

범함수 정의역 분할에 바탕을 둔 비선형 계층적 움직임 추정기법

正會員 沈 東 圭*, 朴 來 弘*,

Nonlinear Hierarchical Motion Estimation Method Based on Decomposition of the Functional Domain

Dong-Gyu Sim*, Rae-Hong Park* *Regular Members*

要 約

본 논문에선 비선형 계층적 움직임 추정기법을 제안하였다. 일반적으로 기존의 계층적 움직임 추정법들은 빠른 수렴과 큰 움직임 추정을 위하여 연구되어 왔다. 그러나 이러한 방법들은 공통적으로 움직임이 불연속인 곳으로부터 큰 오차가 인접영역에 전파된다. 이것은 각각의 계층내에서 움직임 추정방법의 연속성 가정과 계층간의 움직임 선형적 보간때문에 발생하는 것이다. 본 방법에선 각 계층내에서 불연속 움직임을 효과적으로 추정하기 위하여 범함수 정의역 분할에 바탕을 둔 움직임 추정을 제안하였다. 또한 기존의 계층간 움직임 선형 투영대신에 계층간 비선형 움직임식을 제안하였다. 여러가지 시험 동영상 전산 모의 실험을 통하여 제안한 방법이 기존의 방법들에 비하여 효율적임을 보였다.

Abstract

In this paper, we propose a nonlinear hierarchical motion estimation method. Generally, the conventional hierarchical motion estimation methods have been proposed for fast convergence and detection of large motions. But they have a common drawback that large error in motion estimation is propagated across motion discontinuities. This artifact is due to the constraint of motion continuity and the linear interpolation of motion vectors between hierarchical levels. In this paper, we propose an effective hierarchical motion estimation method that is robust to motion discontinuities. The proposed algorithm is based on the decomposition of the functional domain for optimizing the intra-level motion estimation functional. Also we propose an inter-level nonlinear motion estimation equation rather than using the conventional linear projection scheme of motion fields. Computer simulations with several test sequences show that the proposed algorithm performs better than several conventional methods.

*西江大學校 電子工學科
Dept. of Electronic Eng., Sogang Univ.
論文番號: 94186-0714
接受日字: 1994年 7月 14日

I. 서 론

동영상해석에 있어서 움직임 추정은 영상데이터 압축뿐만 아니라 영상해석, 영상구조 복원 등을 위한 중요한 과정이다.⁽¹⁻³⁾ 특히 영상해석 분야에서의 움직임 추정은 물체 추적 및 인식을 위하여 중요하며, 3차원 영상복원과 3차원상에서의 움직임 추정을 가능케 한다. 그러나 이러한 유용성에도 불구하고 2차원 움직임을 찾는 기존의 방법은 여러가지 문제점을 가지고 있다.

기존의 움직임 추정기법은 시공간 경사법, 영역에 기초한 방법, 그리고 특징점에 바탕을 둔 방법으로 구분될 수 있다. 영역상 기초한 방법⁽⁴⁾은 주로 영상데이터 감축의 측면에서 사용되어 왔으나, 실제의 움직임을 추정하는데는 적합하지 않은 것으로 알려져 있다. 또한 특징점에 바탕을 둔 방법⁽⁵⁾은 특징점의 특성에 따라 큰 성능의 차이를 보이며, 특징점이 적은 경우에는 보간이 필요한 단점을 가지고 있다. 반면, 시공간 경사법⁽⁶⁻¹³⁾은 영상의 모든 점에서 움직임을 구하므로 영상해석 및 구조복원 등에 적합하다.

그러나 시공간 경사법에 의한 움직임 추정기법들은 불연속 영역에서 모델에 맞지 않는 점과 평평한 (homogeneous) 영역에서 움직임이 결정되지 않는 등의 문제를 가지고 있다. 또한 움직임 추정은 기본적으로 영상 밝기값의 gradient 방향의 움직임만이 추정될 수 있다는 aperture problem이라는 점, 움직임에 의해서만 밝기값이 변해야 한다는 제한, 국부적 특성만을 이용한다는 점 등이 단점으로 지적될 수 있다. 또한 영상의 밝기값 기울기를 이용함에 따라 생기는 미분연산으로 잡음에 민감한 특성을 가지고 있다. 이러한 문제들 때문에 실제로 움직임을 모든 경우에 대하여 정확히 구하기란 매우 어려운 일이다.

본 논문에서는 불연속 움직임에 효과적인 계층적 움직임 추정 기법을 제안하였다. 기존의 계층적 움직임 추정기법들은 빠른 수렴과 큰 움직임에 적합하여 많은 연구가 되어왔다.^(7, 9, 11) 그러나 이러한 방법들은 움직임이 불연속일 경우 큰 오차를 나타낸다. 이것은 각각의 계층내에서의 움직임 추정방법의 연속성 가정과 계층간의 움직임 투영에서 발생하는 것이다. 본 논문에서는 각 계층내에서 불연속 움직임을 효과적으로 추정하기 위하여 범함수 정의역의 분할에 바탕

을 둔 움직임 추정을 제안하였으며, 계층간 움직임 투영을 위하여 계층간 비선형 움직임 식을 제안하였다.

본 논문의 II장에서 기존의 계층적 움직임 추정에 대하여 간단히 고찰하였으며, III장에서 범함수 정의역 분할에 바탕을 둔 계층내 움직임 추정식과 계층간 움직임 추정식을 제안하였고, IV장에서 실험결과를 보이고 이에 따른 분석을 하였으며, 마지막으로 V장에서 결론을 맺었다.

II. 계층적 움직임 추정 알고리즘의 기본 구조 및 기존의 방법

계층적 방법은 여러가지 장점을 가지고 있어 컴퓨터 비전 및 영상처리 분야뿐만 아니라 움직임 추정분야에서도 많이 연구되어 왔다.⁽⁷⁻¹²⁾ 계층적 방법은 여러가지 주파수로 구성된 영상을 주파수대를 달리하여 분리하는 과정과 분리된 각 단계에서 움직임을 추정하고 이것을 통합하는 과정으로 되어있다. 여기서 영상을 분리하는 과정으로 주로 평균 피라미드 형태나 Laplacian 피라미드가 주로 사용된다. 각 영역에서 움직임을 추정하는 과정은 각 계층에서의 주파수 특성을 알고 있으므로 이것을 이용하는 방법이 주로 사용된다. 이러한 정보의 통합과정은 주로 저해상도에서부터 고해상도로 정보를 통합하는 방법(coarse-to-fine)이 주로 사용된다. 기존의 계층적 움직임 추정기법은 그림 1에서 보듯이 연속된 두 영상을 필터링과 간축(decimation) 필터를 통하여 구성하며 구성된 계층 구조영상의 각 레벨에서 계층내 움직임을 한 후 선형 보간을 통하여 각 계층의 움직임 정보를 통합한다. 그림 1에서 *는 2차원 convolution 연산을 ↓ 2는 2:1 간축을 나타낸다.

