

양자화 제약 집합에 여과된 데이터를 투영하는 기법의 이론적 고찰

正會員 김 동 식*, 박 섭 형**

Theoretical Analysis of the Projection of Filtered Data onto the Quantization Constraint Set

Dong Sik Kim*, Seop Hyeong Park** *Regular Members*

요 약

블록 집합에의 투영(POCS: projections onto convex sets) 이론 또는 제약 최소화(constrained minimization) 기법에 기초한 압축 영상의 후처리에는 여러 가지 제약 조건을 사용하는 데 이 중에서 공통적으로 사용되는 것이 양자화 제약 집합(QCS: quantization constraint set)이다. 양자화는 양자화 영역에 있는 모든 데이터를 그에 해당되는 대표값으로 사상시키는 다대 일 함수이다. 후처리 과정 중에 데이터를 항상 해당되는 양자화 영역에 머무르도록 하는 것은 후처리로 인해 발생하는 부작용을 줄이려 하는 것으로 이것이 QCS에 투영을 통해 얻고자 하는 기본 목표이다. 그러나 이에 대한 이론적 고찰이 이제까지는 빈약하였다. 본 논문에서는 MSE(Mean Square Error)를 최소화시킨다는 관점에서 후처리 과정 중의 여과와 QCS에의 투영을 이론적으로 분석하였다. 적절한 여과 기법과 QCS의 사용으로 왜곡 값을 후처리 이전보다 줄일 수 있음을 보였다. 또한 기존의 QCS에의 투영에서는 양자화 영역을 기준으로 하여 이를 벗어난 데이터를 영역의 경계로 사상하는 방법을 사용하고 있으나, 양자화 영역에 포함되면서 이보다 더 작은 협집합을 기준으로 하여 이 집합 외부에 있는 데이터를 협집합의 경계로 사상하는 경우가 부호화 왜곡을 더 줄일 수 있다는 사실을 이론적으로 보였다. 즉 NQCS(narrow QCS)에의 투영 이론을 제시하였다. 이론에 대한 예와 토론을 아울러 제시하였다.

ABSTRACT

The postprocessing of compressed images based on the projections onto convex sets and the constrained minimization imposes several constraints on the processed data. The quantization constraint has been commonly used in various algorithms. Quantization is a many-to-one mapping, by which all the data in a quantization region are

*서울대학교 뉴미디어 공동연구소

**한국통신 통신망연구소 초고속망연구실 네트워크서비스팀장

論文番號: 96127-0430

接受日字: 1996年 4月 30日

mapped to the corresponding representative level. The basic idea behind the projection onto the QCS(quantization constraint set) is to prevent the processed data from diverging from the original quantization region in order to reduce the artifacts caused by filtering in postprocessing. However, there have been few efforts to analyze the POQCS(projection onto the QCS). This paper analyzed mathematically the POQCS of filtered data from the viewpoint of minimizing the mean square error. Our analysis shows that a proper filtering technique followed by the POQCS can reduce the quantization distortion. In the conventional POQCS, the outside data of each quantization region are mapped into the corresponding boundary. Our analysis also shows that mapping the outside data to the boundary of a subregion of the quantization-region yields lower distortion than does the mapping to the boundary of the original region. In addition, several examples and discussions on the theory are introduced.

I. 서 론

블럭 이산 여현 변환(DCT: discrete cosine transform)은 영상 데이터 양을 효율적으로 줄여 주는 손실 데이터 압축에 사용되는 기법으로, 현재 여러 영상 전송 기법의 표준에 사용되고 있다. 그런데 블럭 DCT에 기초한 영상 부호화 방법은, 블럭화 현상이라 하는 블럭과 블럭 간에 불연속 현상이 발생하는 단점을 가지고 있다. 이를 줄이기 위한 방법으로 블럭 DCT 기법을 변형하여 블럭화 현상을 줄이는 방법^[1,2]과, 일단 부호화 이후 다시 복호된 영상을 후처리(post-processing)하는 방법^[3]이 사용되고 있다. 이 중 후자의 경우, 최근에는 볼록 집합에의 투영(POCS: projections onto convex sets) 이론 또는 제약 최소화(constrained minimization) 기법에 기초한 영상 복원(image restoration) 기법이 후처리 방법으로 사용되고 있다^[4].

후처리 기법은 영상 부호화의 기본 구조를 변화시키지 않고 복호기만을 변형해도 적용이 가능하다는 잇점을 가지고 있다. 일반적으로 POCS 이론이나 제약 최적화 기법에 기초한 복원 기법에서의 각 반복 과정은, 여과(filtering) 과정과 양자화 제약 집합에 투영(projection onto quantization constraint set)하는 과정으로 나눌 수 있다. 여과 기법은 영상의 화질을 개선하는 데 결정적인 역할을 하는 것으로서, 간단하면서도 고성능인 여과 기법의 고안을 위한 많은 연구가 수행되고 있다^[6,7,8]. 그러나 이러한 여과도 일종의 제약(constraint)이며, 이와 같이 여러 가지 제약을 설정하여 그들의 공통 부분에 후처리된 데이터가 놓이도록 하는 것이 앞에서 언급한 두가지 방법의 기본 목표이다^[6,7,9].

이 중에서 양자화 제약 집합(QCS: quantization constraint set)이란 복호된 영상이 주어지면 양자화된 이후에 그 복호 영상이 되는 모든 영상의 집합으로 정의된다. 이 집합 안으로 영상을 제한시키는 것은 후처리 중에 원 영상으로부터 길이가 멀리 벗어나지 못하도록 하는 역할을 한다. 영상 데이터 압축을 위한 알고리즘에는 반드시 양자화 과정이 포함되므로, 부호화된 데이터는 역변환이 불가능하다. 그러나 양자화된 데이터, 즉 복호된 데이터로부터 최소한 원 영상의 값이 어떤 영역에 있었는지는 양자화 영역을 알고 있으므로 추측이 가능하다. 따라서 이러한 집합을 하나의 제약으로 하고, 더불어 원 영상이 가질 수 있는 여러 제약을 설정하여, 결국에는 원 영상에 보다 가까운 데이터를 얻어 내는 것이 POCS 이론 또는 제약 최적화 기법에 기초한 영상 복원 기법의 원리이다.

언급한 바와 같이 QCS에의 투영은 단순히 영상 복원 과정 중에서 중간 데이터가 원 영상으로부터 멀어지는 것을 방지해 준다. 예를 들어, 블럭 DCT 부호화에서 블럭화 현상을 제거하기 위해서는 흔히 단순한 저역 통과 여과 기법(low-pass filtering)을 복호된 영상에 적용할 수 있다. 그러나 주어진 영상의 특성에 맞게 잘 설계된 여과기가 아닌 일반적인 저역 통과 여과기를 사용하게 되면 단순히 저주파 성분만을 통과시키고 고주파 성분을 제거하기 때문에 블럭화 현상은 어느 정도 줄일 수 있겠지만 원 영상이 가지고 있는 가장자리 부분 등의 고주파 성분까지도 같이 손상을 받게 되고 이 때문에 영상 전체가 흐릿해지는 현상이 나타난다^[6]. 이때, 이렇게 손상된 데이터를 다시 QCS에 투영시키면 어느 정도는 저역 통과 여과로 인한 손상을 보정할 수 있으리라 사료된다. 이러한

관점에서 이제까지 QCS에의 투영 기법이 사용되어 왔다^{6,7,8)}. 그러나 QCS를 사용하는 이유에 관해서는 체계적인 이론적 고찰이 아직까지는 없었다.

