

# 주기적 외력을 인가한 Bonhoeffer - van der Pol 오실레이터 모델에서의 분기 현상과 카오스 현상 해석에 관한 연구

正會員 裴英哲\*, 任化永\*\*

The study of Bifurcations and Chaotic behaviour for Bonhoeffer-van der Pol oscillation model with periodic external force

Yeong Chul Bae\*, Wha Yeong Yim\*\* Regular Members

## 要 約

Bonhoeffer-van der pol(BVP)모델에서 주기적 자극전류  $A_1 \cos \omega t$ 를 인가하였을 때 주기운동과 카오스 운동을 조사하였다. BVP 모델에서 각 계수의 값을  $a=0.7$ ,  $b=0.8$ ,  $c=0.1$ 로 정하고 주기적 자극전류의 진폭  $A_1$ 을 0에서 1.8까지 변화하였을 때  $A_1$ 값의 크기가 작을 때에는 주기운동이 나타나고  $A_1$ 값이 0.7182보다 크면 주기 배증과정을 거쳐 카오스 운동이 일어나며 1.302보다 크면 다시 주기 운동이 일어나 역 주기배증과정이 나타남을 확인하였으며  $\omega$ 값의 변화에 의한 주기 운동과 카오스 운동도 관찰하였다.

BVP 모델에 대한 카오스 현상을 위상공간, 포앵카레 맵, 시계열 데이터, 분기도 및 리아프노프 지수, Fractal dimension을 사용하여 확인하였다.

## ABSTRACT

The effect of a periodic and a chaotic behaviour in the Bonhoeffer-van der pol(BVP) oscillation of the nerve membrane driven by a periodic stimulating current  $A_1 \cos \omega t$  are investigated numerically.

As the parameter  $A_1$  is varied in the range from 0 to 1.8, the BVP model shows up an ordinary and reversed period-doubling cascade and a chaotic state. At the low driving amplitude,  $A_1$ , the period-doubling and the chaotic state occur. Especially as  $A_1$  is large than 0.7182, a chaotic behaviour in the BVP is proved and as  $A_1$  is large than 1.302, a reverse period-doubling is proved.

To analyse the BVP model for chaotic behaviour Phase plane, Poincare map, Time series, Bifurcation diagram, Lyapunov exponent and Fractal dimension are used to verify that properties.

\* 광운대 전기공학과

\*\* 광운대 제어계측공학과, 광운대 신기술 연구소

論文番號 : 95008-0106

接受日字 : 1995年 1月 6日

## I. 서론.

최근에 카오스 현상에 대한 관심이 물리학, 화학, 생물학 등에서 높아지고 있으며 이에 대한 응용이 활발하게 진행되고 있다<sup>(1,2)</sup>. 많은 생물학적 리듬과정들은 리미트 사이클 거동을 보여주는 비선형 미분방정식으로 표현되는 발진 시스템과 밀접한 관계를 갖고 있으며 이 발진들은 안정한 범위에서 제어 파라미터 값의 변화에 대응하여 보다 안정화 할 수 있다. 외부에서 주기적인 힘을 인가할 때 비선형 시스템은 주기 배증과정을 거쳐 카오스 현상으로 천이된다<sup>(3,4)</sup>.

비선형 시스템에서 주기적으로 가한 힘에 대한 연구는 이론적으로나 실험적으로 관심의 대상이 되어 왔다. 이같은 시스템을 대표한 예는 Van der pol 오실레이터로서 이는 물리학, 전자공학, 생물학, 신경학 등 비선형 동역학에서 자기 여기 발진(Self-excited oscillation)의 기본적인 모델로 광범위하게 사용되어 왔으며 생물학적인 리듬도 Van der pol 오실레이션과 밀접한 관계를 갖고 있다.

2개의 변수를 가진 신경막과 신경 세포막이 여기되었을 때 전기적 임펄스와 전압 펄스를 다음과 같은 2개의 방정식으로 나타낼 수 있으며 이를 Bonhoeffer-Van der Pol(BVP) 모델이라 부른다<sup>(5,6)</sup>.

$$\dot{x} = x - x^3 / 3 - y + I(t) \quad (1)$$

$$\dot{y} = c(x + a - by) \quad (2)$$

여기서  $x$ 는 막전위,  $y$ 는 자극으로 부터 막의 회복을 나타내는 시정수에 관련된 변수,  $I(t)$ 는 외부에서 가한 주기적 자극전류,  $a$ 는 막의 반경,  $b$ 는 막의 내부에 흐르는 비저항(저항률),  $c$ 는 온도요소를 나타낸다.

BVP모델에 대한 연구로서 Kawato와 Suzuki<sup>(6)</sup>, Okuda<sup>(5)</sup>는 주기적 자극전류가 없는 상태( $\dot{I}=0$ )에서 In-phase와 Anti-phase해의 안정도, Threshold와 Shaping의 활동, 잡음의 영향에 대한 문헌은 있으나 주기적 자극전류를 인가한 연구는 아직 없었다.

본 논문에서는 BVP 모델에서 주기적 자극전류  $I(t)=A_1 \cos \omega t$ 를 인가하였을 때 주기 배증과정을 거쳐 카오스 현상으로 천이되는 과정을 위상 공간 및 Poincare Map, 시계열 데이터, 분기도(Bifurcation Diagram)로 해석하고 이에 대한 타당성을 Lyapunov

exponent 및 Fractal dimension으로 증명 하였다.