초기의 계층적 방법은 영역에 바탕을 둔 계층적 블럭정합의 형태를 가지고 있다. 이러한 방법은 주로 계산량을 감소시킨다는 측면에서 연구되었는데 이에 는 multigrid 방법을 시공간 경사법에 적용한 것으로 Glazer의 방법⁽⁷⁾과 Terzopoulos의 방법⁽⁹⁾이 있다. 이 방법들은 Horn과 Schunck의 방법⁽⁶⁾을 multigrid 방법으로 확장한 구조를 가지고 있어 수렴속도가 빠른 것이 특징이다. 그러나 이 방법들은 움직임의 경계에서도 Horn과 Schunck의 움직임 연속성 가정을 사용하기 때문에 많은 오차를 발생시킨다. 이러한 전체적인

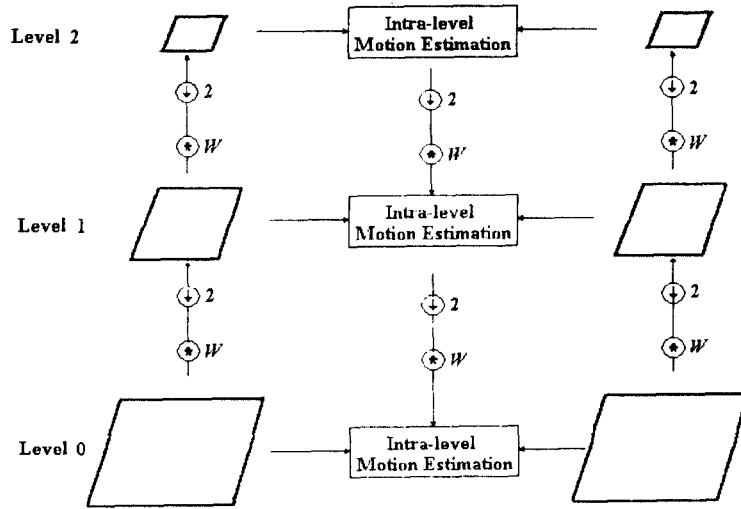


그림 1. 계층적 움직임 추정 알고리즘의 일반적 구조
 Fig 1. General framework of hierarchical motion estimation algorithms.

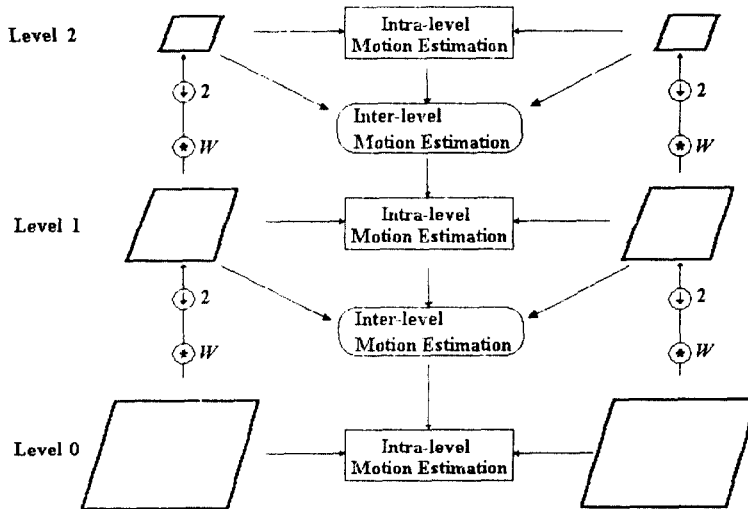


그림 2. 제안한 계층적 움직임 추정 알고리즘의 구조
 Fig 2. Framework of the proposed hierarchical motion estimation algorithm.

움직임 연속성 가정을 완화시킬 방법으로 Enkelmann의 방법⁽⁸⁾과 Hwang과 Lee의 방법⁽¹¹⁾이 있다. Enkelmann의 방법은 영상의 밝기값에 바탕을 둔 Nagel과 Enkelmann의 oriented smoothness 방법⁽¹⁴⁾을 계층적

방법으로 확장한 것이며, Hwaing과 Lee의 방법은 Glazer와 Terzopoulos의 multigrid relaxation 방법을 확장한 것이다. 이들 방법도 각 계층에서 움직임의 불연속 문제를 해결하려고 하였으나 Enkelmann의 방

법의 경우 영상의 밝기값만을 이용하는 연속성 제한으로 추정된 움직임이 실제의 움직임과 일치하지 않는 경우가 발생하며 많은 미분 연산으로 큰 오차가 발생한다. 또한 움직이는 물체의 경계에서 추정식이 불안정하여 발산하는 경우가 생기는 단점을 가지고 있다. 그리고 Hwang과 Lee의 방법은 계층간의 움직임 연속성을 사용하는 방법으로 저해상도에서 고해상도로 움직임의 선형 투영 결과를 이용하는 것이므로 움직임의 불연속과 관계없이 일정하게 움직임 연속성을 가정한다. 이러한 방법외에 Battiti 등의 방법⁽¹⁰⁾이 있는데 이것은 미분연산자의 오차와 양자화 오차를 분석하여 영상의 위치에 따라 적당한 해상도를 결정하여 움직임을 추정하는 방법이다. 그러나 움직임 추정오차에 있어서 미분연산자나 양자화에 의한 오차는 불연속 움직임을 갖는 위치에서 움직임 추정을 가정에 의한 오차에 비하여 작아, 불연속 움직임을 갖는 위치에서 움직임 추정오차 감소에 큰 기여를 하지는 못한다. 이러한 모든 방법은 각 해상도에서 움직임 추정을 하고 해상도간의 움직임 정보를 통합하기 위하여 선형 보간을 사용한다. 그러므로 움직임의 불연속이 존재하는 곳에서는 오차의 전파가 생기는 단점이 있다. 또한 불연속 움직임을 추정하기 위하여 각 해상도에서 다른 가중치를 가지고 움직임을 추정하는 방법도 계층간 선형 보간을 이용한 움직임 투영으로 인관성을 잃게 된다.

계층내에 불연속에 대처하기 위한 방법 등은 지금까지 많이 제안되어 왔으나 움직임이 커서 occlusion 영역이 커질 경우 국부 상호작용만을 이용하는 regularization이나 MRF(Markov Random Field)로는 움직임 불연속 문제를 해결하기 어려운 단점을 가지고 있다. 본 논문에서는 불연속 움직임 추정을 위한 범함수 영역 분할에 바탕을 비선형 계층적 움직임 추정기법을 제안하였다.

Ⅲ. 불연속 움직임 추정을 위한 제안한 계층내, 계층간 움직임 추정

그림 2는 제안한 계층적 방법의 흐름도를 나타내는데 제안한 방법은 피라미드 구성, 계층내 움직임 추정 그리고 계층간 움직임 추정으로 구성된다. 연속 영상의 피라미드 구조^(7, 11)는 근사화 Gaussian 필터와

2:1의 간축필터로 구성된다. 이렇게 형성된 피라미드에서 저해상도 레벨부터 계층내 움직임 추정을 수행하고 추정된 움직임과 현재 해상도 두 영상을 가지고 계층간 움직임 선형보간을 계층내 비선형 움직임 추정으로 바꿈으로써 움직임 정이 이루어진다. 제한한 계층내 움직임 추정과 계층간 움직임 추정에 관하여 좀 더 자세히 설명하며 아래와 같다.

1. 영역분할에 바탕을 둔 계층내 움직임 추정기법

본 논문에선 계층내, 즉 고정 해상도에서 움직임을 추정하기 위하여 영상을 영역 분할하고 여기서 움직임을 추정한 후 움직임 추정결과에 따라 다시 영역분할하는 순환적 방법을 사용하였다. 여기서 영역 분할은 영상의 밝기값에 따른 것이 아니며 움직임 추정 오차에 따라 수행된다.