최근 POCS 및 제약 최적화 기법을 이용하여 영상 복원을 하는 데 있어서 후처리 과정 중의 데이터를 기존 QCS에의 투영, 즉 양자화 영역의 폐집합 안으로 제한시키는 것보다는 폐집합보다 더 작은 협집합으로 제한시킬 때 MSE 값이 더 작게 나옴을 발견하였다^{10,11,13)}. 여러 종류의 여과 기법과 전송률, 나아가서 벡터 양자화¹²⁾에 있어서도 같은 현상이 나타난다는 사실을 발견하였다. 이는 기존 QCS를 사용할 때 전송률 등에 따라서 영상 복원 이후 MSE가 오히려 증가하는 경우가 발생하는 문제에 대한 답변을 가능하게 하는 실마리가 된다. 따라서 본 논문에서는 MSE를 최소화시킨다고 하는 관점에서 어떠한 경우에 이런 결과가 나오는지의 이론적 분석을 시도하였다^{14,15)}. 따라서, 각각의 제약안으로 데이터를 제한시키는 것을 반복적으로 적용시키는 POCS 등의 이론보다도, 여과 과정이라는 일종의 제약과 그 다음에 QCS에의 투영을 MSE를 줄이는 하나의 과정으로 보고 이때 최소 MSE를 얻는 것에 대해 이론적으로 고찰하였다. 본 논문에서는 여과 과정에 몇 가지 조건을 가정할 때, MSE를 최소화시키기 위한 QCS는 이러한 폐집합보다 더 작은, 협집합이 되어야 한다는 사실을 이론적 분석을 통해 증명하였다. 여기서 이러한 집합을 양자화 제약 협집합(NQCS: narrow quantization constraint set)이라 부르기로 한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 제 II 장에서는 양자화와 QCS에의 투영을 수식으로서 정리하였고, 제 III 장에서는 MSE를 최소화시키는 개념에서 QCS에의 투영의 이론적 분석을 소개하였다. 제 IV 장에서는 이론적 고찰의 예를 들고, 실영상에 대한 실험 결과^{11,15)}와 비교 토론해 놓았다. 그리고 마지막 장에 결론을 내렸다.

II. 양자화 제약 집합

본 장에서는 스칼라 양자기와 그에 대한 양자화 제약 집합, 즉 QCS를 수학적으로 정의하였으며, 제 III 장에서의 이론적 전개를 위해 [6]과 [7]에서 사용된 QCS에의 투영 기법을 일반화된 형태로 소개하였다.

X 를 양자화하고자하는 불규칙 변수라고 하자. X 의 확률 분포 함수(probability distribution function)를 $F_X(x)$ 로 표기하고 연속이라고 가정한다. 본 이론적 전개에서는 F_X 가 완만하게 변화한다(smoothness)고 가정할 필요는 없지만 양자화 왜곡값이 존재하기 위해서 $EX^2 < \infty$ 이라고 가정한다. $C = \{\hat{x}_i\}$ 를 N 개의 대표값으로 구성되는 양자기 $Q_{C,S}(\cdot)$ 의 부호책이라 하고, $S = \{S_i\}$ 를 그에 상응되는, R 을 분할하는 양자화 영역의 집합이라 하자. 그러면 양자기는 다음과 같은 사상으로 표현할 수 있다.

$$Q_{C,S}(x) \triangleq \sum_{i=1}^N \hat{x}_i I_S(x) \quad (1)$$

이 식에서 $I_S(x)$ 는 만일 $x \in S_i$ 이면 1이고 그렇지 않으면 0이다. 이 양자기에서 양자화 영역은 다음과 같이 정의된다.

$$S_i = \begin{cases} \{x: -\infty < x \leq \hat{x}_1 + \Delta_1^U\} & (i=1) \\ \{x: \hat{x}_i - \Delta_i^L < x \leq \hat{x}_i + \Delta_i^U\} & (i=2, \dots, N-1) \\ \{x: \hat{x}_N - \Delta_N^L < x < \infty\} & (i=N) \end{cases} \quad (2)$$

이 식에서 $\Delta_i^L, \Delta_i^U > 0$ 이고 $i=2, \dots, N$ 일 때 $\hat{x}_{i-1} + \Delta_{i-1}^U = \hat{x}_i - \Delta_i^L$ 이 성립된다. 왜곡값 측정을 위하여 MSE를 사용한다고 하면, 주어진 부호책 C , 양자화 영역 집합 S , 확률 분포 함수 F_X 를 가지는 신호에 대해 평균 양자화 왜곡값은

$$D(C, S, F_X) \triangleq E\{X - Q_{C,S}(X)\}^2 = \sum_{i=1}^N P_i d_i \quad (3)$$

로 정의된다. 이 식에서 $P_i d_i$ 는 i 번째 부분 평균 왜곡값이며, $P_i = \int_{S_i} dF_X$ 이고, i 번째 평균 왜곡값은 다음과 같이 정의된다.

$$d_i \triangleq \frac{1}{P_i} \int_{S_i} (x - \hat{x}_i)^2 dF_X(x), \quad i=1, \dots, N \quad (4)$$

만일 부호책 C 가 주어진 S 에 대해 최적인 부호책 중의 하나라고 하면, i 번째 대표값은 $\hat{x}_i = \int_{S_i} x dF_X(x) / P_i$, $i=1, \dots, N$, 즉 각 S_i 의 무게 중심이 된다. 따라서 최적인 평균 양자화 왜곡값은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$D(S, F_X) \triangleq \min_C D(C, S, F_X) \quad (5)$$

만일 양자기 $Q_{c,s}(\cdot)$ 가 (국부적) 최적이거나 부호책이 [16]에서 언급된 고정 부호책(fixed codebook)이라고 한다면, 역시 $D(S, F_X) = D(C, S, F_X)$ 가 성립된다. 즉 대표값은 S_i 의 무게 중심이 된다. JPEG, CCITT H.261, MPEG 등의 표준에서도, 만일 각 양자화 영역에서 입력이 균일 분포를 가진다고 하면 이러한 무게 중심 조건이 만족된다. 따라서 본 논문에서는 이론적 전개를 단순화시키기 위해서, 언급된 '무게 중심 조건'을 기본적인 가정으로 하였다. 그러나 이러한 가정이 성립되지 않아도 유사한 이론적 결과를 얻을 수 있다.

