

상태 공간 선형화 법과 비선형 제어기에 의한 도립 진자 시스템의 안정화 제어

正會員 安基亨*, 崔富貴**

State Space Linearization Method and the Stabilization Control of an Inverted Pendulum System using the Nonlinear Controller

Ki Hyung An*, Boo Kwi Choi** Regular Members

要 約

비선형 시스템의 안정 영역과 제어 범위를 확대하기 위해서는 Su, Hunt 등에 의하여 제안된 상태 공간 선형화 법이 적절히 사용되지만, 그 선형화 법은 4차 계의 도립 진자 시스템에는 적용 할 수 없다. 그 이유는 도립 진자 시스템은 상태 공간 선형화 법의 필요 충분 조건을 만족하지 않기 때문이다. 상태 공간 선형화 법의 이러한 제한성을 극복하기 위하여 본 논문에서는 도립 진자 시스템을 평형점 부근의 선형 시스템과 비선형 부분으로 나누어서 비선형 부분에 대하여는 부분적인 보상을 하는 제어기의 설계 방법을 제안하였다. 그리고, 제안된 비선형 제어기의 유효성을 시뮬레이션 및 실험을 통하여 입증한다.

ABSTRACT

To expand the stability region and the control range of the nonlinear system, the state space linearization method proposed by Su, Hunt, and Meyer may be properly used, but the method can not be applied to the fourth order of inverted pendulum system because the inverted pendulum system does not satisfy the state space linearization of necessary and sufficient conditions. As a solution to overcome these restrictions of the linearization method, this paper proposed a nonlinear controller design method which can compensate for the nonlinear part, by dividing the fourth order of inverted pendulum system into the linear system around the equilibrium point and the nonlinear part. The proposed nonlinear controller of validity demonstrated by the experimental and computer simulation.

*부산전문대학 전자통신과
Pusan Junior College Dept. of Electronic
Communication

**동아대학교 전자공학과
Dong-A University Dept. of Electronic
Engineering
論文番號 : 94084-0317
接受日字 : 1994年 3月 17日

I. 서론

도립 진자 시스템은 현대 제어 이론과 응용 문제를 취급할 수 있는 불안정성이 강한 기계적인 시스템이다. 이론 부분에서는 고전 및 현대의 다양한 제어 방식의 효과를 확인하는 실험 장치로 사용되고, 응용 부분에서는 특히 산업용 로봇의 기본 시스템으로, 그리고 우주 항공 분야의 비행체 자세 제어 시스템 설계에 필수적인 장치이다.

로켓트의 발사대를 안정화 시키기 위한 목적에서 출발한 도립 진자 시스템의 안정화에 대한 연구는 1965년 Kapitza에 의하여 처음으로 설계 제작된 이후 Schaefer와 Cannon이 1969년 Bang-Bang 제어를 사용하여 도립 위치에 있는 bending beam을 안정화시킬 수 있는 방법으로 출력 제한 기법을 이용한 제어를 제시하였다.⁽¹⁾

또한, Strugean과 Loscutoff는 1972년 상태 공간을 이용한 출력 제한 제어기로서 관측기 레귤레이터형 동적 안정화 제어기를 사용하여 도립 진자를 안정화시킬 수 있는 제어 시스템을 설계 하였다.⁽²⁾⁽³⁾ 그리고 이러한 연구 결과를 근거로 Sehba(1983) 및 Furuta(1984)는 이중 및 삼중 도립 진자 시스템에 대하여 컴퓨터 제어를 행하였으며, Feng(1988) 등은 극점 배치법과 최적 제어법을 비교 분석하여 도립 진자 시스템의 안정화에 대한 시뮬레이션 결과를 발표하였다.⁽⁴⁾⁽⁸⁾

그러나 이 결과는 도립 진자 시스템이 일차원이고, 파라미터의 변동에 민감하여 적절한 제한 이득을 결정하기 위한 알고리즘이 아니므로 시스템의 상태가 평형점 주위의 미소 각, 미소 변위에 대하여 선형화된 근사 모델인 경우만 만족하고, 시스템의 상태가 평형점에서 벗어나면 안정화 되지 못하는 결점을 가지고 있기 때문에 보다 넓은 안정 영역과 비선형성을 적극적으로 고려한 제어가 요구된다.

도립 진자 시스템의 안정 영역과 제어 유효 범위를 확대하기 위해서는 Su, Hunt 등에 의하여 제안된⁽⁹⁾ 정확한 선형화 법이 적당하지만 도립 진자 시스템의 경우 이 선형화 법의 필요 충분 조건을 만족하지 않기 때문에 이 방법을 통한 정확한 선형화와 제어기 설계가 불가능하다.

따라서 본 논문에서는 도립 진자 시스템을 평형점 주위에서의 선형 시스템과 그 이외의 비선형 부분으로 나

누어서 비선형 부분에 대해서는 부분적인 보상을 하므로서 상태 공간 선형화 법에 의한 규칙과 근사한 제어 규칙을 얻을수 있는 방법을 제안하였다.

또한, 제안된 비선형 제어기와 도립 진자 시스템의 평형점 주위에서 근사 선형화된 모델에 대한 선형 제어기의 응답 특성을 시뮬레이션으로 비교 검토하였고, 실제 제어 실험을 통하여 비선형 제어기의 유효성을 입증하고자 한다.

II. 도립 진자 시스템의 수식 모델

도립 진자 시스템은 활차, 진자, 증폭기, 위치 및 속도 검출기, 구동 모터 등으로 구성되고, 진자의 운동은 진자의 방향이 연직하에서 안정 상태가 되므로 자연 평형점이 되고, 연직상에서 불안정한 제2의 평형점을 가지게 된다. 따라서 제 2의 평형점에서는 제어력이 인가되지 않는 한 항상 어느 방향으로든지 떨어지게 되는 불안정한 시스템이 될 것이다.

진자의 각도 $\theta(t)$ 를 수직 축으로 부터 기울어진 경사각이라 정의하고, 그림 1과 같은 방향의 경사각 $\theta(t)$ 를 (+)방향의 각이라 정의한다. 또한, 진자의 각도를 제어하는데 필요한 활차의 조작량 $u(t)$ 도 그림 1과 같은 방향

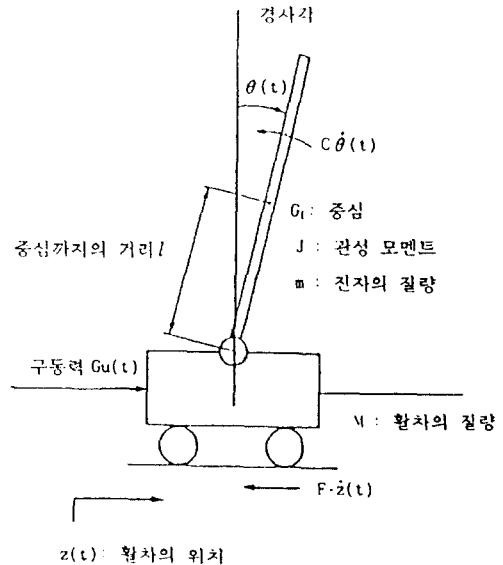


그림 1. 도립 진자 시스템의 구성
Fig. 1. Schematic diagram of inverted pendulum system

을 (+)로 취한다. 따라서 $\theta(t)$ 가 (+)방향이면 $\theta(t)$ 를 감소시켜 도립 진자가 수직 위치에 오도록 (+)방향으로 활차를 이동 시켜야 한다.