움직임 추정은 일반적으로 이전 영상의 밝기값을 일차 혹은 이차로 근사화한 후 이것과 가장 잘 정합되는 현재 영상의 위치를 찾는 것이다. 이 문제는 ill-posed이므로 여기서 평활화항을 추가한 후 수치해석의 relaxation 방법에 의하여 에너지 최소화 과정을 통하여 움직임을 추정하는 것이 일반적이다. 영상의 모든 점에서 일차로 영상을 근사화할 경우, 발산하지 않고 일정한 값으로 수렴하나, 실제 영상의 경우 이러한 가정이 맞지 않는 부분이 많아 발산하게 된다. 또한 영상을 2차 이상의 다항식으로 근사화할 경우 움직임을 유일하게 결정할 수 없게 된다.

반복법에 의하여 문제를 풀 경우 모든 점에서 병렬적으로 움직임을 구하고 다음 번에 계속 사용한다. 효과적인 움직임 추정을 위하여 밑을 만든 점의 움직임은 큰 가중치로 전파시키고 그렇지 않은 경우는 적은 가중치로 전파시키거나, line process^(15, 16)를 두어 경계간의 간섭을 막기도 한다. 그러나 불연속인 점에서는 초기 반복에서부터 크게 발산하는 경향이 있으며, 이것은 주위의 것에 비하여 크기 때문에 작은 가중치를 두어도 주위에 영향을 미치게 된다. 또한 line process를 사용하더라도 불연속 영역이 넓은 경우에는 line process에 의하여 초기에 잘못되는 추정을 막을 수 없으며, 초기 line process의 추정 또한 어려운 문제이다. 본 방법에서는 움직임 오차가 큰 움직임 불연속점들을 outlier로 생각하여 움직임 추정에서 제외함으로써 움직임 추정을 안정되게 하며, 추정된 결

과에 의하여 outlier 영역을 가변적으로 줄여나가는 방법을 제안하였다.

문제를 단순화하기 위하여 1차원 움직임을 생각할 경우 1차원 움직임 $u(x)$ 는

$$u(x) = -\frac{E_t(x)}{E_x(x)} \quad (1)$$

로 나타낼 수 있다. 여기서 E 는 영상의 밝기값을 나타내며, $E_t(x)$ 와 $E_x(x)$ 는 각각 밝기값의 시간 및 공간 미분값을 나타낸다. 여기서 구한 움직임은 영상을 1차로 근사화하여 얻은 것이므로 이것이 만족되지 않은 부분에서 실제와 다른 움직임이 추정된다. 실제로 2차원 영상에서 초기 움직임이 잘못 추정되면 주위의 결과에까지 영향을 주게 된다. 제한한 방법은 반복법에 의하여 움직임을 추정하는데, 첫번째 반복에서는 1차로 근사화될 수 없어 큰 움직임 오차를 낼 것으로 예측되는 영역을 제외한 영역에서만 움직임을 추정한다. 그리고 다음번 반복부터는 이전에 추정된 움직임에 의하여 보상한 후 outlier 판단에 따라 영역을 다시 설정한다. 이러한 과정을 반복함에 따라 outlier 영역을 줄이고, 정확한 움직임이 outlier 영역에의 움직임 벡터의 영역을 제한함으로써 움직임이 발산함을 막을 수 있으며, 불연속 밝기값 및 불연속 움직임이 존재하는 상황에서도 강건한 움직임 추정을 가능하게 한다.

이러한 특성을 바탕으로 본 논문에서는 범함수 최소화 과정을 통하여 움직임을 추정한다. 본 방법에서는 움직임 추정은 범함수

$$I(X^*) = \inf_{X \in X} J(X) \quad (2)$$

를 만족하는 움직임 X^* 를 가능한 해집합 X 에서 결정하는 것이다. 여기서 움직임 필드 X 는

$$X = \{(u(x, y), v(x, y)) | (x, y) \in I: \text{전체영상}\} \quad (3)$$

로 정의되며, 본 논문에서는 범함수로 기존의 범함수⁽⁶⁻¹⁴⁾에서 범함수 정의역을 변화시킬 수 있도록

$$J(X, \Omega) = \int_{\Omega} (x, y) u(x, y) + E_x(x, y)v(x, y) + E_t(x, y)u(x, y))^2 \quad (4)$$

$$+ \lambda \int_{G_s(x, y)} c(x, y, (\zeta, \eta)) ((u(x, y) - u(\zeta, \eta))^2 + (v(x, y) - v(\zeta, \eta))^2) d\zeta d\eta \} dx dy$$

를 사용하였다. 여기서 Ω 는 영상전체 I 에 속하는 범함수 정의역⁽¹⁷⁾이며, $G_s(x, y)$ 는 (x, y) 의 주변 영역을 나타내고 $c(x, y), (\zeta, \eta)$ 는 연속성 조절함수이다.

움직임 추정식을 유도하기 위하여 식 (4)는 이산형

$$J(X, \Omega) = \sum_{(x, y) \in \Omega} [(E_x(x, y) u(x, y) + E_y(x, y) v(x, y) + E_t(x, y))^2 + \lambda \sum_{(\zeta, \eta) \in G_s(x, y)} c((x, y), (\zeta, \eta)) ((u(x, y) - u(\zeta, \eta))^2 + (v(x, y) - v(\zeta, \eta))^2)] \quad (5)$$

로 쓸 수 있다. 이 범함수 정의역을 D 를 이용하여 표현하면

$$J(X, D) = \sum_{(x, y) \in I} D(x, y) [(E_x(x, y) u(x, y) + E_y(x, y) v(x, y) + E_t(x, y))^2 + \lambda \sum_{(\zeta, \eta) \in N(x, y)} D(\zeta, \eta) c(x, y, (\zeta, \eta)) (u(x, y) - u(\zeta, \eta))^2 + (v(x, y) - v(\zeta, \eta))^2)] \quad (6)$$

로 쓸 수 있고, 여기서 $D(x, y)$ 는

$$D(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in \Omega \\ 0, & (x, y) \in \Omega^c \end{cases} \quad (7)$$

이며, $N(x, y)$ 는 $G_s(x, y)$ 를 포함하는 최소의 좌우대칭 영역으로 $G_s(x, y) = N(x, y) \cap \Omega$ 를 만족한다. 여기서 $\Omega \cup \Omega^c = I$ 이다. $c((x, y), (\zeta, \eta))$ 는 움직임 불연속을 고려하기 위한 항이고, $D(x, y)$ 와 $D(\zeta, \eta)$ 는 불연속에서 움직임의 발산을 막고, 불연속 움직임을 구하기 위한 항이다. $c((x, y), (\zeta, \eta))$ 는 실제의 움직임의 불연속의 위치를 알고 있을 경우에 적용할 수 있으나 실제로 이것은 모르기 때문에 $c(x, y), (\zeta, \eta)$ 와 $D(x, y)$ 를 반복적으로 변화시키는 ICM(iterative condition mode) 방법을 사용하여 최적화를 수행하였다. 다음부터의 움직임 추정식은 $D(x, y)$ 와 $c(x, y), (\zeta, \eta)$ 를 고정시키고 유도하게 된다. $c(x, y), (\zeta, \eta)$ 는 두 점사이의 연