이제, 여과와 불균 집합(convex set)에의 투영을 이용한 복원 기법에서 여과 과정과 양자화 집합에의 투영 과정을 고찰해 보자. 부호책의 대표값으로부터 구성되는 양자화된 데이터를 여과시키면 그 대표값을 중심으로 분산된 데이터를 얻게 되는데, 이를 확률 이론으로 전개하면 다음과 같다. 불규칙 변수 Y_i 가 \hat{x}_i 로부터 여과 후에 얻어진 데이터를 나타낸다고 하자. 또한 $F_{X,Y}$ 를 X_i 와 Y_i 의 조인트 확률 분포 함수(joint probability distribution function)라고 하자. 여기서 불규칙 변수 X_i 의 확률 밀도 함수(pdf: probability density function)는 $f_X(x)/P_i$, $x \in S_i$, $i = 1, \dots, N$ 이 되며, $f_X(x)$ 는 X 의 pdf이다. $F_{X,Y}(x, y)$ 를 $x \in S_i$ 와 $y \in \mathbf{R}$ 에서 연속이라고 가정하자. 따라서 pdf $f_{X,Y}$ 는 $F_{X,Y}$ 를 미분함으로써 구할 수 있다. 조인트 확률 분포 함수 $F_{X,Y}$ 의 형태는 여과 기법에 따라서 달라지므로 다음 장에 소개되는 $F_{X,Y}$ 에 부여되는 조건들의 성립 여하는 여과 기법에 전적으로 좌우된다. 이러한 조건들은 다음 장의 이론적 전개에서 충분 조건으로 사용된다. 같은 이론적 결과를 보이는 또 다른 충분 조건을 찾을 수도 있겠지만, 다음 장에서 소개되는 충분 조건은 NQCS에의 투영이 기존의 QCS 경우보다 낮은 MSE를 얻는다는 사실을 분석하는 데 있어서 충분하리라 사료된다.

이제 [6]과 [7]에 소개된 QCS에의 투영 과정을 소개해 보면 다음과 같다. 처음에 양자화된 데이터를 여과하여 불규칙 변수 Y_i 를 얻는다. 제약 폐집합을 정의하기 위하여 $\Delta_i^U = \Delta_N^U = 1$ 이라 하면 제약 폐집합 $B_i(\mu_i, v_i)$ 는 다음과 같다.

$$B_i(\mu_i, v_i) = [\hat{x}_i - \mu_i \Delta_i^L, \hat{x}_i + v_i \Delta_i^U], \quad i = 1, \dots, N \quad (6)$$

이 식에서 '투영 계수' μ_i 와 v_i 는 $\mu_i, v_i \geq 0$ 을 만족

다. 이러한 집합 $B_i(\mu_i, v_i)$ 에 Y_i 를 투영한다. 즉 자세히 설명하면, y' 를 y 의 투영된 값이라 하면 y' 는 다음과 같다.

$$y' = \begin{cases} y & (y \in B_i(\mu_i, v_i)) \\ \hat{x}_i - \mu_i \Delta_i^L & (y < \hat{x}_i - \mu_i \Delta_i^L) \\ \hat{x}_i + v_i \Delta_i^U & (y > \hat{x}_i + v_i \Delta_i^U) \end{cases} \quad (7)$$

이 식에서 만일 $\mu_i = v_i = 1$ 이면 $B_i(\mu_i, v_i)$ 는 $i = 2, \dots, N-1$ 일 때, i 번째 양자화 영역의 closure인데 이는 일반적인 QCS에로 투영 기법에서 사용되는 폐집합이다. 이를 본 논문에서는 양자화 제약 기준 집합(RQCS: reference QCS)이라 부르기로 한다. 한편 $0 \leq \mu_i < 1$ 또는 $0 \leq v_i < 1$ 이면 $B_i(\mu_i, v_i)$ 는 일종의 양자화 제약 위 집합(NQCS)이다. S_i 일 때는 $1 < \mu_i < \infty$ 또는 $0 < v_i < 1$, 그리고 S_N 일 때는 $0 < \mu_N < 1$ 또는 $0 < v_N < \infty$ 경우가 NQCS가 된다. $B_i(0, 0)$ 은 원소가 \hat{x}_i 하나뿐인 것으로, $B_i(0, 0)$ 에 대한 투영은 여과된 데이터를 여과 이전으로 되돌려 놓는 것에 불과하다. 즉 여과를 하지 않은 것과 마찬가지로이다. 특별한 경우로, $1 < \mu_i$ 또는 $1 < v_i$ 인 경우가 있는데, 이는 일종의 광집합으로 이에 대한 설명도 다음장의 증명에서 언급하였다.

이렇게 해서 얻어지는 원 데이터와 투영된 데이터 간의 평균 왜곡값은 주어진 투영 계수 집합 $\{(\mu_i, v_i)\}$ 에 대해 다음과 같이 정의된다.

$$\sum_{i=1}^N P_i \delta_i(\mu_i, v_i) \quad (8)$$

이를 '투영된 평균 왜곡값'이라 부르자. 이 식에서 $\delta_i(\mu_i, v_i)$ 는 i 번째 투영 평균 왜곡값이며 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \delta_i(\mu_i, v_i) \triangleq & \int_{\hat{x}_i - \mu_i \Delta_i^L}^{\hat{x}_i + v_i \Delta_i^U} \int_{S_i} (x_i - y_i)^2 dF_{X,Y}(x_i, y_i) \\ & + \int_{-\infty}^{\hat{x}_i - \mu_i \Delta_i^L} \int_{S_i} \{x_i - (\hat{x}_i - \mu_i \Delta_i^L)\}^2 dF_{X,Y}(x_i, y_i) \\ & + \int_{\hat{x}_i + v_i \Delta_i^U}^{\infty} \int_{S_i} \{x_i - (\hat{x}_i + v_i \Delta_i^U)\}^2 dF_{X,Y}(x_i, y_i) \end{aligned} \quad (9)$$

식 (8)의 투영된 평균 왜곡값은, 반복 처리 알고리즘

에서 하나의 처리 과정, 즉 한 번의 여과와 다음의 투영 이후에 얻어지는 값으로, 한번의 처리 과정을 통해서 이 값을 감소시키는 것이 본 논문의 관심사이다. 따라서 이러한 처리 과정을 반복해서 적용하는 알고리즘은 매 반복 과정마다 본 논문의 이론적 분석을 적용할 수 있다. 식 (8)에서 $\delta_i(\mu_i, v_i)$ 는 다음과 같이 전개할 수 있다.

$$\delta_i(\mu_i, v_i) = d_i + \lambda_i(\mu_i, v_i) \quad (10)$$

이 식에서 $\lambda_i(\mu_i, v_i) \triangleq \alpha_i(\mu_i, v_i) - \beta_i(\mu_i, v_i)$ 인데, $\alpha_i(\mu_i, v_i)$ 와 $\beta_i(\mu_i, v_i)$ 는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \alpha_i(\mu_i, v_i) \triangleq & \int_{\hat{x}_i - \mu_i \Delta_i^t}^{\hat{x}_i + v_i \Delta_i^t} \int_{S_i} (y_i - \hat{x}_i)^2 dF_{X_i, Y_i}(x_i, y_i) \\ & + \{ (\mu_i \Delta_i^t)^2 \int_{-\infty}^{\hat{x}_i - \mu_i \Delta_i^t} + (v_i \Delta_i^t)^2 \int_{\hat{x}_i + v_i \Delta_i^t}^{\infty} \} \\ & \int_{S_i} dF_{X_i, Y_i}(x_i, y_i) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \beta_i(\mu_i, v_i) \triangleq & 2 \int_{\hat{x}_i - \mu_i \Delta_i^t}^{\hat{x}_i + v_i \Delta_i^t} \int_{S_i} (x_i - \hat{x}_i)(y_i - \hat{x}_i) dF_{X_i, Y_i}(x_i, y_i) \\ & + 2 \{ -\mu_i \Delta_i^t \int_{-\infty}^{\hat{x}_i - \mu_i \Delta_i^t} + v_i \Delta_i^t \int_{\hat{x}_i + v_i \Delta_i^t}^{\infty} \} \\ & \int_{S_i} (x_i - \hat{x}_i) dF_{X_i, Y_i}(x_i, y_i) \end{aligned} \quad (12)$$

이 식에서 일종의 분산 항인 $\alpha_i(\cdot, \cdot)$ 와 상관도 항인 $\beta_i(\cdot, \cdot)$ 는 투영 계수인 μ_i 와 v_i 의 함수이며 $\mu_i, v_i \geq 0$ 영역에서 연속이다.