그림 1과 같은 도립 진자 시스템의 수식 모델은 도립 진자의 힘과 변위의 관계로부터 다음과 같은 가정을 전제로 구할 수 있다.

(가정)

- i) 활차는 수평 방향으로만 이동한다.
- ii) 구동 모터의 전기적 시간 지연은 없다.
- iii) 진자는 강체이다.
- iv) 활차와 진자의 마찰력은 각각 활차의 이동 속도, 진자의 각속도에 비례한다.
- v) 구동 모터의 동력을 활차에 전달하는 와이어의 신장은 없다.

이와 같은 가정하에서 도립 진자 시스템의 운동 방정식은 Newton의 제 2법칙을 적용하여 활차와 진자의 2부분으로 나누어 각각 나타낼 수 있다.

2.1 활차의 운동 방정식

수평 방향으로 작용하는 활차의 운동 방정식은 식(1)과 같이 표현할 수 있다.

$$M \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = Gu(t) - H(t) - F \frac{dz(t)}{dt} \quad (1)$$

여기서, 각 변수들은 다음과 같이 정의한다.

M : 활차의 질량 [kg]

$z(t)$: 시간 t 에서 활차의 위치 [m]

$u(t)$: 모터의 입력 전압 [V]

G : 단위 입력 전압에 대하여 모터가 발생하는 힘 [$\frac{N}{V}$]

F : 활차와 모터 계의 등가 점성 마찰계수 [$\frac{kg}{sec}$]

$H(t)$: 진자가 넘어질 때 진자에 의하여 활차에 가해지는 힘의 수평 성분 [N]

2.2 진자의 운동 방정식

진자의 수평 방향의 운동 방정식은 식(2)와 같이 표현할 수 있고,

$$m \frac{d^2}{dt^2} [z(t) + l \sin \theta(t)] = H(t) \quad (2)$$

진자의 수직 방향의 운동 방정식은 식(3)과 같이 표현된다.

$$m \frac{d^2}{dt^2} [l \cos \theta(t)] = V(t) - mg \quad (3)$$

또한, 진자의 회전에 대한 운동 방정식은 식(4)로 표현할 수 있다.

$$J \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} = V(t) l \sin \theta(t) - H(t) l \cos \theta(t) - c \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (4)$$

여기서, 각 변수들은 다음과 같이 정의한다.

J : 진자 중심 주위의 관성 모멘트 [$kg \cdot m^2$]

$\theta(t)$: 진자의 수직 축으로 부터 기울어진 경사각 [rad]

$V(t)$: 활차에 의하여 진자에 가해지는 힘의 수직 성분 [N]

l : 축에서 진자의 무게 중심까지의 거리 [m]

$H(t)$: 활차에 의하여 진자에 가해지는 힘의 수평 성분 [N]

c : 진자 축의 점성 마찰 계수 [$kg \frac{m^2}{sec}$]

m : 진자의 질량 [kg]

g : 중력 가속도 [$\frac{m}{sec^2}$]

따라서, 앞의 식들을 정리하면 활차의 운동 방정식은 식(5)와 같이 표현할 수 있다.

$$(M+m) \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = Gu(t) - F \frac{dz(t)}{dt} + ml \sin \theta(t) \left[\frac{d\theta(t)}{dt} \right]^2 - ml \cos \theta(t) \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} \quad (5)$$

그리고, 활차의 운동 방정식(5)에서 해석을 간단히 하기 위하여 진자가 넘어질 때 진자로부터 활차에 미치는 힘을 무시할 수 있을 정도로 작은 것으로 가정하면 활차의 운동 방정식은 식(6)과 같은 선형 미분 방정식 형태로 표현된다.

$$(M+m) \frac{d^2 z(t)}{dt^2} + F \frac{dz(t)}{dt} = Gu(t) \quad (6)$$

또한, 앞의 식들을 정리하면 진자의 운동 방정식은 식(7)과 같이 표현할 수 있다.

$$(J+ml^2) \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + c \frac{d\theta(t)}{dt} - mgl \sin \theta(t) +$$

$$ml\cos\theta(t) \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = 0 \tag{7}$$

2.3) 파라미터 값의 결정

도립 진자 시스템에 대한 제어기를 설계 할 때는 몇개의 파라미터가 필요하다. 즉, 활차의 운동 방정식(6)에 포함되어 있는 파라미터는 m, M, F, G 의 4개이다.

여기서 활차의 질량 M 과 진자의 질량 m 은 직접 측정될 수 있으나 F, G 는 직접 측정할 수 없기 때문에 간접적으로 결정 하여야 한다. 따라서 본 논문에서는 다음과 같은 방법으로 F, G 를 구한다.

시간 $t=0$ 일때 증폭기에 일정 전압 u_0 를 인가하면, 초기 조건 $z(0) = \dot{z}(0) = 0$ 에 대한 식(6)의 해 $z(t), \dot{z}(t)$ 는 식(8), (9)와 같이 주어진다.

$$z(t) = \frac{\alpha}{\beta} \left[\frac{1}{\beta} (e^{-\beta t} - 1) + t \right] u_0 \tag{8}$$

$$\dot{z}(t) = \frac{\alpha}{\beta} [1 - e^{-\beta t}] u_0 \tag{9}$$

여기서, $\alpha = \frac{G}{(M+m)}, \beta = \frac{F}{(M+m)}$ 이다.

$z(t)$ 는 모터축 로타리 엔코더의 펄스를 카운터 함으로써 실제 측정이 가능하고, $\dot{z}(t)$ 는 $z(t)$ 를 미분하여 구할 수 있다. 지금 β 가 충분히 크다고 하면, 식(10)에서 $\frac{\alpha}{\beta}$ 를 구할 수 있다.

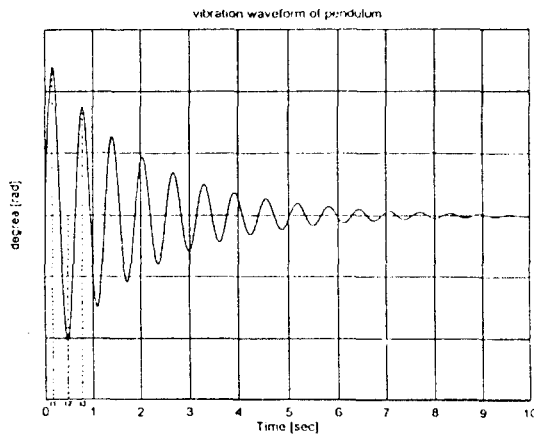


그림 2. 진자의 진동 파형
Fig. 2. Vibration waveform of pendulum

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{\alpha}{\beta} u_0 \tag{10}$$

그리고 다시 t_0 에서의 $z(t)$ 의 값 $z(t_0)$ 와 위에서 구한 $\frac{\alpha}{\beta}$ 의 값을 식(8)에 대입하면 β 의 값을 구할 수 있다.