결강도를 결정하는 값으로 대칭성이 존재하여 $c((x, y), (\zeta, \eta)) = c((\zeta, \eta), (x, y))$ 이 된다.^(12, 18) 이런 이런 성질을 이용하여 범함수 최소화 과정을 통하면

$$\frac{1}{2} \frac{\partial J}{\partial u(x, y)} = D(x, y) E_x(x, y) (E_x(x, y)u(x, y) + E_y(x, y)v(x, y) + E_t(x, y)) \quad (8a)$$

$$+ 2\lambda \sum_{(\zeta, \eta) \in N(x, y)} D(\zeta, \eta) c(x, y, (\zeta, \eta)) (u(x, y) - u(\zeta, \eta)) = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial J}{\partial v(x, y)} = D(x, y) E_y(x, y) (E_x(x, y)u(x, y) + E_y(x, y)v(x, y) + E_t(x, y)) \quad (8b)$$

$$+ 2\lambda \sum_{(\zeta, \eta) \in N(x, y)} D(\zeta, \eta) c(x, y, (\zeta, \eta)) (v(x, y) - v(\zeta, \eta)) = 0$$

를 얻는다. 식 (8)을 연립⁽⁶⁾시켜 정리하면

$$\begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = D(x, y) \begin{bmatrix} U(x, y) - \frac{E_x(x, y)U(x, y) + E_y(x, y)V(x, y) + E_t(x, y)}{2\lambda \sum_{(\zeta, \eta) \in N(x, y)} D(\zeta, \eta) c((x, y), (\zeta, \eta)) + E_x^2(x, y) + E_y^2(x, y)} \\ E_x(x, y) \\ V(x, y) - \frac{E_x(x, y)U(x, y) + E_y(x, y)V(x, y) + E_t(x, y)}{2\lambda \sum_{(\zeta, \eta) \in N(x, y)} D(\zeta, \eta) c((x, y), (\zeta, \eta)) + E_x^2(x, y) + E_y^2(x, y)} \\ E_y(x, y) \end{bmatrix} \quad (9)$$

로 쓸 수 있으며, 여기서 가중 평균 움직임 $U(x, y)$ 와 $V(x, y)$ 는

$$U(x, y) = \frac{\sum_{(\zeta, \eta) \in N(x, y)} D(\zeta, \eta) c((x, y), (\zeta, \eta)) u(\zeta, \eta)}{\sum_{(\zeta, \eta) \in N(x, y)} D(\zeta, \eta) c((x, y), (\zeta, \eta))} \quad (10)$$

$$V(x, y) = \frac{\sum_{(\zeta, \eta) \in N(x, y)} D(\zeta, \eta) c((x, y), (\zeta, \eta)) v(\zeta, \eta)}{\sum_{(\zeta, \eta) \in N(x, y)} D(\zeta, \eta) c((x, y), (\zeta, \eta))}$$

이다. 반복법에 의하여 움직임을 추정하기 위하여 ICM에 바탕을 두어 매 반복마다 $D(x, y)$ 와 $c((x, y),$

$(\zeta, \eta))$ 를 갱신하는 반복 움직임 추정식을 유도하면

$$\begin{bmatrix} u^{k+1}(x, y) \\ v^{k+1}(x, y) \end{bmatrix} = D(x, y) \begin{bmatrix} U^k(x, y) - \frac{E_x(x, y)U^k(x, y) + E_y(x, y)V^k(x, y) + E_t(x, y)}{2\lambda \sum_{(\zeta, \eta) \in N(x, y)} D^k(\zeta, \eta) c^k((x, y), (\zeta, \eta)) + E_x^2(x, y) + E_y^2(x, y)} \\ E_x(x, y) \\ V^k(x, y) - \frac{E_x(x, y)U^k(x, y) + E_y(x, y)V^k(x, y) + E_t(x, y)}{2\lambda \sum_{(\zeta, \eta) \in N(x, y)} D^k(\zeta, \eta) c^k((x, y), (\zeta, \eta)) + E_x^2(x, y) + E_y^2(x, y)} \\ E_y(x, y) \end{bmatrix} \quad (11)$$

으로 주어진다. 여기서 첨자 k 는 k 번째 반복을 나타내며 k 번째 가중 평균 움직임 $U^k(x, y)$ 및 $V^k(x, y)$ 는

$$U^k(x, y) = \frac{\sum_{(\zeta, \eta) \in N(x, y)} D^k(\zeta, \eta) c^k((x, y), (\zeta, \eta)) u^k(\zeta, \eta)}{\sum_{(\zeta, \eta) \in N(x, y)} D^k(\zeta, \eta) c^k((x, y), (\zeta, \eta))} \quad (12)$$

$$V^k(x, y) = \frac{\sum_{(\zeta, \eta) \in N(x, y)} D^k(\zeta, \eta) c^k((x, y), (\zeta, \eta)) v^k(\zeta, \eta)}{\sum_{(\zeta, \eta) \in N(x, y)} D^k(\zeta, \eta) c^k((x, y), (\zeta, \eta))}$$

이다. 여기서 $u^0(\zeta, \eta)$ 와 $v^0(\zeta, \eta)$ 는 모든 (ζ, η) 에 대하여 0이다. 다음으로 $c((x, y), (\zeta, \eta))$ 와 $D(\zeta, \eta)$ 의 초기 값과 갱신식은 불연속 움직임 추정과 안정한 수렴을 위하여 결정된다. $c((x, y), (\zeta, \eta))$ 는 불연속 움직임을 결정하는 아날로그 line process이다. 제안한 방법에서는 움직임 불연속과 밝기값의 변화에 따라 불연속성을 조절하는 불연속 조절함수로

$$c^k(x, y, (\zeta, \eta)) = \exp\left(-\frac{1 + |u^k(\zeta, \eta) - u^k(x, y)|^2}{K((x, y), (\zeta, \eta))}\right) \quad (13)$$

를 사용하였다. 이러한 함수의 형태는 기존의 비등질 전파에 의한 경계검출 알고리즘에 사용되어진 형태를 사용하였다.⁽¹⁸⁾ $K((x, y), (\zeta, \eta))$ 는

$$K((x, y), (\zeta, \eta)) = \frac{K'}{1 + (E(\zeta, \eta) - E(x, y))^2} \quad (14)$$

이다. 여기서 K' 은 움직임 및 밝기값에 따른 경계를

결정하기 위한 임계치이다. 본 방법에서는 밝기값의 경계를 40으로 하였다. 그러나 기존의 방법에서는 움직임의 불연속을 결정하는 임계치가 일정한 것에 비하여 제한한 방법에서 사용한 연속성 조절함수는 영상의 밝기값에 따른 적응적 임계치이다. 초기에는 움직임이 모두 0으로 초기화되어 있으므로 밝기값 경계에 의하여 결정되며 움직임이 결정되기 시작하면 밝기값에 따른 적응적 임계치를 가지고 움직임의 불연속을 결정하게 된다.