식 (10)에서 보는 바와 같이, i 번째 투영된 평균 왜곡값은 i 번째 평균 왜곡 d_i 와 $\lambda_i(\cdot, \cdot)$ 의 합 형태로 되어 있다. 만일 $\lambda_i(\mu_i, v_i)$ 가 어떠한 투영 계수 값에서 음수가 된다고 하면 $\delta_i(\cdot, \cdot)$ 는 d_i 보다 작아질 수가 있다. 다시 말해서 본래의 양자화 왜곡 $D(S, F_X)$ 보다 식 (8)의 투영된 평균 왜곡값을 더 줄일 수 있다는 것이다. 따라서 $\lambda_i(\cdot, \cdot)$ 가 음수이면서 가능한 작아지는, 즉 $\delta_i(\cdot, \cdot)$ 가 최소가 되는 여과 기법과 이때의 투영 계수를 찾는 작업이 필요할 것이다. RQCS, 즉 양자화 제약 기준 집합에 투영할 때의 왜곡은 $\delta_i(1, 1)$ 인데, 이 값은

최소 MSE를 보장하지는 못한다. 오히려 여과 기법이나 부호책의 크기 N 에 따라서는 $\delta_i(1, 1) > \delta_i(0, 0) = d_i$, 즉 후처리가 복호된 영상의 왜곡을 더 나쁘게 만들 수도 있다. 이러한 좋지 않은 결과에 대한 토론도 제 IV장에 예와 함께 소개하였는데, 실제 영상에 대한 실험 결과는 [10, 11, 14]를 참고하기 바란다. 다음 장에는 F_{X_i, Y_i} 에 대한 충분 조건과 $\alpha_i(\cdot, \cdot)$ 와 $\beta_i(\cdot, \cdot)$ 의 고찰을 기초로 한 수학적 분석을 통해서 NQCS에의 투영에 대한 이론을 제시하였다.

III. 양자화 제약 집합의 이론적 고찰

본 장에서는, NQCS에의 투영이 RQCS에의 투영보다 영상의 왜곡을 작게 한다는 것을 수학적 분석을 통해서 증명하였다. X_i 와 Y_i 의 상관 분산을 다음과 같이 정의하였다.

$$\text{COV}(X_i, Y_i) \triangleq E(X_i - EX_i)(Y_i - EY_i) \quad (13)$$

이 식에서, 무게 중심 가정으로부터 $EX_i = \hat{x}_i$ 이며 EY_i 는 \bar{y}_i 로 표기하자. 또한 다음과 같이 t 까지의 부분적 분산을 나타내는 함수 $c(t)$ 를 정의하자.

$$c(t) = \int_{-\infty}^t (y - \bar{y}_i) E\{X_i - \hat{x}_i | Y_i = y\} f_{Y_i}(y) dy \quad (14)$$

이 식에서 $f_{Y_i}(y)$ 는 Y_i 의 pdf이며 $EY_i^2 < \infty$ 를 만족한다. 여기서 $f_{Y_i}(y) \neq 0$ 인 모든 $y \in \mathbf{R}$ 점들의 집합은 반드시 bound되어 있을 필요는 없다. 그러면 식 (13)은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\text{COV}(X_i, Y_i) = \lim_{t \rightarrow \infty} c(t) \quad (15)$$

여기에서 $\text{COV}(X_i, Y_i)$ 는 X_i 와 Y_i 간의 상관도를 나타낸다. 따라서 사용된 여과 기법이 원 데이터인 X_i 를 잘 예측한다고 하면 $\text{COV}(X_i, Y_i)$ 는 반드시 양수가 되어야 할 것이다. 또한 Y_i 가 모든 X_i 에 대해 균일하게 잘 예측된다고 하면 각 $Y_i = y$ 에 대해 $(X_i - \hat{x}_i)$ 의 조건부 기대값, 즉 $E\{X_i - \hat{x}_i | Y_i = y\}$ 가 최소한 $(y - \bar{y}_i)$ 와 같은 부호를 가진다고 추측된다. 즉 식 (14)의 $c(t)$ 가 $t \in \mathbf{R}$ 에서 증가하는 함수가 된다. 따라서 $0 < c(\bar{y}_i) < \lim_{t \rightarrow \infty} c(t)$

$c(t)$ 가 만족되며, $c(\hat{x}_i) \approx c(\bar{y})$ 라는 근사식이 성립됨을 추측할 수 있다. 결국 이때에 $0 < c(\hat{x}_i) < \lim_{t \rightarrow \infty} c(t)$ 가 성립된다. 앞에서 열거한 추측들은 단순하면서도 실제 데이터를 여과하는 데 있어서 근접한 결과를 보이기 때문에 본 논문의 이론적 전개를 위한 충분 조건으로 사용하려 한다.

이제 $\delta_i(\cdot, \cdot)$ 와 투영 계수 μ_i, v_i 간의 관계를 고찰해 보기로 하자. 식 (11)에서 $\hat{x}_i \leq y_i \leq \hat{x}_i + v_i \Delta_i^t$ 일 때 $(y_i - \hat{x}_i)^2$ 의 최대값은 $(v_i \Delta_i^t)^2$ 이며, $\hat{x}_i - \mu_i \Delta_i^t \leq y_i \leq \hat{x}_i$ 일 때 $(y_i - \hat{x}_i)^2$ 의 최대값은 $(\mu_i \Delta_i^t)^2$ 이 된다. 따라서 어떠한 값 $\mu_i, v_i \geq 0$ 와 $i = 2, \dots, N-1$ 일 때

$$0 \leq \alpha_i(\mu_i, v_i) \leq (v_i \Delta_i^t)^2 + (\mu_i \Delta_i^t)^2 \quad (16)$$

이 성립된다. 그러므로 식 (10)으로부터 $\delta_i(\mu_i, v_i)$ 는 다음과 같은 부등식을 만족시킨다.

$$d_i - \beta_i(\mu_i, v_i) \leq \delta_i(\mu_i, v_i) \leq d_i + (v_i \Delta_i^t)^2 + (\mu_i \Delta_i^t)^2 - \beta_i(\mu_i, v_i) \quad (17)$$

이 식에서 상관도 $\beta_i(\mu_i, v_i)$ 가 음수이거나 0이면 $\delta_i(\mu_i, v_i)$ 는 $\mu_i = v_i = 0$ 일 때 최소이므로 d_i 보다는 작아지지 못한다. 이는 반복 처리 과정 중의 하나의 처리 과정에서 i 번째 투영된 평균 왜곡값을 줄이지 못했다는 것을 의미한다. 반면에 $\beta_i(\mu_i, v_i) > 0$ 이라고 한다면 i 번째 투영된 평균 왜곡값을 d_i 보다 작은 값으로 낮출 수 있는 여지가 있다. $\beta_i(\mu_i, v_i)$ 가 양수라고 하는 조건은 식 (13)의 상호 분산이 양수라고 하는 사실과 밀접한 관계를 가지고 있는데, 이에 대해 다음과 같이 기술하였다.