## II. BVP모델에서의 주기 배증과정과 카오스 현상 해석

식(1)과 식(2)에서 주기적 자극전류  $I(t) = A_1 \cos \omega t$ 를 인가하면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\dot{x} = x - x^3 / 3 - y + A_1 \cos \omega t \quad (1a)$$

$$\dot{y} = c(x + a - by) \quad (2a)$$

식(1a)과 식(2a)에서  $a, b, c$ 는 다음과 같은 조건을 만족하여야 한다.<sup>(5,6)</sup>

$$b < 1 \quad (3)$$

$$3a + 2b \geq 3 \quad (4)$$

식(1a)과 식(2a)에서  $I(t) = 0$ , 즉 자극전류를 인가하지 않고 식(3)과 식(4)를 만족하는 상수  $a = 0.7$ ,  $b = 0.8$ ,  $c = 0.1$ 의 값으로 정하였을 때 식(1)과 식(2)의 BVP모델은 주기 운동을 나타내는 안정상태에 있음을 그림1에 나타난 것과 같이 위상 공간과 시계열 데이터에서 확인할 수 있다.

1. 주기적 자극전류  $A_1$  값의 변화에 의한 위상 공간, 포엔카레 맵, 시계열 데이터에 의한 주기 운동과 카오스 운동 해석

그림1과 같이 주기적 자극전류가 없는 휴식상태를 나타내는 안정한 상태에서 카오스 신호를 생성하기 위하여 주기적 자극전류  $I(t) = A_1 \cos \omega t$  ( $\omega = 1.0$ )을  $A_1 > 0$ 의 조건이 되는  $A_1$ 의 크기를 변화하였을 때 위상 공간, 포엔카레 맵, 시계열 데이터를 조사하였다.

$$(1) 0 < A_1 < 0.6070 \text{ 일 때}$$

그림2에서 보는바와 같이  $0 < A_1 < 0.6070$  범위에서는 주기적 자극 전류를 인가하지 않은 상태인 그림1과 비슷한 결과를 얻었으며 1주기 운동을 하고 있다.

$$(2) 0.6070 < A_1 < 0.7182 \text{ 일 때}$$

$0.6070 < A_1 < 0.7182$  범위에서는 그림3에서 보는바와 같이 2주기 운동이 이루어짐을 확인할 수 있으며  $A_1$ 의 값이 커질수록 4주기, 8주기 등의 주기배증 과정이 이루어진다.

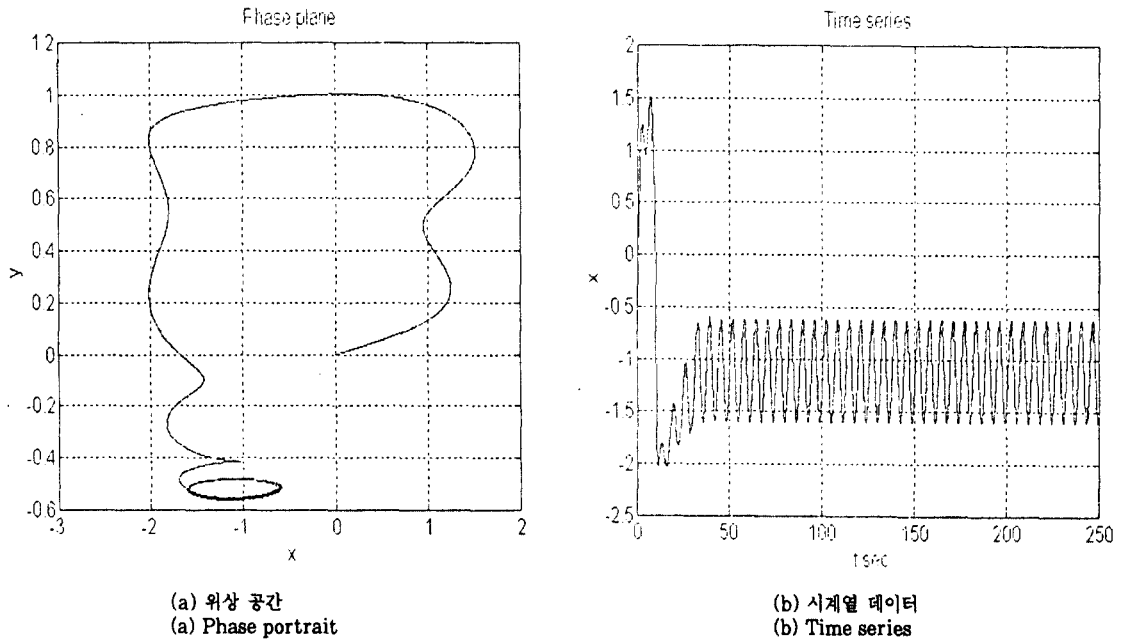


그림 1. BVP 모델에서 주기적 자극 전류를 가하지 않았을 때의 위상공간과 시계열 데이터  
Fig. 1. Phase plane and time series without periodic stimulating current  $I(t)$  on BVP model.

