡아 주었으나 결과적으로 얻어지는 필터의 실제 길이는 $2N_c$ 보다 약간 증가하는

데 그쳤음을 아래 예제들을 통해 볼 수 있다.

예제 1 (광대역 필터의 설계): 이 예제를 통하여 우리는 제안된 방법이 광대역 필터를 설계하는데 유용함을 보이고자 한다. 기대되는 필터의 사양은 표준화된 주파수를 사용하면 아래와 같다:

$$\text{통과대역} : [0.0, 0.2], \text{ 저지대역} : [0.25, 0.50],$$

$$dB_p = 0.2 \text{ dB 최대 통과대역 리플},$$

$$dB_s = 60 \text{ dB 최소 저지대역 감쇄}.$$

여기서 우리는 이미 알려진 효율적인 협대역 FIR 필터를 설계하는 방법들이 적용되기 힘들도록 통과대역 끝이 $\pi/2$ 부근이 되도록 정했고, 또한 N 밴드 설계 방법이 적용되기 힘들도록 통과대역의 넓이와 저지대역의 넓이가 서로 다르게 고의로 선택하였다. Parks-McClellan 알고리즘을 이용하여 위 필터를 설계한 경우 필터길이 $2N_c = 48$ 인 선형 위상 FIR 필터가 필요하였다. 같은 필터 사양에 $2N = 70$ 으로 초기설정하고 제안된 방법을 적용한 경우, MILP 문제를 푼 결과 길이가 50인 비등간격의 필터를 얻을 수 있었다. 설계된 필터의 임펄스 응답과 주파수 응답은 각각 그림 1(a)와 그림 1(b)에 나타내었다. 그림 1(a)에서 볼 수 있듯이 이 필터의 임펄스 응답은 42개의 0이 아닌 필터 계수를 갖고 나머지 8개는 0인 계수를 갖는다. 그러므로 일반적인 방법으로 제작된 필터에 비해 최소한 4개의 곱셈기와 8개의 덧셈기가 2개의 지연기를 더 사용 함으로서 줄어든 셈이다.

예제 2 (IFIR 필터의 모델필터 설계) : 이 예제는 (9)에 나와 있는 IFIR 필터의 설계에 필요한 모델필터를 제안된 방법으로 설계할 경우, 일반적인 방법을 사용하여 모델필터를 제작하는 것보다 계산량 면에서 보다 효율적인 IFIR 선형 위상 필터를 얻을 수 있음을 보이고자 함이다. 기대되는 기준 필터 사양은 표준화된 주파수를 사용하면 아래와 같다.

$$\text{통과대역} : [0.0, 0.0404], \text{ 저지대역} : [0.0556, 0.50],$$

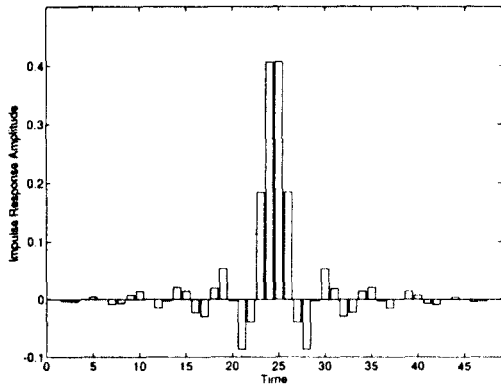
$$dB_p = 0.1612 \text{ dB 최대 통과대역 리플},$$

$$dB_s = 34.548 \text{ dB 최소 저지대역 감쇄}.$$

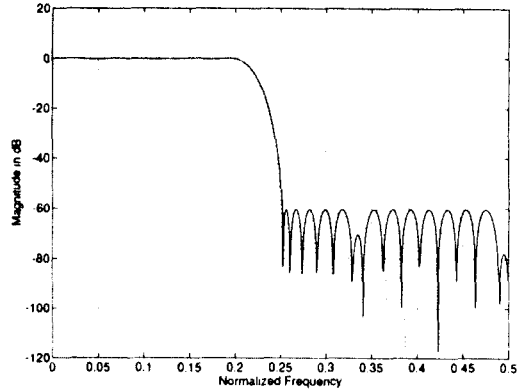
위 필터 사양을 보간율 $L = 2$ 인 IFIR로 설계할 경우 보간하기 전의 모델필터의 사양은 아래와 같이 변한다.