또한, 진자의 운동 방정식에 포함되어 있는 파라미터는 J, m, l, c, g 의 5가지 이다.

여기서 진자의 질량 m , 길이 l 은 실제 측정할 수 있고, g 는 중력 가속도이며, J 와 c 의 값은 다음과 같이 구할 수 있다. 먼저 활차를 정지시키고 진자를 넘어뜨려 미소 각도로 흔들어 자유 진동을 시키면 운동 방정식은 식(11)과 같이 표현된다.

$$\frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} = -\frac{1}{(J+ml^2)} [-mgl\theta(t) - c \frac{d\theta(t)}{dt}] \tag{11}$$

이 미분 방정식을 해석하면 감쇠 진동 파형의 각 주파수 ω 와 감쇠율 λ 는 식(12), (13), (14)로 주어진다.

$$\lambda = \frac{c}{(2\sqrt{mgl(J+ml^2)})} \tag{12}$$

$$w_n = \sqrt{(mgl/(J+ml^2))} \tag{13}$$

$$w = w_n \sqrt{(1-\lambda^2)} \tag{14}$$

한편, 진동 파형은 그림 2와 같이 되므로 진동 파형으로 부터 각 주파수 ω , 그리고 포물선으로 부터 감쇠 특성을 측정하면 J 와 c 를 구할 수 있다. 또한, 진동 파형의 측정은 레코더 등의 계측기가 있으면 가장 좋지만 그것이 없더라도 카운터 보드에 부착되어 있는 타이머로 컴퓨터 내부의 타이머를 이용하여 일정 시간마다 진자의 흔들리는 각을 샘플링하면 측정이 가능하다.

III. 비선형 제어기 설계

도립 진자 시스템은 진자의 각도에 관한 비선형성이 크기 때문에 일반적인 선형 제어기로서는 넓은 안정 영역을 얻을 수 없다. 따라서, 보다 넓은 안정 영역을 얻기 위하여 불안정한 도립 진자 시스템을 평형점 주위의 선형 시스템과 그 이외의 비선형 부분으로 나누어서 비선형 부분에 대하여서는 부분적인 보상을 하는 비선형 제어기를 구성한다.

식(6)과 같은 선형 미분 방정식 형태로 표현되는 활차의 운동 방정식에서 $\alpha = \frac{F}{(M+m)}, \beta = \frac{G}{(M+m)}$

라 두면, 활차의 운동 방정식은 식(15)로 표현할 수 있다.

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} = -\alpha \frac{dz(t)}{dt} + \beta u(t) \quad (15)$$

다음에는 진자의 운동 방정식(7)를 평형점 주위의 선형 시스템과 그 이외의 비선형 부분으로 나누어서 표시해 보자. 즉, 식(7)에서 진자의 각도 $\theta(t)$ 에 의한 비선형 요소를 제거하기 위하여 새로운 입력 $v(t)$ 을 식(16)과 같이 정의하면

$$v(t) = -g\theta(t) + g\sin\theta(t) - \frac{d^2 z(t)}{dt^2} \cos\theta(t) \quad (16)$$

진자의 운동 방정식은 식(17)과 같은 선형 시스템 형태로 표현할 수 있다.

$$(J + ml^2) \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + c \frac{d\theta(t)}{dt} - mgl\theta(t) = mlv(t) \quad (17)$$

따라서, 식(15), (16), (17)이 제어 대상을 나타내고 있기 때문에 이것을 블록 선도로 나타내면 그림 3과 같다. 그림 3에서는 진자가 넘어질 때 진자로 부터 활차에 미치는 힘을 무시하고 있기 때문에 진자의 블록에서 활차의 블록까지의 피드백 결합은 없다.

또한, $v(t)$ 는 제어 대상의 내부 변수이므로 이것을 제어 입력으로 이용할 수는 없다.

따라서 먼저 원하는 $v(t)$ 를 구하고, 그리고 그것을 발생하는 비선형 제어기를 구성해야 한다. 우선 $v(t)$ 를 제어 입력으로 생각하여 식(17)를 안정화 시키기 위하

여 원하는 선형 제어 규칙 $v_d(t)$ 를 식(18)과 같이 정의한다.

$$v_d(t) = k_1 \theta(t) + k_2 \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (18)$$

또한, 식(18)의 선형 제어 규칙을 설계하기 위하여 원하는 가속도는 식(16)으로 부터 역산하면 식(19)의 형태로 구성된다.

$$\frac{d^2 z_d(t)}{dt^2} = \frac{-v_d(t) - g\theta(t) + g\sin\theta(t)}{\cos\theta(t)} \quad (19)$$

여기서, 다음 문제는 실제 활차의 가속도 $\frac{d^2 z(t)}{dt^2}$ 가 원하는 가속도 $\frac{d^2 z_d(t)}{dt^2}$ 에 추종하게 활차 시스템을 제어하는 것이다. 따라서 실제 활차의 가속도가 원하는 가속도에 추종하기 위하여 활차 시스템의 상태 궤환을 식(20)과 같이 정의한다.

$$v(t) = -k_3 z(t) - k_4 \frac{dz(t)}{dt} + q \frac{d^2 z_d(t)}{dt^2} \quad (20)$$

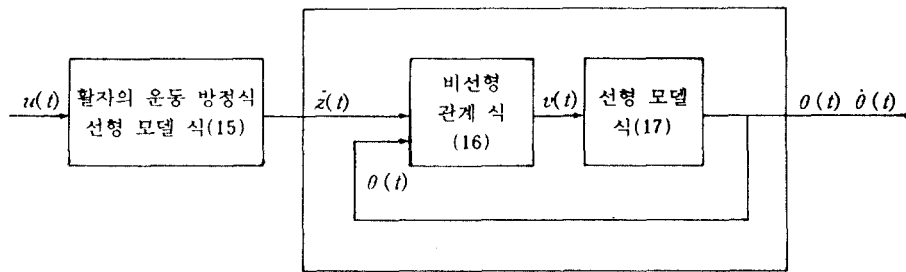
그리고, 식(15)는 식(20)을 대입하여 정리하면 식(21)과 같이 표현할 수 있다.

$$q\beta \frac{d^2 z_d(t)}{dt^2} = \frac{d^2 z(t)}{dt^2} + \frac{dz(t)}{dt} (\alpha + \beta k_4) + \beta k_3 z(t) \quad (21)$$

이때 $\frac{d^2 z_d(t)}{dt^2}$ 에서 $\frac{d^2 z(t)}{dt^2}$ 까지의 전달함수 $h(s)$ 는 식(22)와 같이 표현할 수 있다.

$$h(s) = \frac{z(s)}{z_d(s)} = \frac{q\beta S^2}{S^2 + [\alpha + \beta k_4]S + \beta k_3} \quad (22)$$

또한, 고역 주파수에서 $h(s)=1$ 이 되는 것처럼 q 를



진자 운동 블록

그림 3. 도립 진자 모델의 구조
Fig. 3. Block diagram of inverted pendulum model

식(23)과 같이 정의한다.

$$a = \frac{1}{\beta} \tag{23}$$

따라서 선형 시스템에 대한 상태 궤환 이득과 일치하게 이득 k_1, k_2, k_3, k_4 을 결정한다. 이와 같은 구성을 블록 선도로 표시하면 그림 4와 같다.