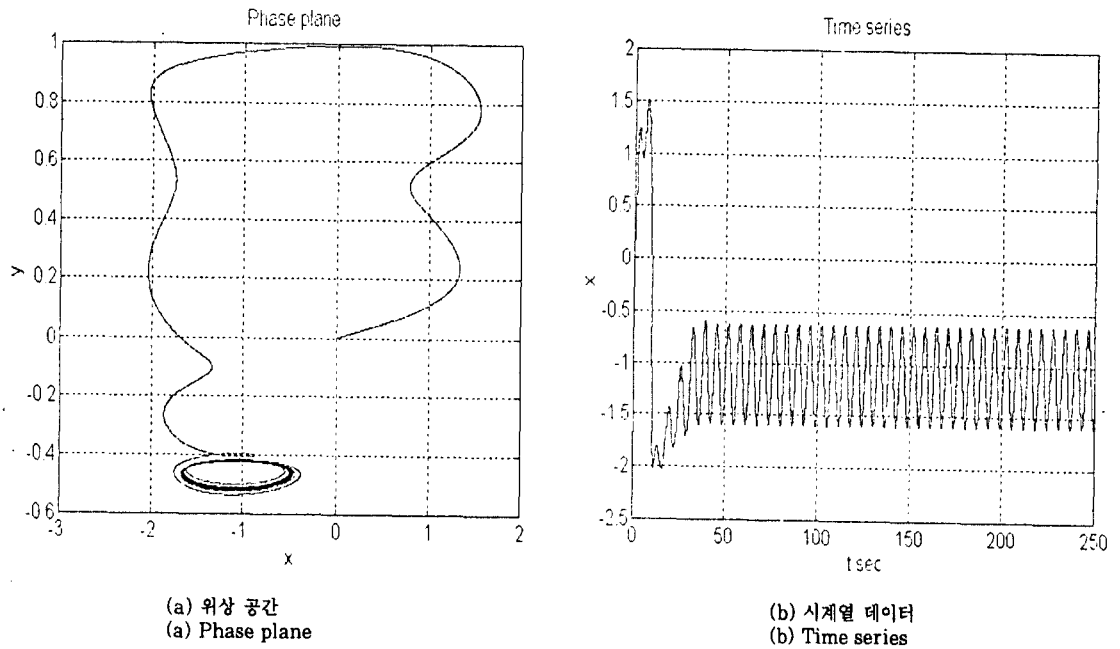


그림 2.  $A_1 = 0.6070$  일 때 위상공간과 시계열 데이터  
Fig. 2. Phase plane and time series when  $A_1 = 0.6070$

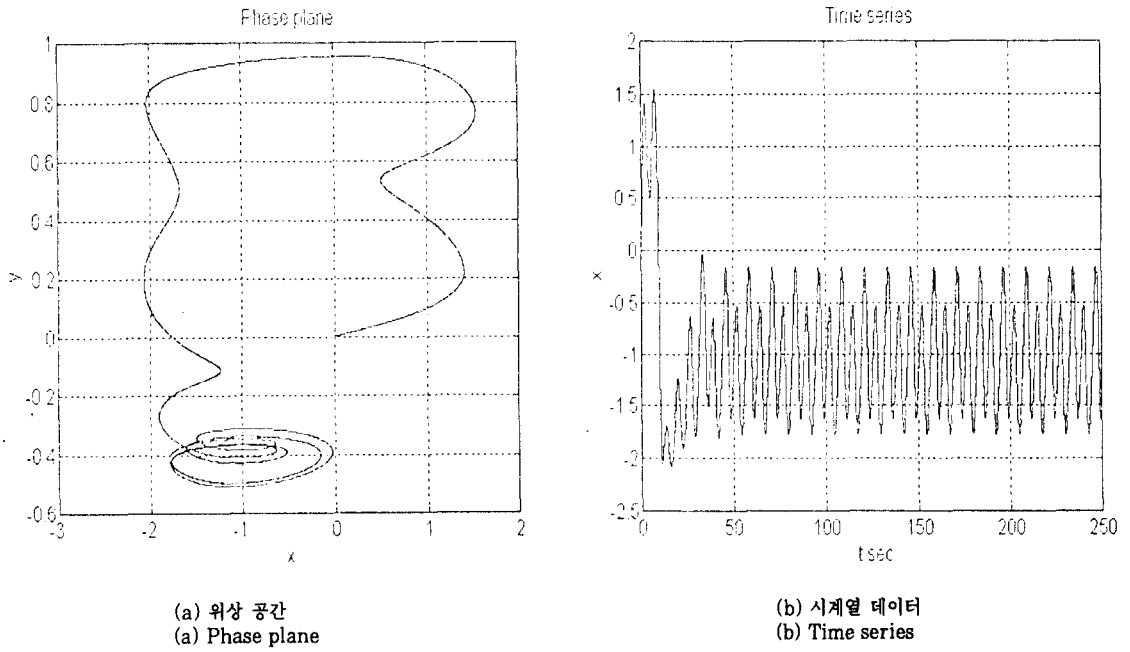
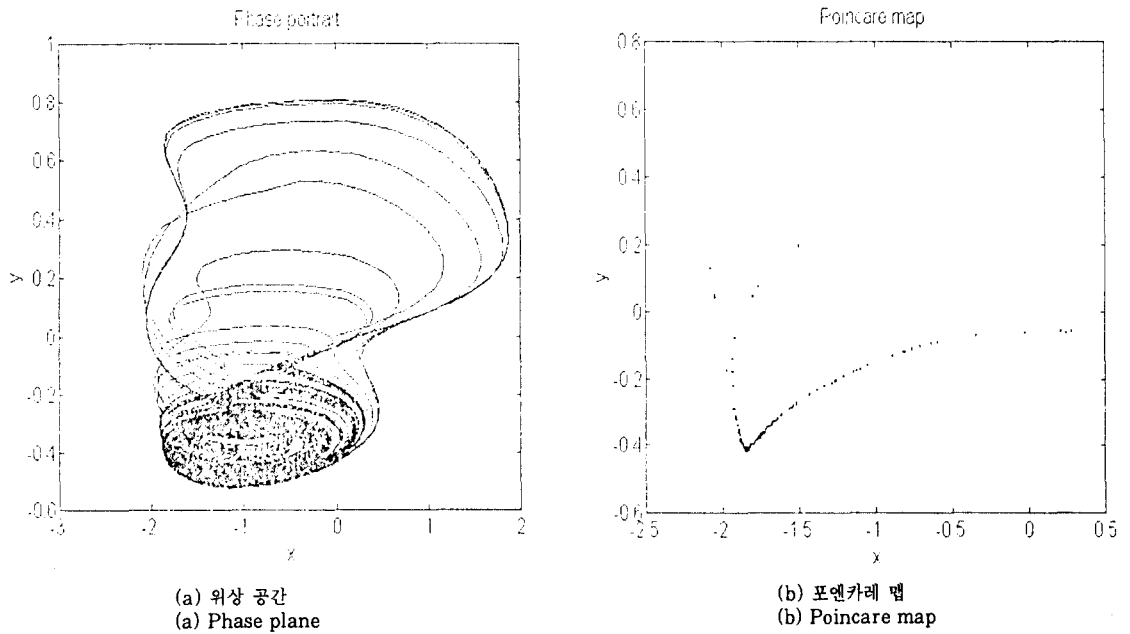