제한한 움직임 추정에서 범함수 정의역 $D(x, y)$ 의 결정은 제한식의 가정으로부터 결정된다. 밝기값 제한 조건식

$$E(x, y, t) = E(x, u\delta t, y + v\delta t, t + \delta t) \quad (15)$$

에서 일반성을 잃지 않고 δt 를 1로 놓으면

$$\begin{aligned} E(x+u, y, t+1) &= E(x, y, t) + \frac{\partial E(x, y, t)}{\partial x} u \\ &+ \frac{\partial E(x, y, t)}{\partial y} v + \frac{\partial E(x, y, t)}{\partial t} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E(x, y, t)}{\partial x^2} u^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E(x, y, t)}{\partial y^2} v^2 \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E(x, y, t)}{\partial t^2} \\ &+ \frac{\partial^2 E(x, y, t)}{\partial x \partial t} u + \frac{\partial^2 E(x, y, t)}{\partial x \partial y} uv + \frac{\partial^2 E(x, y, t)}{\partial y \partial t} v + h.o.t \end{aligned} \quad (16)$$

로 쓸 수 있다. 여기서 $h.o.t$ 은 u, v 에 대하여 2차미분 이상의 항으로 작은 움직임에 대하여 무시할 수 있으나 연속영상일지라도 시간축에 대한 미분값은 경계 부분에서 많은 차이를 낼 수 있으므로 본 논문에서는 이를 무시하지 않는다. 이러한 가정에 의한 밝기값 제한식

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(x, y, t)}{\partial x} u + \frac{\partial E(x, y, t)}{\partial y} v + \frac{\partial E(x, y, t)}{\partial t} \\ + \frac{\partial^2 E(x, y, t)}{\partial x \partial t} u + \frac{\partial^2 E(x, y, t)}{\partial y \partial t} v = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

을 가지고 구한 움직임 u, v 를 옳은 값으로 하고, 이것을 더 근사화하여 움직임 추정식에서 사용되는 밝기값 제한조건

$$\frac{\partial E(x, y, t)}{\partial x} \hat{u} + \frac{\partial E(x, y, t)}{\partial y} \hat{v} + \frac{\partial E(x, y, t)}{\partial t} = 0 \quad (18)$$

에서 구한 움직임 \hat{v}, \hat{u} 를 추정한 값이라 한다. 두 직선의 방정식의 차이에 따라 $D(x, y)$ 값을 결정할 수 있다. 여기서 두 방정식간의 차이는 v 축의 절편과 기울기값의 차이를 임계치에 따라 오차가 크면 $D(x, y)$ 값을 0으로 하고 그렇지 않으면 1로 한다. 이처럼 $D(x, y)$ 값을 결정 한 후 움직임 추정을 수행하고, 추정한 움직임을 이용하여 이전영상을 이동시키고 다시 $D(x, y)$ 값을 결정하는 판단기준을 적용하여 $D(x, y)$ 값을 결정하게 된다. 그러나 이러한 방법을 사용할 경우 $D(x, y)$ 값을 판단하는 데에도 많은 계산이 필요하므로 더욱 간단한 방법을 사용한다. 간단한 판단기준을 유도하기 위하여 먼저 1차원 움직임의 경우에 대한 상대오차를 분석하였다. 1차원 밝기값 제한조건식

$$\begin{aligned} E(x, t) &= E(x+u, t+1) \\ &= E(x, t) + \frac{\partial E(x, t)}{\partial x} u + \frac{\partial E(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 E(x, t)}{\partial t \partial x} u + h.o.t. \end{aligned} \quad (19)$$

에서 4번째항 $h.o.t$.을 무시한 밝기값 제한조건식

$$\frac{\partial E(x, t)}{\partial x} u + \frac{\partial E(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 E(x, t)}{\partial t \partial x} u = 0 \quad (20)$$

과 식 (18)에서 \hat{v} 을 무시하고 추정된 \hat{u} 과의 상대오차를 구하면

$$\frac{|u - \hat{u}|}{|u|} = \frac{|E_{xt}|}{|E_x|} \quad (21)$$

으로 주어진다. 여기서 E_{xt} 는 영상의 밝기값의 공간 및 시간미분값이다. 이와같은 결과를 확장하기 위하여 Battiti 등의 방법⁽¹⁰⁾과 같은 방법으로 2차원 움직임 추정식을 유도하게 될 때 생기는 오차는

$$\frac{E_{xt}^2 + E_{yt}^2}{2\lambda + E_x^2 + E_y^2} \quad (22)$$

로 주어진다. 제한한 방법에서는 이 값이 임계치 T 보다 클 경우 $D(x, y)$ 를 0으로 하였다.

움직임 추정에 있어서의 오차는 여러가지가 있다. 시공간 경사법에 있어서 지금까지의 오차에 관한 연

구는 근사화된 밝기값 제한조건식의 양자화 오차에 따른 해석이었다. 그리고 이에 따라 움직임의 범위를 결정하는 것이었다. 그러나 본 방법에서는 근사화된 밝기값 제한조건식의 가정을 이용하여 움직임 추정 범함수 정의역의 분할에 의하여 움직임을 추정하였다. 이것으로 기존의 움직임의 불연속만을 조절함에 따라 움직임이 큰 경우에 적용하지 못하던 문제를 해결할 수 있었다.

2. 계층간 움직임 추정기법

기존의 움직임 추정방법은 계층간 움직임을 선형 투영과 평균에 의하여 움직임의 해상도를 바꾸었다. (7-11) 이처럼 움직임의 해상도를 바꾸는 과정은 움직임의 불연속이 존재하는 영역에서 움직임 벡터 뭉툭화 현상이 발생한다.

고해상도에서 서로 다른 영역의 경우 평균 평활화에 의하여 저해상도에서는 평활화되어 나타난다. 그리고 저해상도에서 움직임을 구한 결과는 이 경계의 움직임을 구한 것이다. 구한 움직임을 고해상도로 투영하는 과정을 선형 보간에 바탕을 둔 경우, 움직이지 않는 영역으로 움직임이 전파된다. 이로 인하여 고해상도 단계에서도 잘못된 움직임 벡서가 계속 전파된다. 이러한 움직임 투영과정에서 생기는 오류를 막기 위하여 본 방법에서는 움직임 투영과정을 공간상의 상호작용을 비선형 계층간 상호작용을 이용한 움직임 추정으로 대체하였다. 즉 선형투영과정이 계층간 움직임 추정과정으로 대체된 것이다.

제안한 방법의 계층간 움직임 추정을 위한 범함수는

$$J(X, \Omega), \sum_{(x, y) \in I^0} D(x, y) \{ (E_x^{(l)}(x, y) u^{(l)}(x, y) + E_y^{(l)}(x, y) v^{(l)}(x, y) + E_t^{(l)})^2 + \lambda \sum_{i=0}^3 c^{Inter}(x, y), s_i(x, y) ((u^{(l)}(x, y) - 2u^{(l+1)}(s_i(x, y)))^2 + (v^{(l)}(x, y) - 2v^{(l+1)}(s_i(x, y)))^2 \} \quad (23)$$

로 정의된다. 여기서 첨자 (l)는 l 번째 해상도를 표시하며, $s_i(x, y)$ 는

$$s_i(x, y) = \left(\left[\frac{x}{2} \right] - (-1)^x \bmod(i, 2), \left[\frac{y}{2} \right] - (-1)^y \left[\frac{i}{2} \right] \right) \quad (24)$$

로 표현된다. 여기서 $[\cdot]$ 는 소수를 버리는 함수이고

$\bmod(a, b)$ 는 a 를 b 로 나눈 나머지를 나타내는 함수이다. 그리고 $c^{Inter}((x, y), s_i(x, y))$ 는

$$c^{Inter}((x, y), s_i(x, y)) = \text{linear}[i] c((x, y), s_i(x, y)) \quad (25)$$

로 정의된다. 여기서 $\text{linear}[i]$ 는 선형 interpolation에 바탕을 둔 계수이다. 이 계수는

$$\text{linear}[i] = \left[\frac{9}{16}, \frac{3}{16}, \frac{3}{16}, \frac{1}{16} \right] \quad (26)$$