또한, 이 비선형 제어기의 평형점 주위에서 선형화된 방정식은 식(18), (19), (20) 및 $\sin \theta(t) \approx \theta(t), \cos \theta(t) \approx 1$ 에 의하여 식(24)로 표현될 수 있다.

$$u(t) = \frac{-k_1}{\beta} \theta(t) - \frac{k_2}{\beta} \frac{d\theta(t)}{dt} - k_3 z(t) - k_4 \frac{dz(t)}{dt} \tag{24}$$

따라서 이것은 독립 진자 시스템의 평형점 주위에서 근사 선형화된 근사 모델에 대한 선형 제어기의 상태 궤환 이득을 $k_p = (k_{p1}, k_{p2}, k_{p3}, k_{p4})$ 라고 하면, 제안된 비선형 제어기의 상태 궤환 이득은 식(25)와 같이 구할 수 있다.

$$k_1 = \beta k_{p1}, k_2 = \beta k_{p2}, k_3 = k_{p3}, k_4 = k_{p4} \tag{25}$$

여기서 선형 제어기의 상태 궤환 이득 k_p 는 최적 레귤레이터(optimal regulator) 또는 극 배치법 등을 이용하여 구할 수 있다. 또한, 제안된 비선형 제어기는 평형점 주위에서는 선형 제어기와 같은 동작을 하고, 평

형점 주위에서 부터 멀리 떨어져도 비선형 보상 효과가 충분히 발휘된다. 이와 관련하여 $v_d = 0$ 인 경우 비선형 제어기의 비선형부 $\frac{-g\theta(t) + g\sin\theta(t)}{\cos\theta(t)}$ 의 특성을 그림 5에 나타내고 있다. 그림 5에서 $\theta(t)$ 가 $-1[rad]$ 이하나 $1[rad]$ 이상인 경우 비선형 효과가 급속하게 커지는 것을 알 수 있다. 즉, $-1[rad]$ 에서 부터 $1[rad]$ 의 범위까지는 선형 시스템과 거의 동일하다.

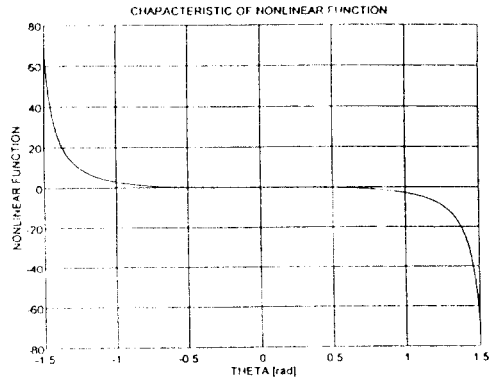


그림 5. 비선형부의 특성 $\frac{-g\theta(t) + g\sin\theta(t)}{\cos\theta(t)}$
 Fig. 5. Characteristic of nonlinear function $\frac{-g\theta(t) + g\sin\theta(t)}{\cos\theta(t)}$

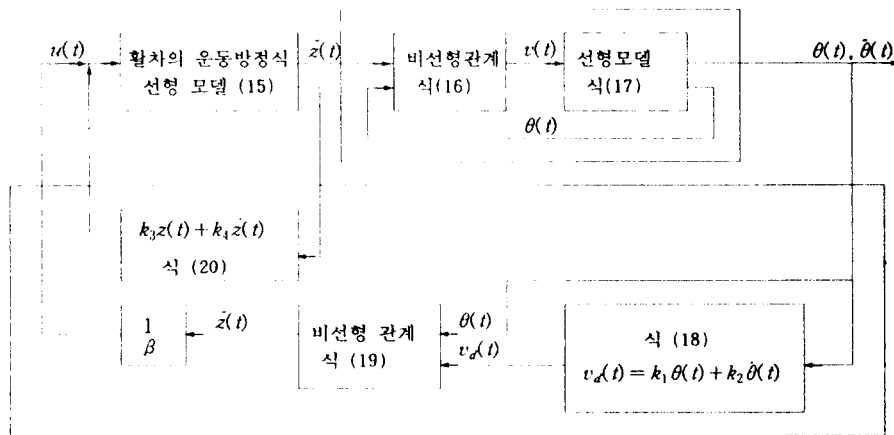


그림 4. 비선형 제어기의 블록 선도
 Fig. 4. Block diagram of nonlinear controller

IV. 선형 제어기 설계 와 시뮬레이션

제안된 비선형 제어기의 상태 궤환 이득 k 는 평형점 주위에서 근사 선형화된 선형 제어기의 상태 궤환 이득 k_p 를 구하면 알수 있다. 따라서 근사 선형화된 도립 진자 시스템의 모델에서 먼저 선형 제어기의 이득을 구한다.

도립 진자 시스템의 근사 선형화된 상태 공간 모델은 상태 변수를 $x_1(t)=\theta(t)$, $x_2(t)=\dot{\theta}(t)$, $x_3(t)=z(t)$, $x_4(t)=\dot{z}(t)$ 라 정의하면 식(26)의 형태로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{26}$$

여기서,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_1g & -a_2c & 0 & a_1a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -a_4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -a_1a_3 \\ 0 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

또한, $a_1 = \frac{ml}{(J+ml^2)}$, $a_2 = \frac{1}{(J+ml^2)}$.

$$a_3 = \frac{G}{(M+m)}, \quad a_4 = \frac{F}{(M+m)}$$

이다.

그리고, 본 논문의 실험 장치에서 측정된 도립 진자 시스템의 각 파라미터 값은 표 1과 같다.

이들 값을 대입하여 정리하면 도립 진자 시스템의 계수 행렬은 식(27)과 같다.

표 1. 파라미터의 값
Table 1. Values of parameters

활차	$M = 0.96$ [kg]
	$G = 24.7$ [$\frac{N}{V}$]
	$F = 23.5$ [$\frac{kg}{sec}$]
진자	$m = 0.12$ [kg]
	$l = 0.26$ [m]
	$J = 1.6 \times 10^{-3}$ [kgm^2]
	$g = 9.8$ [$\frac{m}{sec^2}$]
	$c = 1.7 \times 10^{-3}$ [kgm^2/s]

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 31.5 & -0.18 & 0 & 69.9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -21.8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -73.5 \\ 0 \\ 22.9 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{27}$$

식(27)에서 계산된 A 행렬의 특성근은 $\{0, 5.5232, -5.7032, -21.8\}$ 이므로 이들 고유치 중 개의 극점이 복소 평면의 우반 평면에 존재하므로 도립 진자 시스템은 불안정한 시스템인 것을 알 수 있다. 도립 진자 시스템은 4차 시스템이기 때문에 4개의 특성근을 지정해야 한다. 특성근을 어디에 지정해야 하는지는 복수 평면의 좌반 평면내에 지정 되어야만 안정하게 도립될 수 있다는 것을 알 뿐 너무 막연하다.