$$\text{통과대역} : [0.0, 0.0808], \text{ 저지대역} : [0.1112, 0.50],$$

$$dB_p = 0.1612 \text{ dB 최대 통과대역 리플},$$

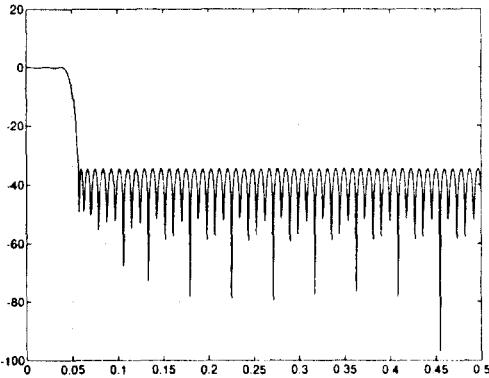


(a)

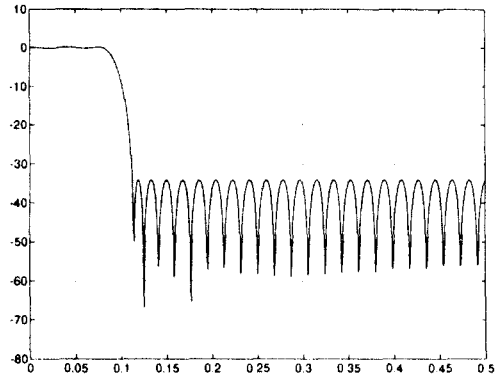


(b)

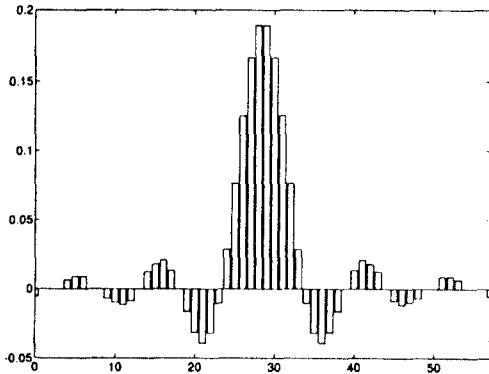
그림 1. (a) 예제 1에서 제안된 방법으로 설계된 필터의 임펄스 응답
(b) 일반적인 방법으로 설계된 필터의 주파수 응답(점선)과 제안된 방법으로 설계된 필터의 주파수 응답(실선)



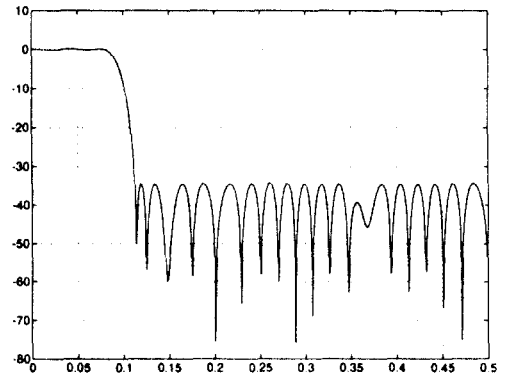
(a)



(b)



(c)



(d)

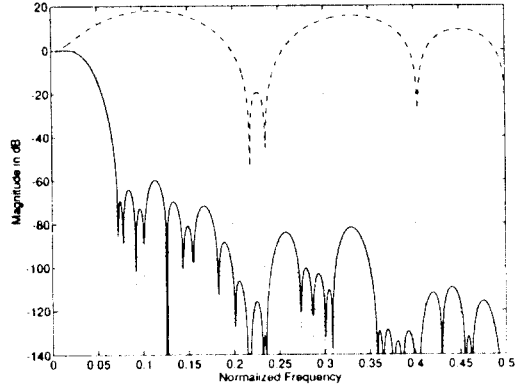
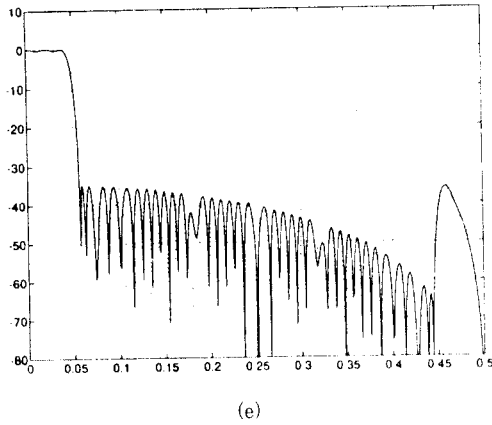


그림 2. (a) 일반적인 방법으로 설계된 기준필터의 주파수 응답
 (b) 일반적인 방법으로 설계된 모델필터의 주파수 응답
 (c) 제안된 방법을 사용하여 설계된 모델필터의 임펄스 응답
 (d) 제안된 방법을 통해 설계된 모델필터의 주파수 응답
 (e) 기준필터 (a)의 주파수 응답(점선)과 (d)의 모델필터를 보간을 2로 보간 후 2차 보간 필터를 결합시킨 IFIR 필터의 주파수 응답(실선)

그림 3. [7]에 주어진 곱셈기 없는 전필터의 주파수 응답 (굵은 점선), 예제 3에서 제안된 방법을 이용하여 설계된 이퀄라이저의 응답(얇은 점선), 그리고 전체 결합필터의 주파수 응답(실선).