그림 3.  $A_1 = 0.7181$  일 때 위상공간과 시계열 데이터  
Fig. 3. Phase plane and time series when  $A_1 = 0.7181$



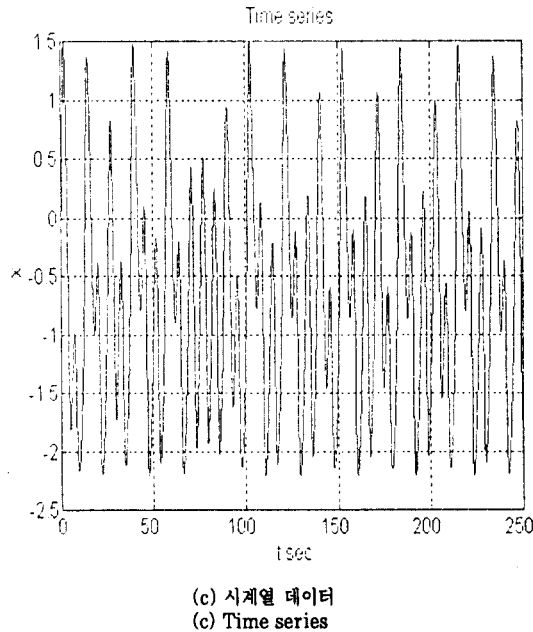


그림 4.  $A_1 = 0.76$  일 때 위상공간 및 포앵카레 맵과 시계열 데이터  
Fig. 4. Phase plane, poincare map and time series when  $A_1 = 0.76$

(3)  $0.7182 < A_1 < 0.792$  및  $1.09 < A_1 < 1.302$  일 때

$0.7182 < A_1 < 0.792$  및  $1.09 < A_1 < 1.302$  범위에서는 그림4에서 보는바와 같이 카오스 운동이 이루어짐을 확인할 수 있다. 그림4는  $A_1$ 이 0.76, 그림 5는  $A_1$ 이 1.28 일 때의 위상공간, 포앵카레 맵, 시계열 데이터에 대한 카오스 현상을 각각 나타내었다. 그림4(b)와 5(b)는 포앵카레 맵으로서 위상공간의 단면을 통하여 얻어지며 1주기 일 경우 1점, 2주기 일 경우 2점, 4주기 일 경우 4점으로 나타나며 카오스 운동일 경우에 그림4(b), 5(b)와 같이 여러점에 분포되어 나타난다.

(4)  $A_1 > 1.302$  일 때

진폭  $A_1$ 값을 1.302보다 큰 값으로 변화하면 카오스 운동에서 주기운동으로 바뀐다. BVP모델은  $A_1$ 값에 따라 주기운동에서 카오스 운동으로 카오스 운동에서 주기운동으로의 역현상이 일어남을 알 수 있다.

2. 주기적 자극 전류 값의 변화에 의한 주기 운동과 카오스 운동 해석

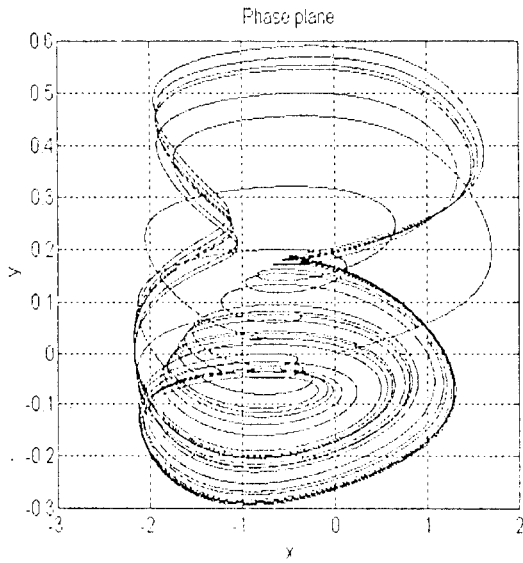
식 (1a), (2a)에서 주기적 자극 전류  $I(t) = A_1 \omega \cos t$ 에서  $A_1$ 값을 0.6070, 0.7181, 0.76, 1.28 값으로 고정하고 값을 변화하였을 경우 주기 운동과 카오스 운동을 조사하였으며 카오스 운동이 일어나는 값의 범위를 표1에 나타내었다.