식 (11)의 정의로부터 $\alpha_i(\cdot, \cdot)$ 는 연속으로 $\text{Var}(Y_i) + (\bar{y}_i - \hat{x}_i)^2$ 까지 증가한다. 다시 말해서

$$0 \leq \alpha_i(\mu, v) \leq \lim_{\mu', v' \rightarrow \infty} \alpha_i(\mu', v') = \text{Var}(Y_i) + (\bar{y}_i - \hat{x}_i)^2, \quad \mu, v \geq 0 \quad (18)$$

의 관계식을 만족시킨다. 따라서 $\alpha_i(\cdot, \cdot)$ 는 Y_i 의 분산과 밀접한 관계가 있음을 알 수 있다. 한편 만일 $c(t)$ 가 증가 함수이면 $\beta_i(\cdot, \cdot)$ 도 역시 증가하여 $2 \cdot \text{COV}(X_i, Y_i)$ 로 수렴한다. 즉

$$0 \leq \beta_i(\mu, v) \leq \lim_{\mu, v \rightarrow \infty} \beta_i(\mu', v') = 2 \cdot \text{COV}(X_i, Y_i), \quad \mu, v \geq 0 \quad (19)$$

와 같이 쓸 수 있다. 만일 $\text{COV}(X_i, Y_i) = 0$ 이면 식 (19)로부터 $\beta_i(\mu, v) = 0$ 이 되므로 식 (17) 이하에서 언급한 바와 같이 최소 왜곡값은 $\delta_i(0, 0) = d_i$ 가 된다. 한편 $\delta_i(\mu, v)$ 가 d_i 보다 작아지기 위해서는 $\lambda_i(\mu, v)$ 가 음수가 되도록 $\beta_i(\mu, v)$ 는 반드시 양수가 되어야 한다. 따라서 $\beta_i(\mu, v)$ 와 밀접한 관계를 가지는 $\text{COV}(X_i, Y_i)$ 는 양수가 되어야 한다. 다음에 소개될 제안(proposition)에서는 이러한 조건을 포함한 충분 조건을 제시하고, 이때 $\mu = v = 0$ 에서의 $\beta_i(\mu, v)$ 의 증가율이 $\alpha_i(\mu, v)$ 의 증가율보다 크기 때문에 $\lambda_i(\mu, v) < 0$ 가 되는 μ 와 v 가 존재한다는 사실을 정리하였다.

제안 1: 조인트 확률 분포 함수 $F_{X_i, Y_i}(x, y)$ 가 $x \in S_i$ 와 $y \in \mathbf{R}$ 에서 연속이라고 가정하자. 여기에서 $i \in \{1, \dots, N\}$ 이다. 또한 F_{X_i, Y_i} 가 다음에 열거하는 조건을 만족한다고 하자.

1) $c(t)$ 는 $t \in \mathbf{R}$ 에서 증가 함수이다.

2) $0 < c(\hat{x}_i) < \lim_{t \rightarrow \infty} c(t)$.

그러면 $\mu > 0$ 또는 $v > 0$ 인 어떤 값에서 $\delta_i(\mu, v) < d_i$ 가 성립된다.

제안 1의 증명: 먼저, $\alpha_i(\mu_i, v_i)$ 의 μ 에 대한 편미분은

$$D_1 \alpha_i = \frac{\partial \alpha_i(\mu, v)}{\partial \mu} = 2\mu(\Delta_i^t)^2 \int_{\hat{x}_i - \mu \Delta_i^t}^{\bar{y}_i - \mu \Delta_i^t} f_{Y_i}(y) dy \quad (20)$$

가 된다. F_{X_i, Y_i} 가 연속이므로 $\alpha_i(0, v) = \lim_{\mu \rightarrow 0} \alpha_i(\mu, v)$ 가 모든 $v \geq 0$ 에 대해 성립된다. 그러므로 $\alpha_i(\mu, v)$ 의 $\mu = 0$ 에서의 우측 미분값은 다음과 같다.

$$D_1 \alpha_i(0, v) = 0, \quad v \geq 0 \quad (21)$$

다음, $\beta_i(\mu, v)$ 의 μ 에 대한 편미분은 다음과 같다.

$$D_1 \beta_i = \frac{\partial \beta_i(\mu, v)}{\partial \mu} = -2\Delta_i^t \int_{\hat{x}_i - \mu \Delta_i^t}^{\bar{y}_i - \mu \Delta_i^t} E\{X_i - \hat{x}_i | Y_i = y\} f_{Y_i}(y) dy \quad (22)$$

$\beta_i(0, v) = \lim_{\mu \rightarrow 0, \mu > 0} \beta_i(\mu, v)$ 이므로 $\beta_i(\mu, v)$ 의 $\mu = 0$ 일 때의 우측 미분값은 다음과 같다.

$$D_1 \beta_i(0, v) = -2 \Delta_i^t \int_{-\infty}^{\hat{x}_i} E\{X_i - \hat{x}_i | Y_i = y\} f_Y(y) dy, v \geq 0 \quad (23)$$

여기에서 편미분 $D_1 \alpha_i(\mu, v)$ 와 $D_1 \beta_i(\mu, v)$ 는 v 와는 무관하므로, 특별한 경우를 제외하고는 v 의 범위 설정은 생략하고 μ 에 대한 함수로만 생각하였으며, $\mu \geq 0$ 에서 연속이다. 조건 1)은 다시 쓰면 $dc(t)/dt = (t - y_i) E\{X_i - \hat{x}_i | Y_i = t\} f_Y(t) \geq 0$ 이 되며 $\int_{\mathbb{R}} E\{X_i - \hat{x}_i | Y_i = y\} f_Y(y) dy = 0$ 이므로 조건 2)의 $0 < \lim_{t \rightarrow \infty} c(t)$ 와 함께

$$\int_{-\infty}^{y_i} E\{X_i - \hat{x}_i | Y_i = y\} f_Y(y) dy \quad (24)$$

$$= - \int_{y_i}^{\infty} E\{X_i - \hat{x}_i | Y_i = y\} f_Y(y) dy < 0, |\bar{y}_i| < \infty$$