그러나 본 논문에서 제어기 설계의 극점 지정 방법은 도립 진자 시스템의 안정화에 주된 관심을 두었으므로 시스템 응답의 최적화는 고려하지 않았다. 따라서 원하는 페루프의 극점을 다음 식(28)에 지정할 경우 선형 제어기의 이득 k_p 는

$$\lambda_1 = -2+3j, \lambda_2 = -2-3j, \lambda_3 = -10, \lambda_4 = -10 \tag{28}$$

다음 식(29)와 같이 구해진다.

$$k_p = [3.6542, 0.6098, 1.8022, 1.8692] \tag{29}$$

이 이득에 대하여 선형 제어기와 비선형 제어기의 응답 특성을 시뮬레이션으로 비교한 결과를 그림 6, 그림 7, 그림 8에 나타내고 있다.

우선, 초기치로서 각도 $\theta(t)$ 를 주고 시뮬레이션을 하여 안정 영역에 유지되는 최대 초기각도를 구하면 비선형 제어기에서는 $1.5[rad]$ 이었고, 선형 제어기에서는 $1.07[rad]$ 이었다.

특히 선형 제어기의 경우에는 비선형 효과가 크게 되기 시작하는 $1[rad]$ 부근에서 한계가 생기는데 대하여 비선형 제어기에서는 비선형성이 강한 $1.5[rad]$ 까지 안정 영역이 확대 되었다.

그림 6, 그림 7, 그림 8에는 진자의 초기 각도가 각각 $0.5[rad]$, $1.07[rad]$, $1.5[rad]$ 인 경우의 비선형 제어기와 선형 제어기의 응답 특성을 보여주고 있다.

그림 6과 그림 7의 결과에서 제안된 비선형 제어기와 선형 제어기는 유사한 결과를 보여주고 있으며, 약 2초 후에는 진자가 도립된 상태에 도달한다. 그러나 그림 8과 같이 진자의 초기 각도가 $1.5[rad]$ 인 경우의 결과에

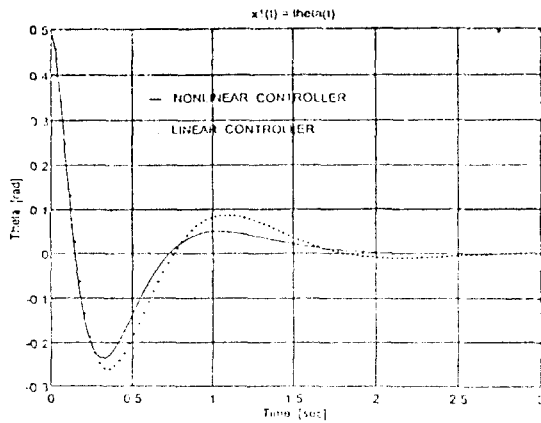


그림 6. 진자의 초기각도 0.5(rad)에 대한 응답 특성
Fig. 6. Time response of the angle $\theta(t)$ for initial condition $\theta(0)=0.5(\text{rad})$

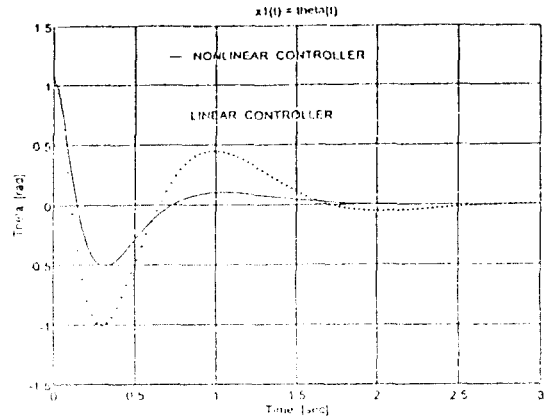


그림 7. 진자의 초기각도 1.07(rad)에 대한 응답 특성
Fig. 7. Time response of the angle $\theta(t)$ for initial conditions $\theta(0)=1.07(\text{rad})$

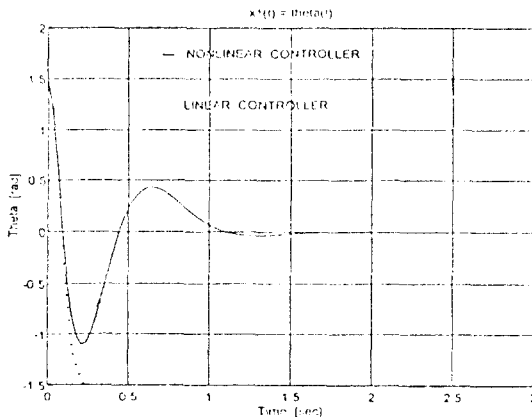


그림 8. 진자의 각도 1.5(rad)에 대한 응답 특성
Fig. 8. Time response of the angle $\theta(t)$ for initial condition $\theta(0)=1.5(\text{rad})$

서는 제안된 비선형 제어기는 약 2.5초 후에 진자가 독립 상태에 도달하나 선형 제어기의 경우 불안정한 상태가 되어 안정화되지 못하는 것을 보여 주고있다.

V. 실험 장치의 구성 및 실험 결과 고찰

5. 1) 독립 진자 시스템의 제작

실험에 사용한 독립 진자 시스템의 구성도를 그림 9에 나타내고 있다.

그림 9의 실험 장치에서 진자가 부착된 활차 부분은 길이 2(m), 폭 20(mm)의 레일 위를 수평 방향으로만 이동하게 하였고, 레일의 마찰이나 점성 저항을 났 수 있으면 적게하기 위하여 직동 레일을 사용하였으며, 이 레일은 이동 블록과 set로 되어 있고, 활차는 그 이동 블록의 위에 부착하였다. 활차의 질량은 그 탑재물을 포함하여 $M = 0.96[\text{kg}]$ 이다. 그리고 활차에 실리는 진자의 회전 지점은 장치 중 가장 신경을 쓴 부분인데, 그 이유는 마찰이 있으면 진자가 제어를 하지 않더라도 그대로 서버리기 때문이다.

따라서 마찰을 방지하기 위하여 직경이 6(mm)인 소형의 베어링을 사용하였다. 이 축에는 진자의 각도를 검출하기 위하여 로타리 엔코더를 부착하고, 진자의 축과 엔코더의 축간의 결합은 카플링(coupling)을 사용하였다. 진자는 질량 $m=0.12[\text{kg}]$, 길이 50(cm), 직경 6(mm)의 스텐레스 봉을 선택하였다.

또한, 활차를 움직이는 힘은 모터에 부착되어 있는 외경 30(mm)의 풀리(pulley)에 감겨있는 와이어를 통하여 전달되고, 와이어는 미끄러지지 않도록 가능한 한 팽팽하게 당겨져 있으며, 활차의 위치를 검출하기 위하여 모터축에 로타리 엔코더가 부착되어 있다.

그리고 모터가 22 회전 할 때 활차가 레일의 양끝으로 이동하였기 때문에 22 : 1의 감속 기어를 사용하여 모터와 로타리 엔코더를 연결함으로써 모터가 22 회전 할 때 엔코더는 1회전 하도록 하여 레일상의 활차 위치



그림 9. 도립 진자 시스템의 실험 장치
Fig. 9. Experimental apparatus of inverted pendulum system

를 검출하도록 하였다.

센서는 진자의 각도 $\theta(t)$ 와 활차의 레일상의 위치 $z(t)$ 를 검출하기 위하여 2개가 필요하다.