으로 주어진다.⁽⁷⁾ 적용적 계층간 비선형 움직임 interpolation을 위한 $c((x, y), s_i(x, y))$ 는

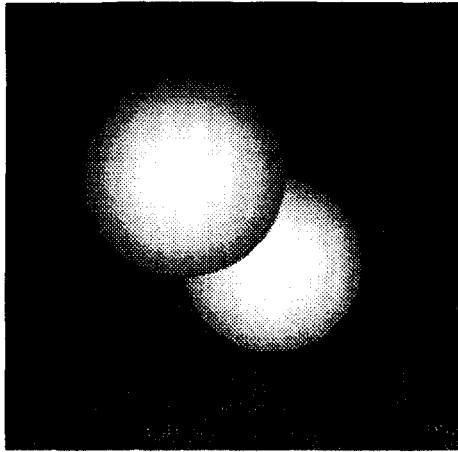
$$c((x, y), s_i(x, y)) = \exp \left(\frac{(E^{(k)}(x, y) - E^{(k-1)}(s_i(x, y)))^2}{K^k} \right) \quad (27)$$

으로 주어진다. 여기서 K^k 은 밝기값에 따른 경계를 결정하기 위한 임계치로 K' 과 같은 값으로 정하였다. 이처럼 주어진 범함수를 계층내 움직임 추정식과 같은 방법으로 유도하면 식 (11), (12)와 같은 형태가 된다.

IV. 실험결과 및 분석

본 실험에서 제안한 계층적 방법과 기존의 방법을 비교하기 위하여 실험영상으로 합성영상과 실제영상을 사용하였다. 합성영상에서의 실제 움직임과 추정된 움직임 사이에 몇가지 오차척도를 이용하여 제안한 방법과 기존의 방법의 성능을 정량적으로 비교하였다. 이러한 합성영상에 대하여 잡음의 양을 변화시키면서 움직임 추정결과를 비교하였다. 여기서 사용한 움직임 추정오차로는 L_1 과 L_2 norm⁽¹⁷⁾ 그리고 각도오차(Angle avg. e)와 각도오차 표준편차⁽¹⁹⁾ (Angle s. d.)를 사용하였다. 기존의 방법으로 영상의 밝기값에 따라 움직임을 제안하는 Enkelmann의 방법⁽⁸⁾, 계층구조의 오차분석에 의한 Battiti 등의 방법⁽¹⁰⁾ 그리고 multigrid relaxation에 바탕을 둔 Terzopoulos의 방법⁽⁹⁾을 실험하였다.

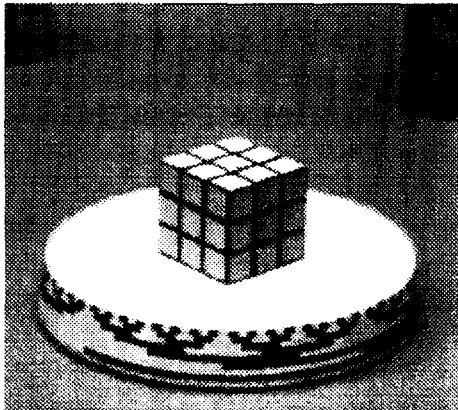
그림 3는 본 실험에서 사용한 합성영상이다. 그림 3(a)는 합성영상 1로서 256×256 두개의 원으로 구성된 원영상이다. 합성영상 1은 겹쳐진 두개의 원으로 구성되어 있는데 큰 원은 움직임



(a) 합성영상 1(원영상)



(b) 합성영상 2(Yosemite)



(c) 실제영상 1(Rubik)



(d) 실제영상 2(SRI Tree)

그림 3. 실험에 사용한 영상

Fig 3. Image sequences used in experiments.

$$u(x, y) = r \sin \left(\pi \frac{y-100}{180} \right) \quad (28)$$

$$v(x, y) = r \sin \left(\pi \frac{x-100}{180} \right)$$

에 따라 합성된 영상이며, 여기서 r 은 zoom 파라미터이다. 작은 원은 움직임 파라미터 $(dx, dy, d\theta) = (r, r, 0)$ 에 따라 합성된 것이다. 여기서 dx 와 dy 는 x 축과 y 축으로 직선운동한 화소의 양이며, $d\theta$ 는 회전한 각도이

다. 그림 3(b)는 합성영상 2로서 316×252 의 Yosemite 영상이다. 그림 3(c)는 실제영상 1로서 256×240 의 Rubik 영상이고, 그림 3(d)는 실제영상 2로서 256×233 의 SRI tree 영상이다. 실험에 사용한 모든 영상은 균일하게 8비트로 양자화된 영상들이다.

본 실험에서는 Enkelmann의 방법⁽⁸⁾의 움직임 연속성 가중치 파라미터 α^2 은 50, γ 는 12.5, 움직임 벡터 수렴 임계치 θ_{lim} 은 0.1, 그리고 수렴속도 θ_{sw} 은 0.8로

표 1. r 변화에 따른 움직임 추정결과 비교(합성영상 1)
Table 1. Comparison of motion estimation results with varying r (synthetic image 1).

r	추정기법	오차			
		L_1 norm	L_2 norm	Angle avg. e.	Angle s. d.
1	Enkelmann	0.175	0.349	6.611	12.570
	Battiti 등	0.160	0.260	6.783	10.389
	Terzopoulos	0.195	0.386	7.763	13.239
	제안	0.124	0.270	4.887	10.093
3	Enkelmann	0.448	0.913	9.343	19.172
	Battiti 등	0.515	0.938	12.645	18.507
	Terzopoulos	0.689	1.679	13.424	21.672
	제안	0.172	0.371	4.439	10.606
5	Enkelmann	0.760	1.401	10.966	22.060
	Battiti 등	0.945	1.794	16.224	22.088
	Terzopoulos	1.247	3.385	14.964	24.317
	제안	0.288	0.678	5.642	14.021
7	Enkelmann	1.090	1.936	12.244	23.509
	Battiti 등	1.468	2.897	18.480	24.734
	Terzopoulos	2.071	5.396	17.935	26.878
	제안	0.427	1.012	6.904	16.577

설정하고 실험하였다. Battiti 등의 방법⁽¹⁰⁾의 움직임 연속성 가중치 파라미터 α^2 은 50으로, C 는 $2\pi^2/3$ 로, T_{err} 은 0.5로, 그리고 각 해상도에서 반복횟수는 100 회로 정하였다. Terzopoulos의 방법⁽⁹⁾의 파라미터 x^2 은 50으로 하였고, 반복횟수를 결정하는 파라미터 n_1 , n_2 , n_3 는 모두 4로 하였다. 제안한 방법에서는 λ 를 50으로 하였으며 K' 을 40으로 하였고, T 는 0.3으로 하였으며, 각 계층에서 100회의 반복을 하였다. 각 파라미터는 실험적으로 결정되었으며, 선정된 파라미터의 약간의 변화에는 추정결과가 크게 영향을 미치지 않았다. 그리고 반복횟수는 각 알고리즘이 수렴할 수 있는 충분히 크게 하였다.

표 1에 r 값의 변화에 따른 기존의 방법과 제안한 방법의 움직임 추정 오차를 나타내었다. 제안한 방법이 기존의 방법에 비하여 큰 움직임 벡터에 대하여 더욱 효과적임을 알 수 있다. 그림 4에 r 이 3일 때, 여러가지 움직임 추정기법에 추정된 움직임 벡터를 나

표 2. 합성영상 2에 대한 움직임 추정결과 비교
Table 2. Comparison of motion estimation results for synthetic image 2.