이 성립된다. 따라서 다시 조건 2)의 $0 < c(\hat{x}_i)$ 로부터

$$\int_{-\infty}^{y_i} E\{X_i - \hat{x}_i | Y_i = y\} f_Y(y) dy \leq \int_{-\infty}^{\hat{x}_i} E\{X_i - \hat{x}_i | Y_i = y\} f_Y(y) dy < 0 \quad (25)$$

이 성립되므로

$$D_1 \beta_i(0, v) > 0 \quad (26)$$

이라는 관계식을 얻는다. 그러므로 식 (21)과 식 (26)으로부터

$$D_1 \lambda_i(0, v) < 0 \quad (27)$$

이 성립된다. $\lambda_i(0, 0) = 0$ 이므로 양수인 어떤 값 μ 에서 $\delta_i(\mu, 0) < d_i$ 가 성립된다. 같은 방법으로 어떤 양수 v 에서 $\delta_i(0, v) < d_i$ 가 된다. 이렇게 하여 본 제안이 증명되었다. ■

제안 1은 0이 아닌 μ 또는 v 에서 $\delta_i(\mu, v)$ 가 d_i 보다 작은 값이 될 수 있다는 사실을 언급하고 있다. 즉 적절한 여과 과정과 QCS에의 투영 기법을 사용하여 MSE를 줄일 수 있다는 이야기가 된다. 여기서 주의

할 점은 여과 과정이 반드시 제안 1에서 제시한 F_{X_i, Y_i} 에 대한 조건을 만족시켜야만 되는 것이 아니라 제 II 장에서 언급한 바와 같이 또 다른 충분 조건을 만족시켜도 된다는 것이다. 그러나 δ_i 를 d_i 보다 줄일 수 있다는 가능성을 이론적으로 보이는 데 있어서는 제안 1의 조건으로도 충분하리라 사료된다.

반면에 다음에 소개되는 정리(theorem)는 NQCS에의 투영에 대한 이론을 제시하고 있다. 즉 Y_i 의 범위가 S_i 의 closure보다 큰 경우, RQCS보다NQCS를 통해서 더 낮은 MSE를 얻을 수 있다는 사실을 언급하는 것이다. 다시 말해서 이것은 $\mu, v \in (0, 1)$ 인 투영 계수에서 $\delta_i(\mu, v) < \delta_i(1, 1)$ 이 성립한다는 것을 보여 주고 있다.

정리 1 (양자화 제약 협집합): 조인트 확률 분포 함수 $F_{X_i, Y_i}(x, y)$ 가 제안 1의 조건들을 만족한다고 하자. 이때 $f_Y(y)$ 가 bound된 decision level에서 $\inf\{y: f_Y(y) \neq 0\} < \inf S_i$ 또는 $\sup\{y: f_Y(y) \neq 0\} > \sup S_i$ 를 만족하는 경우만을 고려한다면 $\delta_i(\mu, v)$ 값은 $i = 2, \dots, N-1$ 에서는 $\mu, v \in (0, 1)$ 이며, $i = 1$ 에서는 $\mu > 0, v \in (0, 1)$ 그리고 $i = N$ 에서는 $\mu \in (0_m, 1), v > 0$ 일 때 최소가 된다.

정리 1의 증명: 먼저 $\lambda_i(\mu, v)$ 를 어떠한 고정된 v 값에서 μ 에 대한 함수라 생각하고, 양자화 영역은 bound되어 있는, 즉 $S_i, i = 2, \dots, N-1$ 만 먼저 생각하기로 하자.

$x \in S_i$ 에서 $-(x - \hat{x}_i) < \Delta_i^t$ 이 만족되므로 $f_Y(y)$ 에 대한 조건으로부터

$$- \int_{-\infty}^{\hat{x}_i - \Delta_i^t} \int_{S_i} (x - \hat{x}_i) f_{X_i, Y_i}(x, y) dx dy$$

$$< \int_{-\infty}^{\hat{x}_i - \Delta_i^t} \int_{S_i} \Delta_i^t f_{X_i, Y_i}(x, y) dx dy \quad (28)$$

가 성립된다. 따라서 식 (20)과 (22)로부터 $\lambda_i(\mu, v)$ 의 $\mu = 1$ 에서의 미분값은 다음 식을 만족시킨다.

$$D_1 \lambda_i(1, v) > 0 \quad (29)$$

따라서 어떤 $\mu < 1$ 에서 $\lambda_i(\mu, v) < \lambda_i(1, v)$ 가 성립된다. 반면에 $\mu > 1$ 인 구간에서는

$$\begin{aligned}
 & - \int_{-\infty}^{\hat{x}_i - \mu \Delta_i^t} \int_{S_i} (x - \hat{x}_i) f_{X_i, Y_i}(x, y) dx dy \\
 & \leq \mu \cdot \int_{-\infty}^{\hat{x}_i - \mu \Delta_i^t} \int_{S_i} \Delta_i^t f_{X_i, Y_i}(x, y) dx dy \quad (30)
 \end{aligned}$$

인 관계식으로부터 $D_i \lambda_i(\mu, \nu) \geq 0$ 이 성립된다. 즉 $\lambda_i(\mu, \nu)$ 는 $\mu > 1$ 구간에서 증가 함수가 된다. 따라서 $\lambda_i(1, \nu) \leq \lambda_i(\mu, \nu)$ 가 성립된다. 그러므로 투영 계수가 (0, 1) 구간일 때 $\delta_i(\mu, \nu)$ 는 최소가 된다.

식 (29)에서와 같은 방법으로 μ 를 고정시켜 놓으면 $\delta_i(\mu, \nu)$ 는 $\nu \in (0, 1)$ 에서 최소가 된다. 따라서 $i = 2, \dots, N-1$ 일 때 $\delta_i(\mu, \nu)$ 는 투영 계수가 $\mu, \nu \in (0, 1)$ 인 구간에서 최소가 된다.

같은 방법으로 bound되어 있지 않은 영역인 $i = 1$ 과 $i = N$ 의 bound되어 있는 decision level에 대해서도 같은 결과를 얻을 수 있다. 그러므로 본 정리가 증명되었다. ■

제안 1과 정리 1에서 살펴본 것 같이, 어떠한 여과 기법에 의해 여과된 데이터를 QCS에 투영할 때는 반드시 MSE를 최소화시키는 투영 계수를 구해야 한다는 사실을 알 수 있다. 또한 X_i 와 Y_i 의 확률 분포 함수가 연속이라고 가정하였는데, 연속이 아닌 경우, 즉 이산 확률 분포 함수(discrete probability distribution function)가 섞여 있는 경우에 대해서도 비슷한 이론적 전개가 가능하다^[5].

IV. 이론에 대한 예와 토론

제 III장에서는 POCS 이론 및 제약 최소화 기법에서 QCS에의 투영 기법을 사용하는 이유를 MSE를 최소화시킨다는 개념으로 설명하였다. 나아가서 기존의 QCS, 즉 RQCS에 대하여 새로운 NQCS를 제안하였다. 정리 1은 여과 기법에 근거하여, RQCS에의 투영은 MSE를 최소화시킨다는 개념에서 최적이지 않음을 보여 주고 있다. 즉 최적 QCS를 얻기 위해서는 투영 계수가 1보다 더 작아져야만 한다. 이는 기존에 영상 복원에 사용되어 온 RQCS를 본 논문에서 제안하는 NQCS로 대체하여야 한다는 것을 의미한다.