표 1.  $\omega$ 값의 변화에 의한 카오스 운동 영역  
Table 1. Chaotic motion region by variation of  $\omega$

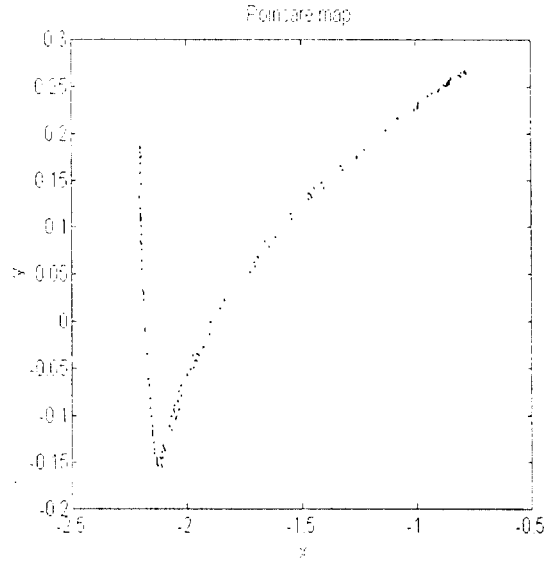
$A_1$	$\omega$
0.6070	0.91 - 0.93
0.7181	0.96 - 0.97
0.76	0.98 - 1.02
1.28	0.99 - 1.01

3. 분기도(Bifurcation)에 의한 주기배증 과정과 카오스 운동 해석

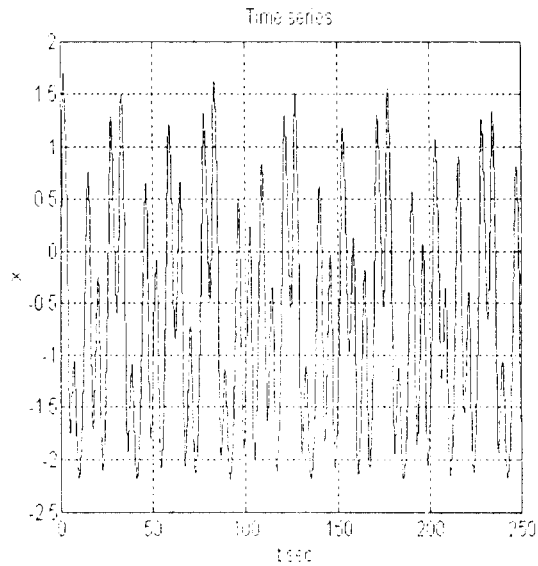
식 (1a), (2a)  $A_1$  값의 변화에 의해 주기운동과 카오스 운동을 분기도를 통해 확인해 보았다.



(a) 위상 공간  
(a) Phase plane



(b) 포엔카레 맵  
(b) Poincare map



(c) 시계열 데이터  
(c) Time series

그림 5.  $A_1 = 1.28$  일 때 위상공간 및 포엔카레 맵과 시계열 데이터  
Fig. 5. Phase plane, poincare map and time series when  $A_1 = 1.28$

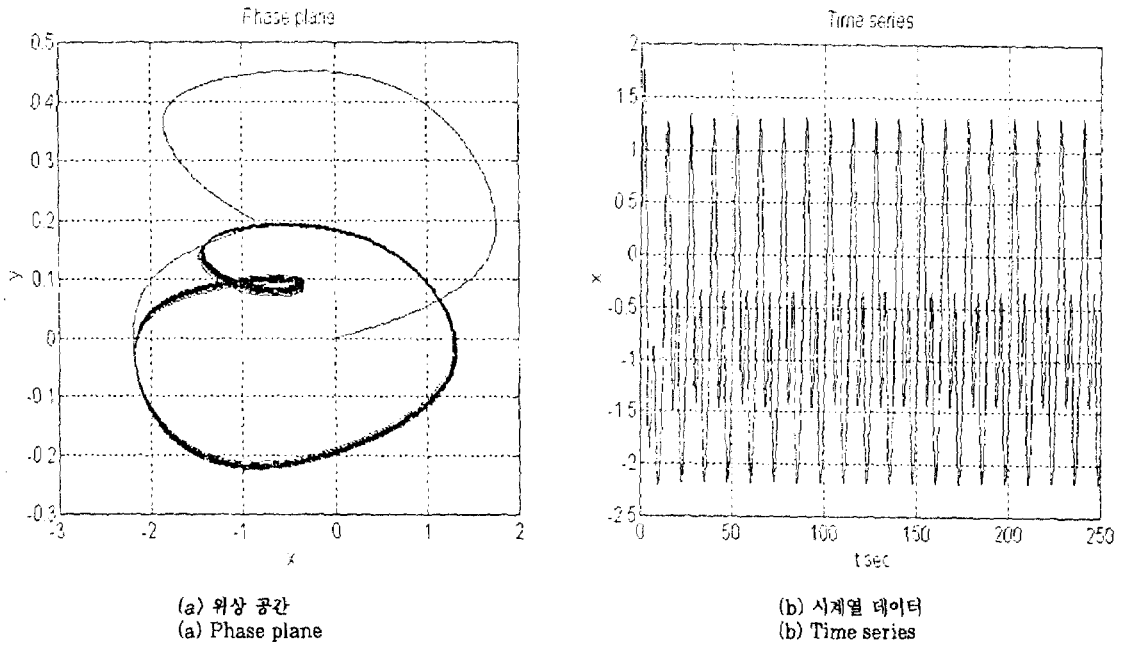


그림 6.  $A_1 = 1.62$  일 때 위상공간과 시계열 데이터  
Fig. 6. Phase plane and time series when  $A_1 = 1.62$