추정기법	오차			
	L_1 norm	L_2 norm	Angle avg. e.	Angle s. d.
Enkelmann	1.701	2.039	21.733	23.504
Battiti 등	1.243	1.636	18.234	20.764
Terzopoulos	1.178	1.576	24.940	20.851
제안	0.730	1.471	10.162	14.146

타내었다. 그림에서 보듯이 움직임 불연속이 존재하는 영역에서 기존의 방법에 비하여 발산함이 없고, 움직임 불연속을 비교적 정확히 추정하였음을 알 수 있다.

합성영상 2는 Yosemite 영상으로 카메라가 zoom in과 구름의 수평움직임으로 움직임 벡터가 발생한다. 이 영상은 zoom의 양이 크며, 산과 구름사이의 움직임 불연속이 존재한다. 본 실험에선 15번째와 16번째 영상 사이의 움직임을 추정하였다. 표 2에 이에 대한 실험결과를 나타내었다. 제안한 방법에 기존의 방법에 비하여 효과적임을 알 수 있다. 이 영상의 경우도 전체적으로는 움직임이 연속적이거나, 움직임 불연속이 존재하여 제안한 방법의 추정오차가 비교적 작은 결과를 내었다.

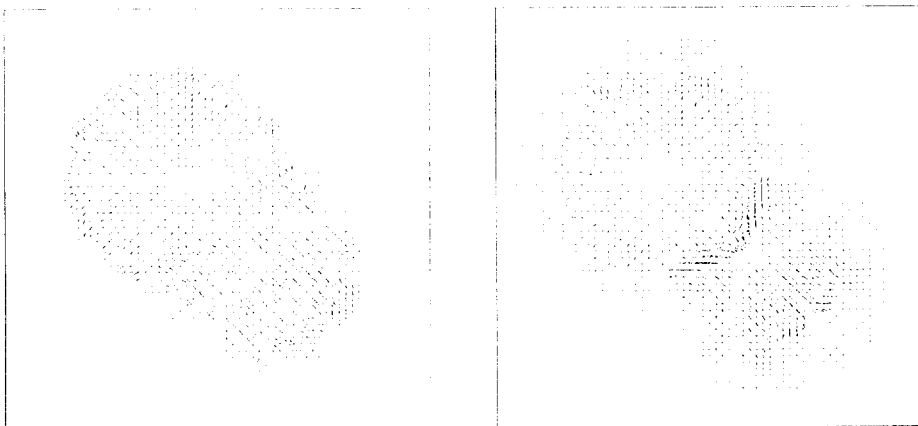
표 3은 r 을 3으로 한 합성영상 1에 대하여 가산형 가우시안잡음의 표준편차에 따른 실험결과이다. 잡음의 표준편차를 1, 3, 5, 7로 하여 실험하였다. 제안한 방법은 정확히 추정된 움직임을 크게 전파시키는 특성을 가지므로 기존의 방법에 비하여 잡음에 덜 민감함을 보여준다. 물론 제안한 방법과 기존의 방법 모두 큰 잡음에 대하여서는 좋지 않은 결과를 나타낸다. 이것은 움직임 추정이 영상 밝기값의 기울기에 바탕을 두기 때문이다. 잡음에 대한 움직임의 민감성을 줄이기 위해서는 적분형태의 추정이 필요하게 되는데 움직임 추정에 있어서는 영상의 적응적 평활화와 움직임 연속성 제한범위를 크게 하여야 한다. 그러나 이것은 국부적인 정확한 움직임 추정과 불연속 움직임 추정과는 상충관계를 가지고 있다.

제안한 방법의 효율성을 보이기 위하여 실제영상에 대하여서도 실험하였다. 실제영상에 대하여는 제

표 3. 가우시안 잡음에 따른 움직임 추정결과 비교(합성영상 1, $r=3$)

Table 3. Comparison of motion estimation results with varying noise levels(synthetic image 1, $r=3$).

Standard deviation	추정기법	오차			
		L_1 norm	L_2 norm	Angle avg. e.	Angle s. d.
1	Enkelmann	0.512	0.927	9.417	19.716
	Battiti 등	0.582	0.972	13.622	19.271
	Terzopoulos	0.722	1.271	15.913	21.249
	제안	0.199	0.421	4.919	11.393
3	Enkelmann	0.649	1.233	10.109	19.984
	Battiti 등	0.763	1.284	14.845	20.453
	Terzopoulos	0.964	1.492	16.129	21.794
	제안	0.243	0.569	5.047	12.453
5	Enkelmann	0.710	1.318	13.722	20.363
	Battiti 등	0.954	1.531	15.821	21.458
	Terzopoulos	1.139	1.631	16.361	22.417
	제안	0.293	0.647	5.317	13.171
7	Enkelmann	1.338	2.046	15.345	25.317
	Battiti 등	1.356	1.989	16.374	23.470
	Terzopoulos	1.986	2.342	17.463	24.837
	제안	0.437	0.875	7.603	17.896



(a) Enkelmann의 방법

(b) Battiti 등의 방법

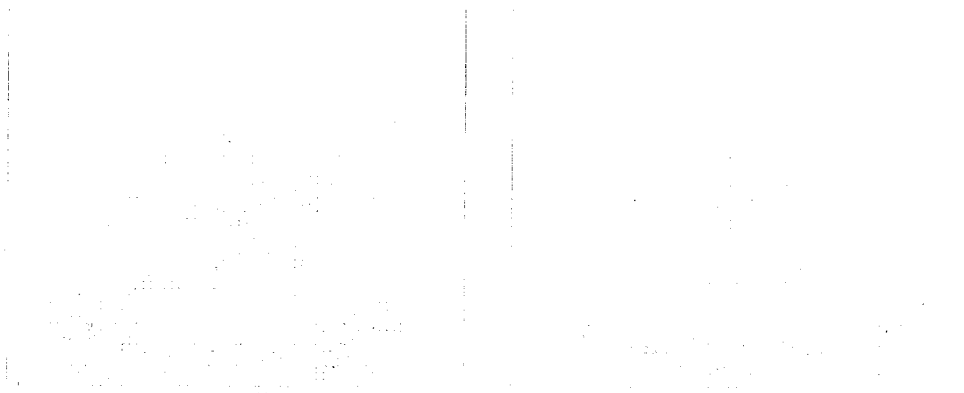


(c) Terzopoulos의 방법

(d) 제안한 방법

그림 4. 합성영상 1에 대한 움직임 추정결과 비교($r = 3$)

Fig 4. Comparison of motion estimation results for the synthetic image 1 ($r = 3$).



(a) Enkelmann의 방법

(b) Battiti 등의 방법



(c) Terzopoulos의 방법

(d) 제안한 방법

그림 5. 실제영상 1에 대한 움직임 추정결과 비교

Fig 5. Comparison of motion estimation results for the real image 1.