다음에는 QCS에 투영시킬 때 투영 계수 및 조인트

확률 분포 함수에 따라 다른 MSE를 얻는다는 사실을 및 가지 예를 통하여 고찰해 보겠다. 다음의 예에서 불규칙 변수 X 는 구분적 균일 분포 함수를 갖는다고 가정하자. 즉 pdf $f_X(x)$ 는 $i = 1, \dots, N$ 에서 다음과 같다.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta_i} & (\hat{x}_i - \frac{\Delta_i}{2} < x < \hat{x}_i + \frac{\Delta_i}{2}) \\ 0 & \end{cases} \quad (31)$$

그러면 i 번째 평균 왜곡은 $d_i = \Delta_i^2/12$ 이다.

예 1: 먼저 어떠한 여과 기법에 의해 각 $i = 1, \dots, N$ 에서 다음과 같은 조인트 pdf가 얻어졌다고 가정해 보자.

$$f_{X_i, Y_i}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta_i^2} & (-\frac{\Delta_i}{2} < x - \hat{x}_i \leq \frac{\Delta_i}{2}, |y - \hat{y}_i| \leq \frac{\Delta_i}{2}) \\ 0 & \end{cases} \quad (32)$$

그러면 $\alpha_i(\mu_i, \nu_i)$ 는 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned}
 \alpha_i(\mu_i, \nu_i) &= \frac{\mu_i^2 \Delta_i^2}{24} (3 - 2\mu_i) + \frac{\nu_i^2 \Delta_i^2}{24} (3 - 2\nu_i), \\
 & \quad i = 1, \dots, N \quad (33)
 \end{aligned}$$

반면에

$$\beta_i(\mu_i, \nu_i) = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (34)$$

이므로 $\delta_i(\mu_i, \nu_i)$ 의 최소값은 $\mu_i = \nu_i = 0$ 일 때의 $\Delta_i^2/12$ 이 된다. 이러한 경우는 후처리가 복호된 데이터를 개선하지 못한다는 것을 의미한다. ■

예 2: 예를 들어 조인트 pdf가 각 $i = 1, \dots, N$ 일 때 다음과 같다고 하자.

$$f_{X_i, Y_i}(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{\Delta_i^2} & (-\frac{\Delta_i}{2} < x - \hat{x}_i \leq \frac{\Delta_i}{2}, \\ & |y - \hat{y}_i| \leq \frac{\Delta_i}{2}, (x - \hat{x}_i)(y - \hat{y}_i) \geq 0) \\ 0 & \end{cases} \quad (35)$$

이때 상관 분산은 양수이며 부분 상관 분산 $c(t)$ 의 변화율은 음수가 아니다. $\mathbf{D}_1 \lambda_i(0, v) = -\Delta_i^2/8 < 0$ 이므로 0이 아닌 어떤 μ 에서 $\lambda_i(\mu, 0) < 0$, 즉 $\delta_i(\mu, 0) < d_i$ 가 성립된다.

한편 $\partial \lambda_i(\mu, v)/\partial \mu = 0$ 방정식은 $\mu = 1/2$ 과 1의 두 개의 근을 가지고 있으며 $\partial \lambda_i(\mu, v)/\partial v = 0$ 도 마찬가지이다. 따라서 δ_i 는 $\mu = v = 1/2$ 일 때 최소값인 $\delta_i(1/2, 1/2) = \Delta_i^2/12 - (5/4)(\Delta_i^2/24)$ 이 되며 $\mu = v = 1$ 일 때는 $\delta_i(1, 1) = \Delta_i^2/12 - (\Delta_i^2/24)$ 로 최대가 된다. ■

예 3: 예를 들어 조인트 pdf가 각 $i = 1, \dots, N$ 에서 다음과 같이 주어진다고 가정하자. 이는 예 2의 pdf보다 상관 분산이 작은 경우이다.

$$f_{x_i, v_i}(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{2\Delta_i^2} \left(-\frac{\Delta_i}{2} < x - \hat{x}_i \leq \frac{\Delta_i}{2}, \right. \\ \left. |y - \hat{x}_i| \leq \frac{\Delta_i}{2}, (x - \hat{x}_i)(y - \hat{x}_i) \geq 0 \right) \\ \frac{1}{2\Delta_i^2} \left(-\frac{\Delta_i}{2} < x - \hat{x}_i \leq \frac{\Delta_i}{2}, \right. \\ \left. |y - \hat{x}_i| \leq \frac{\Delta_i}{2}, (x - \hat{x}_i)(y - \hat{x}_i) < 0 \right) \\ 0 \end{cases} \quad (36)$$

정의로부터 $\alpha_i(\mu_i, v_i) = \mu_i^2 \Delta_i^2 (3 - 2\mu_i)/24 + v_i^2 \Delta_i^2 (3 - 2v_i)/24$ 이고 $\beta_i(\mu_i, v_i) = \mu_i \Delta_i^2 (2 - \mu_i)/32 + v_i \Delta_i^2 (2 - v_i)/32$ 이다. 따라서 $\lambda_i(\mu_i, v_i)$ 는 다음과 같다.

$$\lambda_i(\mu_i, v_i) = \frac{\mu_i \Delta_i^2}{96} (-6 + 15\mu_i - 8\mu_i^2) + \frac{v_i \Delta_i^2}{96} (-6 + 15v_i - 8v_i^2) \quad (37)$$

마찬가지로 $\mathbf{D}_1 \lambda_i(0, v) = -\Delta_i^2/16 < 0$ 이고 $\lambda_i(0, 0) = 0$ 이므로 영이 아닌 어떤 μ 에 대해 $\delta_i(\mu, 0) < d_i$ 가 성립된다.

반면에 $\partial \lambda_i(\mu, v)/\partial \mu = 0$ 방정식은 $\mu = 1/4$ 과 1의 두 개의 근을 가지며, $\partial \lambda_i(\mu, v)/\partial v = 0$ 도 마찬가지이다. 그러므로 구간 $(0, 1) \times (0, 1)$ 에서는 하나의 근을 가지고 있으며, 이때 최소값은 $\delta_i(1/4, 1/4) = \Delta_i/12 - (11/16)(\Delta_i^2/48)$ 인 반면에 $\delta_i(1, 1) = \Delta_i/12 + (\Delta_i^2/48)$ 이므로, 예 2의 경우에 비해 최소값을 얻는 투영 계수가 0에 가까워졌음을 알 수 있다. 그러나 $\mu = v = 1$ 일 때는 오히려

왜곡이 후처리 전, 즉 $\Delta_i^2/12$ 보다 늘어났음을 알 수 있다. ■

이상 예 2와 예 3에서 살펴본 바와 같이 μ, v 에 따라서 $\delta_i(\mu, v)$ 가 변화하며 상관도가 양수일 때 $\delta_i(\mu, v) < d_i$ 가 되는 μ, v 가 존재함을 알 수 있다. 다음은 정리 1에서 언급한 NQCS에 대한 예로서, RQCS와 NQCS의 경우를 비교 검토해 볼 수 있다.