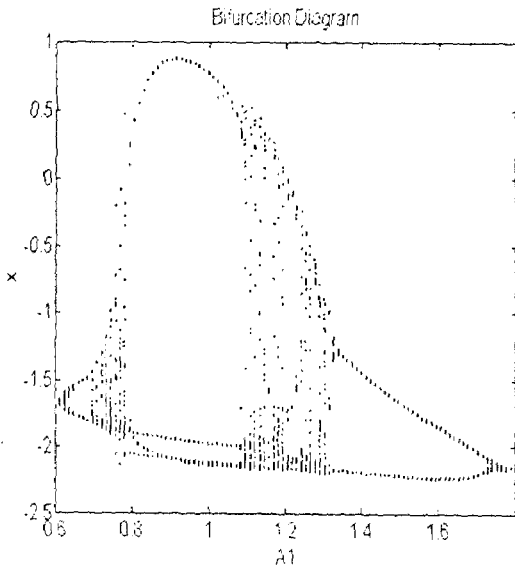


그림 7. 분기도 ( $0.6 < A_1 < 1.8$ )  
Fig. 7. Bifurcation diagram. ( $0.6 < A_1 < 1.8$ )

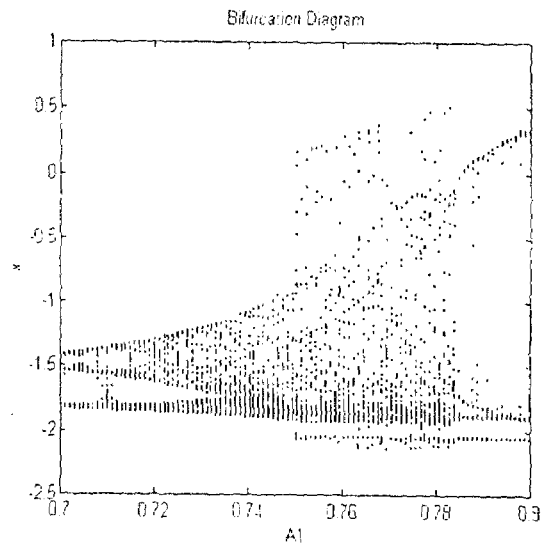


그림 8. 분기도 ( $0.7 < A_1 < 0.8$ )  
Fig. 8. Bifurcation diagram. ( $0.7 < A_1 < 0.8$ )

$A_1$ 값을 0부터 1.8까지 변화 하였을 때 분기도를 그림7에 나타내었다.

그림 7에서  $A_1$ 이 0.6070일 때 2주기의 분기가 발생하고 0.7182일 때 주기 배증이 계속되며 Band Merging 점들이 모여 있음을 알 수 있고 0.7181 이후에 카오스 현상이 일어남을 확인할 수 있다. 또한  $q \times 2^n$  ( $q$ 는 정수,  $n$ 은 주기  $q$ 의 기본적 주기 궤도의 주기적 배증의 차수를 나타낸다)의 주기를 가진 고차주기인 경우 윈도우(분기도에서 하얀 부분)들이 나타나며 이 사실로 부터 카오스 현상이라는 것이 분명해진다.

그림 7에 나타난 분기도를 보다 자세하게 관찰하기 위하여 진폭 파라미터  $A_1$ 을 0.7 에서 0.8 범위에 대한 분기도를 그림8에 1.09에서 1.302에 대한 분기도를 그림9에 나타내었다.

그림 7, 8, 9로 부터 카오스 현상중 주기적 특성을 나타내는 윈도우 뿐 만 아니라  $A_1$ 이 1.302 보다 작으면 정상 분기를  $A_1$ 이 1.302 보다 크면 역 주기 배증 과정이 나타나고 1.7059 이상일 때 1주기 상태로 다시 돌아옴을 알 수 있으며 위상공간이나 시계열 데이터에 의한 결과와 일치하고 있음을 알 수 있다.

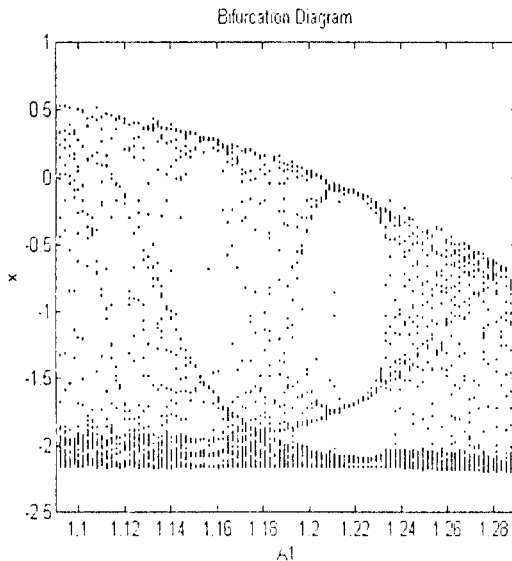


그림 9. 분기도(1.09 <  $A_1$  < 1.302)  
Fig. 9. Bifurcation diagram(1.09 <  $A_1$  < 1.302)