각도 센서로서는 포텐셜메터나 로타리 엔코더가 사용되지만 포텐셜메터는 잡음의 영향을 받기가 쉽기 때문에 본 실험 장치에서는 광학식의 인클리드 멘탈형 로타리 엔코더를 사용하였다.

진자의 각도를 검출하는 로타리 엔코더는 1회전마다 2500 펄스를 발생하기 때문에 1 pulse 당 회전각은 $\frac{360^\circ}{2500} = 0.144^\circ$ 이고, 활차의 수평 위치를 검출하기 위하여 모터축에 부착된 로타리 엔코더 역시 1회전마다 2500 펄스를 발생하는 것을 사용했기 때문에 활차가 1[cm]이동할 때 마다 약 5개의 펄스가 발생하여 1 pulse 당 이동량은 2.11[mm]이다.

5.2) 제어기의 구성

도립 진자 시스템을 제어하기 위한 안정화 제어기의 구성도를 그림 10에 나타내었다.

도립 진자 시스템을 제어하기 위한 제어기는 C 언어로 프로그래밍 하여 컴퓨터 상에서 실현하였다. 제어기는 첫째, 2개의 로타리 엔코더로 부터 진자의 회전각 $\theta(t)$ 와 활차의 위치 $z(t)$ 를 검출하는 엔코더 카운터 부분, 둘째 엔코더 카운터의 data를 가지고 제어 규칙에 따라 계산을 하여 조작량 $u(t)$ 를 구하는 연산 부분 셋째, 연산에서 얻은 조작량 $u(t)$ 를 서보 모터의 구동 회로에 인가하는 전압으로 변환하기 위한 D/A 변환기의 3 부분으로 나누어진다.

각 부분의 동작은 1 샘플링 주기내에 먼저 진자의 각도 $\theta(t)$ 와 활차의 위치 $z(t)$ 를 검출하는 로타리 엔코더의 펄스 신호는 카운터 보드에 의하여 펄스 수로 변환되어 각각 16 bit 의 디지털 신호로 I/O port 로 부터 컴퓨터에 입력된다. 그리고 컴퓨터 내에서는 이 입력된 신호를 실제의 위치와 각도로 변환하고, 변환된 각도 $\theta(t)$ 와 위치 $z(t)$ 는 제어 규칙에 따라 연산을 하여 DC 서보 모터에 인가하는 조작량 $u(t)$ 의 data를 구하고, 구해진 data 를 D/A 변환기에 출력하여 그 조작량 $u(t)$ 를 DC 서보 모터 구동 회로에 인가한다.

그러나 도립 진자 시스템의 실험 모델을 컴퓨터에 의하여 제어를 할 경우 각각의 처리에 약간의 시간이 필요하게 된다. 즉, 컴퓨터는 일정한 샘플링 시간 t 마다 진자의 각도 $\theta(t)$ 와 활차의 위치 $z(t)$ 를 입력하고, 여기에 기초하여 그 시점의 조작량 $u(t)$ 를 출력한다.

따라서 조작량 $u(t)$ 는 샘플링 시간마다 변화하지만 샘플링 시간 사이에는 일정하게 유지된다. 이와 같이 도립 진자 시스템을 컴퓨터에 의하여 제어할 경우 제어 시스템은 샘플링 시간 Δt 의 이산 시간 제어시스템 으로 구성하여야 한다. 이산 시간 제어 시스템에 있어서는 샘플링 시간을 어느 정도의 시간 간격으로 설정하는가 하는 것이 중요한 문제가 된다. 샘플링 시간을 너무 크게 하면 연속 시간 제어 시스템에서는 안정화 되지만 이산 시간 제어 시스템에서는 불안정하게 되는 경우가 있다. 그러나 샘플링 시간을 충분히 적게 설정하면 연속 시간 제어 시스템의 해석 결과를 이산 시간 제어시스템에 그대로 적용할수가 있다.

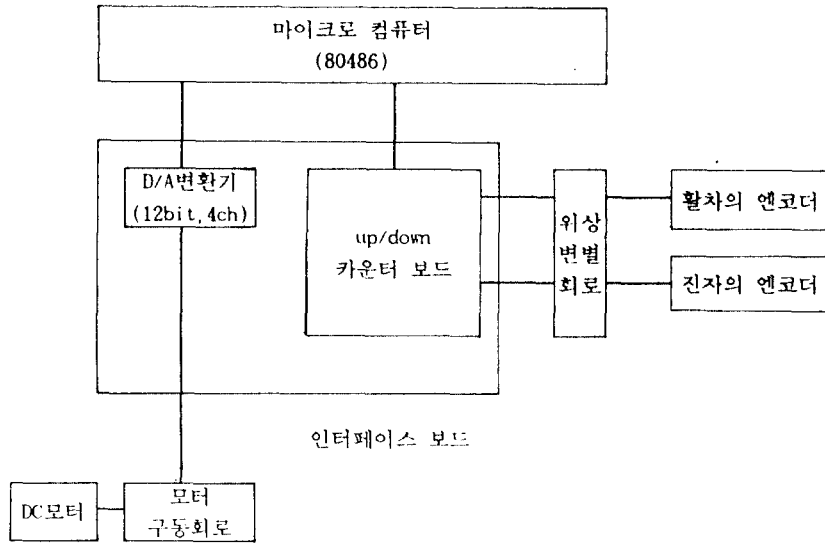


그림 10. 제어기의 구성
Fig. 10. Block diagram of controller for inverted pendulum system

이산 시간으로 양을 표현하기 위하여 $u(i)=u(i\Delta t)$ 의 표기법을 사용하자. 여기서 i 는 정수이고 $u(1), u(2)$ 는 각각 시간 $t=\Delta t, t=2\Delta t$ 초에서의 값을 의미한다.

이때 조작량 $u[i+1]$ 는 식(30)과 같이 표현 할 수 있다.

$$u[i+1]=ku[i] \tag{30}$$

이식은 마치 1 샘플링 시간 만큼 조작량이 지연되는 것으로 의미되지만 샘플링 시간을 시스템의 응답 시간에 비하여 충분히 짧게 설정하면 그 지연의 영향은 전혀 없게된다.

그리고 조작량 $u[i+1]$ 를 구하기 위해서는 상태량 (활차의 위치, 속도, 진자의 각도, 각속도)의 값이 필요하다. 그러나 실험 장치에서 상태량을 직접 구할수 있는 것은 활차의 위치 $z(t)$ 와 진자의 각도 $\theta(t)$ 의 2가지 뿐이고, 이것들은 각각의 로타리 엔코더에 의하여 검출되어 샘플링 시간마다 컴퓨터에 입력된다. 따라서 그 이외의 상태량인 각속도 $\dot{\theta}(t)$ 와 속도 $\dot{z}(t)$ 의 현재의 값은 간단히 해석하기 위하여 현재의 $\theta(t)$ 와 $z(t)$ 의 값과 1샘플링 주기 전에 입력한 값과의 차이를 샘플링 주기로 나눈 값으로 근사화 하였다. 즉, 활차의 위치 $z(t)$ 와 진자의 각도 $\theta(t)$ 를 수치적으로 시간 미분하여 구하였다.