$dB_s = 34.548$ dB 최소 저지대역 감쇄.

일반적인 방법으로 기준필터를 설계할 경우 길이가 110인 선형 위상 필터가 필요하였고, 모델필터를 설계할 경우는 길이가 56인 필터가 필요하였다. 그림 2(a)와 그림 2(b)는 일반적인 방법으로 설계한 기준필터와 모델필터의 주파수 응답을 각각 나타낸다. 그러나 제안된 방법을 사용하여 모델필터를 설계할 경우, 길이가 58인 비등간격의 필터로 같은 사양을 만족할 수 있었으며, 이 가운데 0이 아닌 임펄스 응답의 수는 44개였다. 제안된 방법으로 설계된 모델필터의 임펄스 응답과 주파수 응답을 각각 그림 2(c)와 그림 2(d)에 나타내었다. 그림 2(e)는 모델필터를 보간을 $L = 2$ 로 보간하고 간단한 2차 보간기(interpolator)를 사용하여 설계한 IFIR 필터의 주파수 응답을 나타낸다. 그러므로 본 예제의 모델필터의 설계에서 최소한 6개의 곱셈기와 12개의 덧셈기가 2개의 지연기를 더 사용 함으로서 줄어든 결과를 얻었으며, 이로서 제안된 방법이 IFIR 필터 설계 방법과 결합할 경우, IFIR 단독으로 사용하였을 경우에 비하여 계산량 면에서 보다 효율적인 필터를 설계할 수 있음을 알 수 있었다.

예제 3 (전필터-이퀄라이저 설계): 이 예제는 [7]에 나와 있는 예제 4와 똑같은 문제를 다루어 봄으로서 제안된 방법과 SSM 과의 성능을 비교해 보기 위함이다. 기대되는 필터 사양은 표준화된 주파수 상에서 아래와 같다 :

- 통과대역 : $[0.0, 0.021]$, 저지대역 : $[0.07, 0.50]$,
- $dB_p = 0.2$ dB 최대 통과대역 리플,
- $dB_s = 60$ dB 최소 저지대역 감쇄

이 사양을 만족하는 필터는 곱셈기가 없는 전필터와 이퀄라이저의 결합으로 설계된다. [7]에 주어진 전필터에 대해 전체 결합필터가 사양을 만족하도록 제안된 방법으로 이퀄라이저를 설계하였다. 표 1과 그림 3에서는 설계된 이퀄라이저의 임펄스 응답과 주파수 응답을 각각 보여 주었고, 표 2에서는 [7]에 있는 이퀄라이저와 본 예제에서 설계된 이퀄라이저의 계산량을 비교 하였다. 표 2에서도 알 수 있듯이 제안된 방법이 SSM 에 비해 보다 계산량 면에서 효율적인 필터를 설계할 수 있음을 볼 수 있다.

표 1. 예제 2에서 제안된 방법으로 설계된 이퀄라이저의 0이 아닌 임펄스 응답. 여기서 이퀄라이저의 길이는 10이고, $h(n)=h(2N-1-n)$, $n=0,1,\dots,9$ 이다.

n	0	4
h(n)	-1.802035	2.293609

표 2. [7]에서 SSM을 이용하여 설계한 이퀄라이저와 제안된 방법을 이용하여 설계한 이퀄라이저의 계산량 비교

	[7]에서 설계한 이퀄라이저	제안된 방법으로 설계한 이퀄라이
곱셈기	4	2
덧셈기	7	3
지연기	32	9

IV. 결 론

본 논문에서 우리는 탭의 위치가 비등간격으로 존재하고 선형 위상을 갖는 FIR 필터의 설계를 위한 최적화 문제를 제안하였고, 혼합 정수 선형 계획법을 이용하여 이 문제를 풀어서 탭의 위치와 그 계수 값들이 얻어질 수 있음을 보였다. 또한 컴퓨터 모의 실험을 통하여 제안된 방법이 기존 방법들이 적용될 수 없는 필터 형태에 대해서도 유용하게 사용될 수 있으며, 기존 방법들과 결합하여 사용할 경우 기존 방법을 단독으로 사용하였을 경우보다도 더 효율적인 선형 위상의 FIR 필터를 설계할 수 있다는 사실, 그리고 비등간격의 탭을 갖는 필터 설계 방법으로 잘 알려져 있는 SSM보다 더 우수한 성능을 낸다는 것을 보일 수 있었다. 앞으로 제안된 방법을 레이더 어레이 (radar array) 분야나 혹은 자기 귀환 모델 (autoregressive model)의 최적화에 적용시킬 경우 기존의 성능에 더 높은 향상을 가져오리라 기대한다.