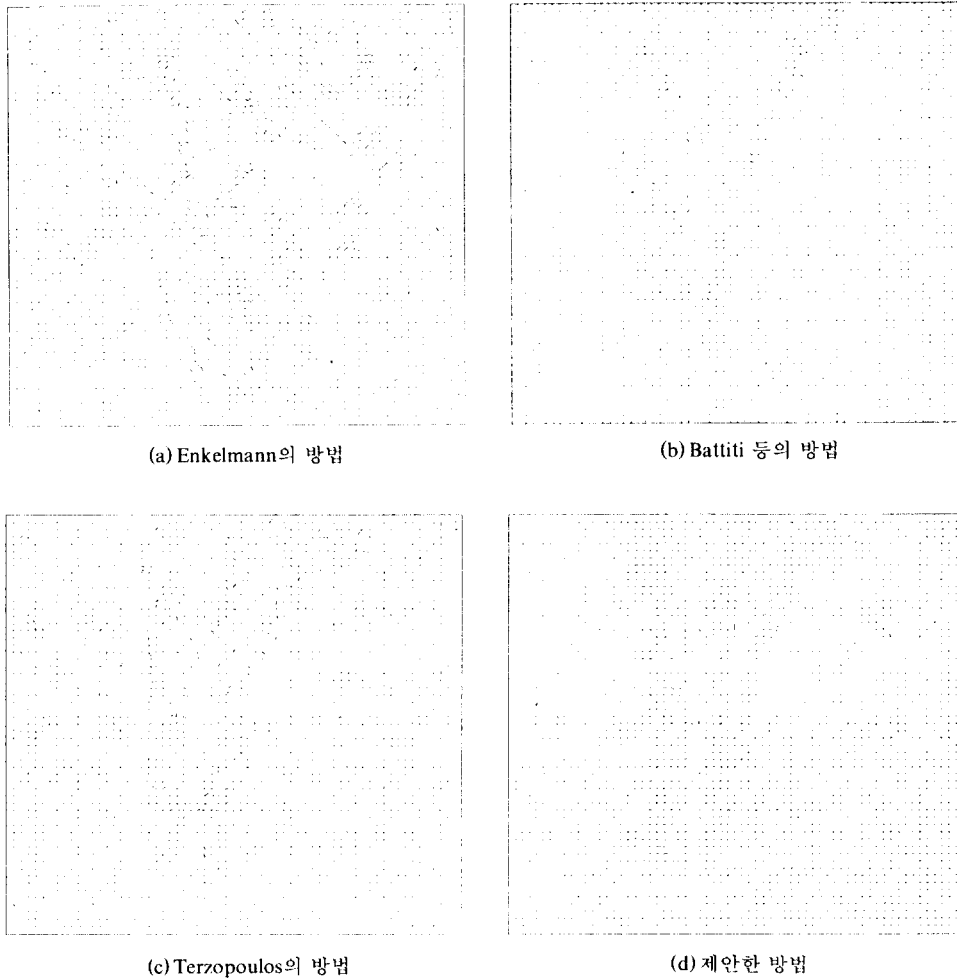


그림 6. 실제영상 2에 대한 움직임 추정결과 비교

Fig 6. Comparison of motion estimation results for the real image 2.

안한 방법과 λ 값과 기존의 방법의 α^2 을 100로 고정하고 실험하였다. 실제영상 1은 Rubik 영상으로 원형 테이블에 정육면체가 회전하는 영상이다. 본 실험에선 1번째와 5번째 영상 사이의 움직임을 추정하였다. 그림 5에서 보듯이 제안한 방법에 기존의 방법에 비하여 효과적임을 알 수 있다. 이처럼 움직임의 불연속이 클 경우 기존의 방법과 제안한 방법이 차이를 보임을 알 수 있다. 세번째 실제 영상은 SRI tree 영상으로 카메라가 panning되어 움직임이 발생하는 영상이다. 이 실험은 1번째와 2번째 사이의 움직임 추정

하였다. 그림 6에서 보듯이 카메라와 가까이 있는 바닥과 나무의 움직임은 크고 배경은 작은 움직임을 보이고 있다. 그리고 제안한 방법이 기존의 방법에 비하여 나무와 배경사이의 움직임 불연속을 효과적으로 추정하였음을 쉽게 알 수 있다.

V. 결 론

본 논문은 범함수 정의역 분할에 바탕을 둔 비선형 계층적 움직임 추정기법을 제안하였다. 제안한 방법

은 계층내에서는 움직임 추정 영역을 적응적으로 변화시키는 비선형 움직임 추정을 제안하였으며, 또한 계층간에서 움직임 벡터를 선형 보간하는 과정을 제안한 비선형 움직임 추정과정으로 대체하였다. 본 방법은 계층내 및 계층간 연속성 조절함수를 적응적으로 결정함으로써 불연속 및 연속 움직임을 모두 효과적으로 추정할 수 있었다. 특히 범함수 정의역 분할을 이용함으로써 움직임 불연속에서 오차의 전과를 크게 막을 수 있었다.

앞으로의 과제는 robust estimation에 바탕을 두어 불연속 움직임과 잡음에 효과적인 움직임 추정 방법에 관한 연구이다.

參 考 文 獻

1. J. K. Aggarwal and N. Nandhakumar, "On the computation of motion sequences of images-A review," *Proc. IEEE*, vol. 76, no. 8, pp. 917-935, Aug. 1988.
2. J. F. Vega-Riveros and K. Jabbour, "Review of motion analysis techniques," *IEEE Proc. Pt. I*, vol. 136, no. 6, pp. 397-404, Dec. 1989.
3. G. Adiv, "Determining three-dimensional motion and structure from optical flow generated by several moving objects," *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, vol. PAMI-7, no. 4, pp. 384-401, July 1985.
4. J. R. Jain and A. K. Jain, "Displacement measurement and its application in interframe image coding," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-29, no. 12, pp. 1799-1808, Dec. 1981.
5. S. T. Barnard and W. B. Thompson, "Disparity analysis of images," *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, vol. PAMI-2, no. 4, pp. 333-340, July 1980.
6. B. K. P. Horn and B. G. Schunck, "Determining optical flow," *Artif. Intell.*, vol. 17, pp. 185-203, Aug. 1982.
7. F. C. Glazer, *Hierarchical Motion Detection*, Ph. D. dissertation, Dept. of Computer and Information Science, University of Massachusetts, Feb. 1987.
8. W. Enkelmann, "Investigations of multigrid algorithms for the estimation of optical flow fields in image sequences," *Computer Vision, Graphics, Image Processing*, vol. 43, no. 2, pp. 150-177, Aug. 1988.
9. D. Terzopoulos, "Image analysis using multigrid relaxation methods," *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, vol. PAMI-8, no. 2, pp. 129-139, Mar. 1986.
10. R. Battiti, E. Amaldi, and C. Koch, "Computing optical flow across multiple scales: An adaptive coarse-to-fine strategy," *Int. J. Computer Vision*, vol. 6, no. 2, pp. 133-145, June 1991.
11. S. H. Hwang and S. U. Lee, "A hierarchical optical flow estimation algorithm based on the interlevel motion smoothness constraint," *Pattern Recognition*, vol. 26, no. 6, pp. 939-952, June 1993.
12. D.-G. Sim and R.-H. Park, "A two-stage algorithm for motion discontinuity-preserving optical flow estimation," accepted, *Computer Vision and Image Understanding*.
13. D.-G. Sim and R.-H. Park, "Anisotropic hierarchical motion estimation method based on decomposition of the functional domain," will be published in *Journal Visual Commun. Image Representation*.
14. H.-H. Nagel and W. Enkelmann, "An investigation of smoothness constraints for the estimation of displacement vector fields from image sequences," *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, vol. PAMI-8, no. 5, pp. 565-593, Sep. 1986.
15. S. German and D. Geman, "Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and the Bayesian restoration of images," *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, vol. PAMI-6, no. 6, pp. 721-741, Nov. 1984.
16. F. Heitz and P. Bouthemy, "Multimodal estimation of discontinuous optical flow using Markov random fields," *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine*