시간함수 $y(t)$ 의 시간 미분은 미소 시간 구간을 생각 하였을 때 식(31)로 근사화 된다.

$$\dot{y}[i] = \frac{(y[i] - y[i-1])}{\Delta t} \tag{31}$$

이 관계를 이용하면 조작량 $u[i+1]$ 는 식(32)에 의하여 구할 수 있다.

$$u[i+1] = k_1x_1[i] + k_2 \frac{(x_1[i] - x_1[i-1])}{\Delta t} + k_3x_3[i] + k_4 \frac{(x_3[i] - x_3[i-1])}{\Delta t} \tag{32}$$

5.3) 실험 결과 고찰

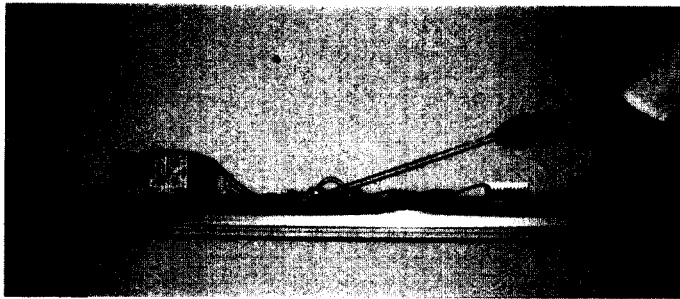
도립 진자 시스템에 대한 안정화 실험은 이론 해석 결과 구한 비선형 제어기의 계환 이득 계수 k_1, k_2, k_3, k_4 의 값을 적용하여 실험을 행하였다. 이때 최초 샘플링 시간 Δt 는 0.1(sec)에 설정하였다. 실험 결과에서 비선형 제어기의 계환 이득 계수의 값을 이론값 그대로 사용하였을때 도립 진자와 활차는 어느 정도의 진폭으로 진동하는 상태가 되었으며, 활차는 약 20(cm)의 범위에서 왕복 운동을 하였다.

그러나 샘플링 시간 Δt 를 0.1(sec)보다 적게 설정한 방법이 더 양호한 결과가 얻어졌으며, 최종적으로 샘플

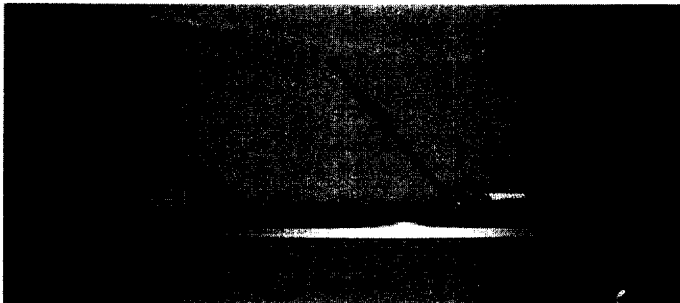
링 시간 Δt 를 20[msec]에 설정하였다. 그리고 궤환 이득 계수를 이론값으로부터 같은 비율로 증가해 가면 진동하는 진폭이 적어졌으며, 궤환 이득 계수의 값을 이론값의 약 1.2배로 하였을 때 진자와 활차의 진동은 더욱 적어졌고, 활차의 위치는 레일의 중앙 위치에서 약 1[cm]의 범위에 위치하고 있었다. 이와 같이 제어 파라미터를 여러가지로 바꾸어서 실험을 한 결과 궤환 이득 계수의 값을 이론값 보다 조금 크게 설정했을 때 도

립 진자가 거의 수직으로 유지되면서 활차도 레일의 중앙 위치에 가깝게 위치하는 것이 확인되었다.

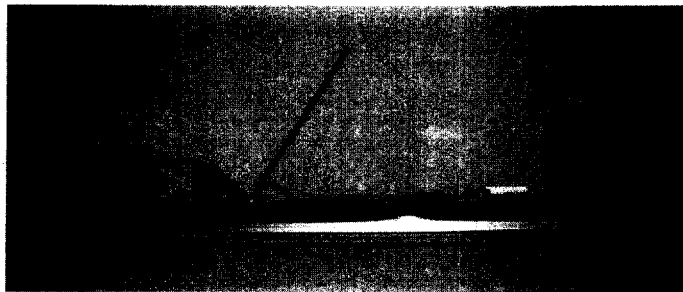
그림 11 에서는 초기 조건이 $\theta(t) = 1.35[\text{rad}]$, $\dot{\theta}(t) = 0[\frac{\text{rad}}{\text{sec}}]$, $z(t) = 0[\text{m}]$, $\dot{z}(t) = 0[\frac{\text{m}}{\text{sec}}]$ 인 경우 궤환 이득의 계수 값을 이론 값의 약 1.2 배로 설정하고, 샘플링 시간 Δt 를 20[msec]에 설정하였을 때 도립 진자 시스템이 안정화되는 제어 과정을 나타내고 있다.



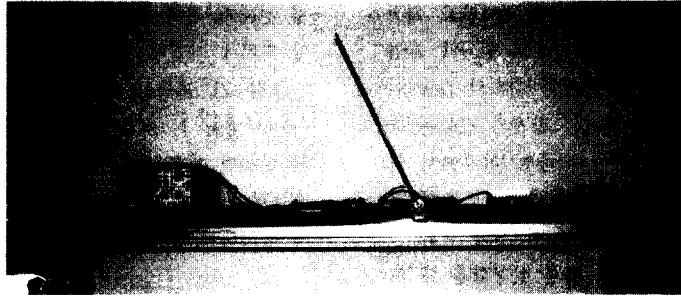
(a)



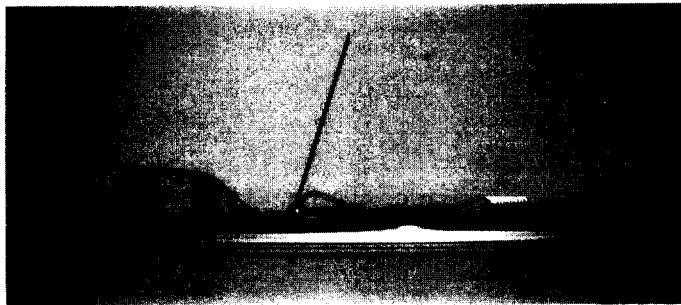
(b)



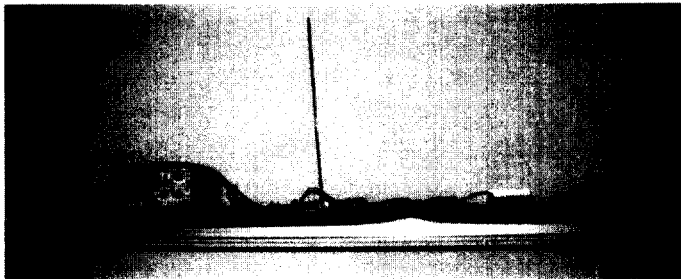
(c)



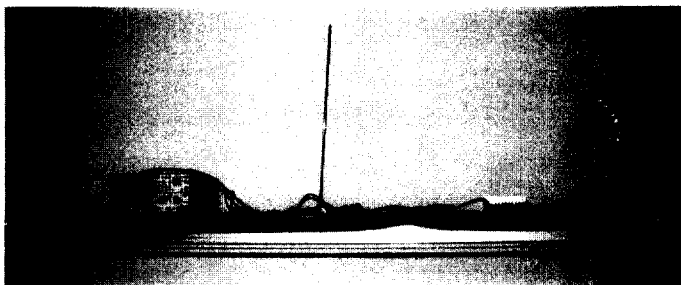
(d)