4. Lyapunov exponent에 의한 카오스 운동 해석  
카오스 현상은 초기 조건에 매우 민감하여 불확실성이 증대 된다는 특성을 이용한 방법이 Lyapunov exponent로 이는 위상 공간에서 매우 근접한 차이가 나는 두 초기 조건에 대한 궤적을 그리고 나서, 각각 시간이 흐름에 따라 두 궤적이 얼마나 멀어지는가에 대한 정도를 가지고 시스템이 카오스인지 아닌지를 판별하는 방법이다. 즉 두 초기 조건에 대한 거리가  $d_0$ 라면 시간  $t$ 인 점에서의 거리는 다음 식(5)와 같다.

$$d(t) = d_0 e^{\lambda t} \tag{5}$$

식(5)를 Log를 이용하여 Lyapunov exponent인  $\lambda$ 에 관한 식으로 바꾸어 쓰면 다음 식(6)과 같다.

$$\lambda = \frac{1}{t_N - t_0} \sum_{k=1}^N \log_e \frac{d(t_k)}{d(t_{k-1})} \tag{6}$$

여기에서  $d(t_{k-1})$ 는 기준 궤적과 매우 가까운 초기 조건으로부터 시작한 시간  $t=t_{k-1}$ 에서의 거리이며,  $d(t_k)$ 는 시간  $t=t_k$ 에서의 거리이다. Lyapunov exponent  $\lambda$ 가 0보다 크면 카오스 신호이고, Lyapunov exponent  $\lambda$ 가 0보다 작거나 같으면 주기적인 진동을 하는

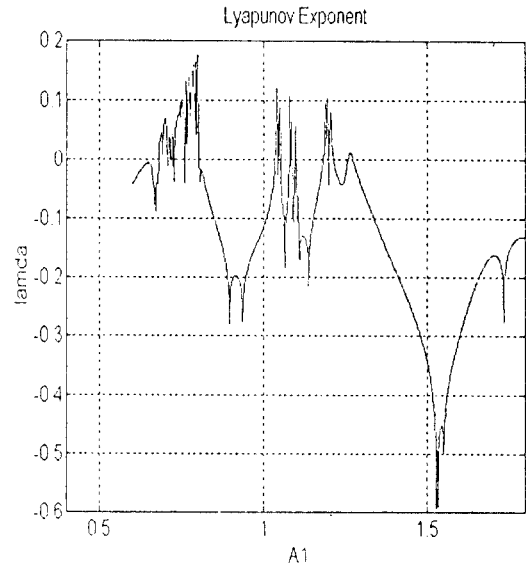


그림 10. 리아프노프 지수(0.6 <  $A_1$  < 1.8)  
Fig. 10. Lyapunov exponent. (0.6 <  $A_1$  < 1.8)



신호가 된다. 반복 계산 횟수  $N$ 은 일반적으로 2000 ~ 20000 정도가 되므로 따라서 상당히 많은 계산량 때문에 컴퓨터를 이용한 수치해석이 불가피하다. 본 논문에서는 Lyapunov exponent의 계산 알고리즘으로 wolff[7]을 이용하였다.

그림 7, 8, 9에 대한 Lyapunov exponent를 그림 10, 11, 12에 각각 나타내었다.

BVP에 대한 Lyapunov exponent에 의한 계산에서도 0.7181 이후에 Lyapunov exponent가 0보다 큰 값을 가져 카오스 현상이 일어나고 있음을 확인하였다.

5. Fractal dimension에 의한 카오스 운동 해석

Strange Attractor의 특성을 알아보는 방법중 하나가 fractal dimension (9)으로서 이는 정확도 내의 어트랙터를 표시하는데 필요한 정보의 양을 나타낸다.

Strange Attractor에 대해서 fractal dimension은 정수가 아닌 실수의 값을 가지므로 계산결과가 정수인지 아닌지의 판정으로 주기 운동인지 카오스 운동인지를 판정한다.

Fractal dimension의 정의는 (9)에 의해 제시된 상

관함수  $c(r)$ 을 사용하여 구한다.

시간  $t_i$ 에서 위상 궤적상의 벡터  $p_i$ 는 식 (7)과 같다.

$$p_i = \{ x(t_i), y(t_i) \} \tag{7}$$

$N$  샘플의 집합에 대하여 각  $p_i$ 의 중심에서 반경  $r$  내의 궤적점의 수를 계산한다.

상관함수는 식 (8)과 같이 정의되며

$$c(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{N^2} \right) \sum_{i, j=1}^N H(r - |p_i - p_j|) \tag{8}$$

여기서  $H$ 는 Heaviside function으로

$$H(\theta) = 1 \quad (\theta > 0)$$

$$H(\theta) = 0 \quad (\theta < 0) \text{ 이다.}$$

Fractal dimension은 식(9)와 같이 계산된다.

$$D = \lim_{r \rightarrow 0} \log(c(r)/\log(r)) \tag{9}$$

식(8)과 (9)를 사용하여  $A_1$ 값을 0.74에서 0.8까지 변화에 의한 fractal dimension을 표2에 나타내었다.