참고문헌

1. N. Maeda, "Transversal filters with non-uniform tap spacings." *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. CAS-27, pp.1-11, Jan., 1980.
2. G. Kishi, K. Sakaniwa, and T. Uyematsu, "A design method for transversal filters with nonuniform tap spacing based on the mean square error criterion," in *Proc. 5th Int. Symp. Network Theory*, Sarajevo, Yugoslavia, Sept., 4-7, 1984, pp.363-368.
3. N. M. Mitrou, "Results on nonrecursive digital

- filters with non-equidistant Taps." *IEEE Trans. Acoust. Speech. Signal Processing*, vol. ASSP-33, No. 6, pp.1621-1624, Dec., 1985.
4. R. R. Hocking and R. N. Leslie, "Selection of the best subset in regression analysis," *Technometrics*, vol. 9, 1967, pp.531-540.
5. J. R. Khorrami, "Study of digital filter design and frequency estimation by complex subset selection." M.S. Thesis, University of Rhode Island, Kingston, RI, 1979.
6. R. J. Hartnett and G. F. Boudreaux-Bartels, "Design of efficient parallel hybrid FIR filters using dynamic programming and subset selection methods," in *Proc. 1990 Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing(ICASSP 1990)*, April, 1990, pp.1337-1340.
7. R. J. Hartnett and G. F. Boudreaux-Bartels, "On the use of cyclotomic polynomial prefilters for efficient FIR filter design," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 41, No. 5, pp.1766-1779, May, 1993.
8. J. Adams, and A. Wilson, Jr., "Some efficient digital prefilter structures," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. CAS-31, No. 3, pp.260-265, March, 1984.
9. Y. Neuvo, D. Cheng-Yu, and S. K. Mitra, "Interpolated Finite Impulse Response Filters," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 32, pp.563-570, June, 1984.
10. T. Saramaki, Y. Neuvo, and S. K. Mitra, "Design of computationally efficient interpolat-

ed FIR filters," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. CAS-35, pp.70-87, Jan., 1988.

11. Z. Jing and A. T. Fam, "A new structure for narrow transition band, lowpass digital filter design," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 32, pp.362-370, Apr., 1984.

12. T. Saramaki, "Design of FIR filters as a tapped cascaded interconnection of identical subfilters," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. 34, pp.1011-1029, Sep., 1987.

13. Y. C. Lim and S. R. Parker, "FIR filter design over a discrete powers-of-two coefficient space," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 31, pp.583-591, June, 1983.

14 Using the CPLEX callable library and CPLEX mixed integer library. CPLEX optimization, Inc. Incline Village, NV, 1994.



金俊泰(Joon Tae Kim) 정회원

1967년 9월 29일생
 1990년 8월 : 한국과학기술원 전기 및 전자공학과(학사)
 1993년 2월 : 한국과학기술원 전기 및 전자공학과(석사)
 1993년 3월~현재 : 한국과학기술원 박사과정 재학중

※주관심 분야 : 선형필터, VLSI 신호처리, 디지털 통신 시스템



李勇勳(Yong Hoon Lee) 정회원

1955년 7월 12일생
 1978년 2월 : 서울대학교 전기공학과(학사)
 1980년 2월 : 서울대학교 전기공학과 대학원(석사)

1984년 8월 : Univ. of Pennsylvania(박사)
 1984년~1989년 : SUNY at Buffalo 조교수
 1989년~현재 : 한국과학기술원 부교수로 재직
 ※주관심 분야 : VLSI 신호처리, 선형 및 비선형 필터, 통신 시스템



吳宇鎭(Woo Jin Oh) 정회원

1966년 3월 2일생
 1989년 2월 : 한양대학교 전자공학과(학사)
 1991년 8월 : 한국과학기술원 전자공학과(석사)
 1991년 9월~현재 : 한국과학기술원 박사과정 재학중

※주관심 분야 : 선형필터, VLSI 신호처리