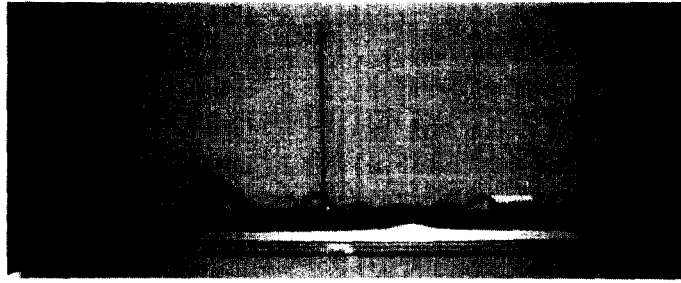
(e)



(f)



(g)



(h)

그림 11. 실험 결과
Fig. 11. Experiment result

VI. 결 론

본 논문에서는 도립 진자 시스템의 안정 영역과 제어 유효 범위를 확대하기 위하여 차 계인 도립 진자 시스템을 평형점 주위의 선형화 시스템과 그 이외의 비선형 부분으로 나누어서 비선형 부분에 대하여서 부분적인 보상을 하므로써 상태 공간 선형화 법으로 얻을 수 있는 근사한 제어 규칙을 설계하는 방법을 제안하였고, 이를 도립 진자 시스템의 안정화 제어에 적용한 연구 결과로서 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

- ① 근사 선형화를 사용하지 않고 모델링하였으므로 실제 시스템 과의 모델링 오차를 최소화 할 수 있었다.
- ② 제안된 비선형 제어기는 평형점 주위 즉, $-1[rad] \sim 1[rad]$ 의 범위에서는 선형 제어기와 유사한 동작을 하고, 평형점에서 멀리 떨어져도 비선형 보상 효과가 충분히 발휘되었다.
- ③ 선형 제어기의 경우 비선형 효과가 크게 되기 시작하는 $1[rad]$ 에서 한계가 생기는데 비하여 제안된 비선형 제어기에서는 $1.5[rad]$ 까지 안정 영역이 확대되었다.
- ④ 실험 결과 샘플링 시간은 $0.1[sec]$ 보다 적게 설정하였을 때 양호한 결과가 나타났으며, 최종적으로 샘플링 시간을 $20[msec]$ 에 설정 하였다.

한편, 시스템 파라미터의 불확실성과 기타 잡음에 기인한 다수의 편차가 고찰 되었지만 본 논문의 근사적인 방법은 상태 공간 선형화법을 적용할 수 없는 3차 이상의 비선형 시스템이라도 그것이 선형 시스템과 2차의 비선형 시스템이 중속으로 접속된 경우 유효하게 제어될

것으로 사료된다.

참고문헌

1. R. H. Cannon, "Dynamics of physical system", McGraw-hill, N.Y., 1967.
2. Shozo Mori, Hiroyoshi Nishihara and Katsuhisa Furuta, "Control of unstable mechanical system control of pendulum", Int. J. Control, Vol. 23, No. 5, pp.673-692, 1976.
3. K. Furuta and T. Okutani and H. Some, "Computer control of double inverted pendulum", Computer and Elect. Eng., Vol. 5, pp.67-84, Nov. 1978.
4. Katsuhisa Furuta, Hiroyuki Kajiwara and Kazuhiro Kosuge, "digital control of a double inverted pendulum on an inclined rail", Int. J. Control, Vol. 32, No. 5, pp.907 - 924, 1980.
5. K. Furuta & T. Ochiai and N. One, "Attitude control of a triple inverted pendulum", Int. J. Control, Vol. 39, No. 6, pp.1351-1365, 1984.
6. Qing Feng and Kazuo Yamafuki, "Design and simulation of control systems of an inverted pendulum", Robotica, Vol. 6, pp.235-241, Mar. 1987.
7. Qing Feng & kazuo Yamafugi, "Design an simulation of control system of an inverted pendulum", 1-5-1 Chofugdo Tokyo 182, Japan,

- pp.235-241, 1987.
8. Masahito Kobayashi and Katsutoshi Tamura, "Nonlinear control of a class of single input double outputs mechanical system and its application to an inverted pendulum with a moving weight", SICE, Vol. 26, No. 12, pp.1384-1391, 1990.
 9. Nazareth S. Bedrossian, "Approximate feedback linearization the cart - pole example", IEEE Proceedings, International Conference on Robot and Automation, pp1987-1992, 1992.
 10. 高木康夫, "非線形 시스템의 모테링크와 제어기 설계 이론", 시스템 제어 정보學會誌, Vol. 37, No. 1, pp.23-29, 1993.
 11. Jean-Jacques, E. Slotine and J. Karl Hedrick, "Robust input-output feedback linearization", Int. J. Control, Vol. 57, No. 5, pp.1133-1139, 1993.
 12. M. Fliess, "Nonlinear control theory and differential algebra, modelling and adaptive control", Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer, 105, pp.134-145, 1988.
 13. P. V. Kokotovic, "Recent trends in feedback design", Automatica, Vol. 21, No. 3, pp.225-236, 1986.
 14. C. Kravaris and C. B. Chung, "Nonlinear state feedback synthesis by global input-output linearization", AICHEJ., Vol. 33, pp.592-597, 1987.
 15. Yuh Yamashita, and Masasuke Shima, "Input-output linearization of general nonlinear systems", SICE, Vol. 26, No. 9, pp.1009-1014, 1990.
 16. 三平滿司, "嚴密な線形化とそのけん引車輛の軌道制御への應用", 計測と制御, Vol. 31, No. 8, pp.851-858, 1992.
 17. Yasuo Takagi & Toshiaki Sogabe, "A design of power system stabilizer applying state space linearization", SICE, Vol. 29, No. 2, pp.194-200, 1993.
 18. Yasushi Yoneda and Yasuaki Kuroe, "Design of a new controller for Induction motor based on exact linearization", Proceedings of the 35th Annual Conference of the Institute of system, Control and Information Engineers ISCIE, 91-5, pp.169-170, 1991.
 19. J. Hausen, S. Sastry and P. Kokotovic, "Nonlinear control via approximate input-output linearization: The ball and beam example", IEEE Trans. Automatic Control, Vol. 37, No. 5, pp.392-398, 1992.
 20. Krener, A. J. Karaham, S. Hubbard, M. and Frezza, R., "Higher order linear approximations to nonlinear control", Los Angeles CA, pp.519-523, December, 1987.



安基亨(Ki Hyung An) 정회원

1960년 8월 5일생

1982년 2월 : 동아대학교 전자공학과 졸업(공학사)

1987년 2월 : 동아대학교 대학원 전자공학과 졸업(공학석사)

1994년 8월 : 동아대학교 대학원 전자공학과 졸업(공학박사)

1990년 3월~현재 : 부산 전문대학 전자통신과 조교수

崔富貴(Boo Kwi Choi)

정회원

한국통신학회 논문지 제17권 제4호 참조