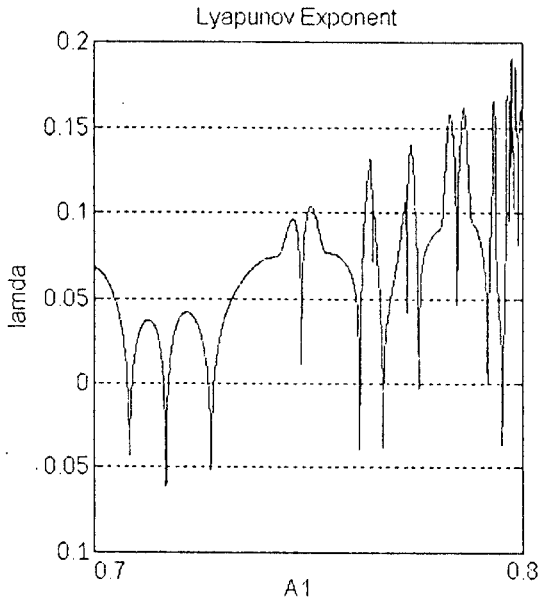


그림 11. 리아프노프 지수 (0.7 < A1 < 0.8)  
Fig. 11. Lyapunov exponent. (0.7 < A1 < 0.8)

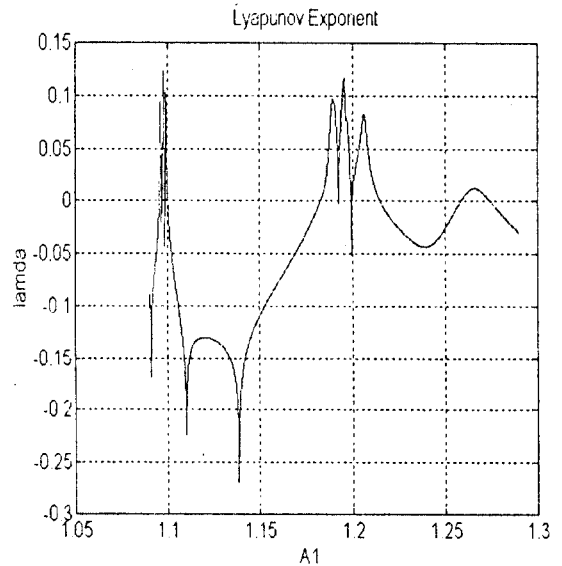


그림 12. 리아프노프 지수 (1.09 < A1 < 1.302)  
Fig. 12. Lyapunov exponent. (1.09 < A1 < 1.302)

표 2.  $A_1$ 값의 변화에 의한 Fractal dimension  
Table 2. Fractal dimension by variation of  $A_1$

$A_1$	Fractal dimension
0.74	1.156
0.75	1.168
0.76	1.199
0.78	1.262
0.79	1.288

### Ⅲ. 결 론

BVP모델에서 각 계수의 값을  $a=0.7$ ,  $b=0.8$ ,  $c=0.1$ 로 정하고 외부에서 주기적 자극전류를 인가하여 진폭  $A_1$ 값과 주파수  $\omega$ 값의 신호크기를 변화하였을 때 주기운동과 카오스 운동이 있음을 시뮬레이션을 통하여 증명하였다. 주기적 자극전류의 진폭  $A_1$ 값이 0.6070 이하와 1.302 이상에서는 1주기 또는 2주기의 주기운동이 나타나고 있으며 0.7182 에서 0.792 사이 및 1.09에서 1.302 사이에서 카오스 현상이 일어남을 위상 공간, 시계열 데이터, 분기도, 포엔카레 맵을 통하여 증명하였고 이에 대한 타당성을 Lyapunov exponent 지수 및 Fractal dimension을 통하여 입증하였다. BVP 모델에 대한 제어 방법이 차후 과제로 남는다.

### 참고문헌

1. 배영철, "카오스의 공학적 응용", 혼계계측제어연구회

학술강좌, 1993.

2. J.P. Gollub, T.O.Brunner, and B.G.Danly, "periodicity and Chaos in Coupled Nonlinear Oscillators" science, 200, pp.48-50, 1978.
3. A.V.Holden, ed. ,chaos, Manchester univ. press, 1986.
4. N.Minoskey, Nonlinear Oscillation , Van Nostrand, 1962.
5. M.Okuda, "A New Method of Nonlinear Analysis for threshold and shaping Actions in Transient states" progr. Theor. phys. Vol. 66, pp.90-100, 1981.
6. M.Kawatu. and R Suzuki, "Two Coupled Neural Oscillators and a Model of the Circadium pacemaker" Vol. 86, pp.574-575, 1980.
7. A wolf J.B swift , H.L swinney and J.A. Vastano, physica D, "Determining Lyapunov exponent from a time series" Physica D Vol. 16, pp.285-317, 1985
8. J. Guckenheimer and P. Holmes, Nonlinear Oscillations, Dynamical systems, and Bifurcations of Vector Field., springer - Verlag, 1983.
9. P. Grassberger and I. Procaccia, "Charcaterization of strange Attractors" phys.Rev.Lett. Vol. 50, No. 5, pp.346-349, 1983.



裴英哲(Yeong Chul Bae) 정희원

1962년 5월 15일생  
1984년 2월 : 광운대 전기공학과 졸업(공학사)  
1986년 2월 : 광운대 대학원 전기공학과 졸업(공학석사)  
1992년 2월~현재 : 광운대 대학원 전기공학과 박사과정

\*주관심 분야 : Chaos Control, Chaos Synchronization, Nonlinear Dynamics

任化永(Wha Yeong Yim) 정희원

현재 : 광운대학교 제어계측과 교수  
광운대 신기술 연구소 연구원