예 4: 예를 들어 조인트 pdf가 각 $i = 1, \dots, N$ 일 때 다음과 같다고 가정하자.

$$f_{x_i, v_i}(x, y) = \begin{cases} \frac{4}{3\Delta_i^2} \left(-\frac{\Delta_i}{2} < x - \hat{x}_i \leq \frac{\Delta_i}{2}, \right. \\ \left. |y - \hat{x}_i| \leq \frac{3\Delta_i}{4}, (x - \hat{x}_i)(y - \hat{x}_i) \geq 0 \right) \\ 0 \end{cases} \quad (38)$$

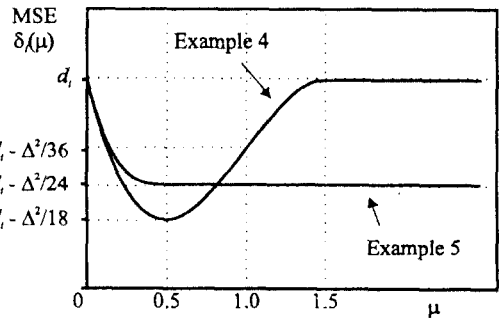


그림 1. 예 4와 예 5의 i 번째 부분 투영 왜곡값.
Fig. 1 The i -th projected distortion curves in examples 4 and 5.

이 조인트 pdf에서 $f_{v_i}(y)$ 는 정리 1에서 언급한 조건에 해당되는 경우로, $\mu = v$ 로 놓을 때 i 번째 부분 투영 왜곡 $\delta_i(\mu, v)$ 값의 μ 에 대한 그래프를 그림 1에 도시하고 'Example 4'라고 표시하였다. 그림에서 보듯이 μ 가 0에서부터 증가함에 따라 δ_i 값이 d_i 보다 낮으므로 내려가면서 $\mu = 1/2$ 에서 최소인 $d_i - \Delta_i^2/18$ 가 되고 $\mu = 1$ 에서는 $d_i - \Delta_i^2/36$ 으로 $\mu = 1/2$ 일 때보다 왜곡값이 증가함을 알 수 있다. ■

실제 영상에 대해서 실험한 결과에서 보면 전송률이 높은 경우^{10,11,16}, 즉 S_i 의 크기가 작은 경우 일반적으로 Y_i 의 분포가 S_i 구간을 벗어나게 되므로, 예 4에서 관찰한 바와 같이 $\mu=1$ 일 때보다 $\mu < 1$ 일 때의 왜곡값이 항상 작음을 알 수 있다. 전송률이 더 높아지면 상대적으로 여과 과정이 원 영상을 정확히 예측할 수 없어서 상관도가 낮아지며, 예 3에서 관찰한 바와 같이 $\mu=1$ 일 때의 왜곡값이 오히려 d_i 보다 키질 수가 있다. 다음에 소개되는 예는 $f_i(y)$ 의 분포가 S_i 구간 안에 포함되는 경우로, 전송률이 낮을 때 이러한 경우가 발생한다^{10,11,16}. 이때 기존의 RQCS로의 투영은 S_i 밖으로 벗어나 있는 데이터가 없어서 의미가 없다.

예 5: 예를 들어 조인트 pdf가 각 $i=1, \dots, N$ 일 때 다음과 같다고 가정하자.

$$f_{x_i, y_i}(x, y) = \begin{cases} \frac{4}{\Delta_i^2} & (-\frac{\Delta_i}{2} < x - \hat{x}_i \leq \frac{\Delta_i}{2}, \\ |y - \hat{x}_i| \leq \frac{\Delta_i}{4}, & (x - \hat{x}_i)(y - \hat{x}_i) \geq 0 \\ 0 & \end{cases} \quad (39)$$

$\mu = \nu$ 일 때 $\delta_i(\mu, \nu)$ 값을 μ 에 대한 그래프로 그림 1에 도시하였으며 'Example 5'라고 표기하였다. μ 가 0에서 부터 증가함에 따라 $\delta_i(\mu, \nu)$ 값이 d_i 보다 낮은 값으로 내려가면서 $\mu = 1/2$ 에서 최소가 된다. 그런데 Y_i 의 분포가 $\mu > 1/2$ 에서는 없으므로 $\delta_i(\mu, \nu)$ 값의 변화도 없다. ■

V. 결 론

본 논문에서는 MSE를 최소화시킨다는 관점에서 QCS에의 투영을 이론적으로 고찰해 보았다. 여과 과정을 거친 데이터와 원 영상 간의 조인트 pdf에 대한 단순한 충분 조건을 제안하였으며, 이때 QCS에의 투영을 통해서 양자화 왜곡을 더 낮출 수 있다는 사실을 보였다. 또한 QCS에의 투영은 양자화 영역에서 벗어나 있는 여과된 데이터를 양자화 영역의 경계로 사상하는 것으로, 이렇게 양자화 영역을 기준으로 하는 것보다 양자화 영역에 포함되는 더 작은 협집합을 기준으로 하여 이 집합의 외부에 있는 여과된 데이터

를 협집합의 경계로 사상하는 경우가 왜곡을 더 줄일 수 있다는 사실을 보였다. 즉 MSE를 최소화시킨다는 관점에서 본다면 기존의 QCS에의 투영은 양자화 영역의 협집합보다 작은 협집합으로의 사상, 즉 NQCS에의 투영으로 바꾸어야 한다.

또한 본 논문에서 정립한 이론적 분석을 벡터 양자화된 데이터를 후처리하는 경우로 확장하면 임의의 벡터 양자화 영역으로의 난해한 투영보다는 NQCS의 투영 이론에 기초한 다면체(hypercube)로의 단순한 투영을 이용한 POCS 이론의 적용이 가능하리라.

감사의 글

본 논문의 완성을 위해 관심을 가지고 조언을 해주신 서울 대학교 전기 공학부의 이상우, 김대길 교수님, 그리고 한국통신 통신방안연구소 소장이신 이상훈 박사님께 감사드립니다.

참 고 문 헌

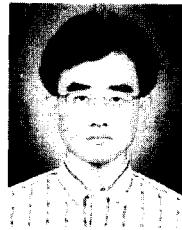
1. D. Pearson and M. Whybray, "Transform coding of images using interleaved blocks," *IEE Proceedings*, vol.131, no.8, pp.466-472, Aug. 1984.
2. P. Farrelle and A. Jain, "Recursive block-coding-a new approach to transform coding," *IEEE Trans. Commun.*, vol.COM-34, no.2, pp.161-179, Feb. 1986.
3. Y. Zhang, R. Pickholtz, and M. Loew, "A new approach to reduce the blocking effect of transform coding," *IEEE Trans. Commun.*, vol.COM-41, no. 2, pp.299-302, Feb. 1993.
4. B. Ramamurthi and A. Gersho, "Nonlinear space-variant postprocessing of block coded images," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol.ASSP-34, no.5, pp.1258-1267, Oct. 1986.
5. D. Youla and H. Webb, "Image restoration by the method of convex projections: Part I-theory," *IEEE Trans. Medical Imaging*, vol.MI-1, no.2, pp.81-94, Oct. 1982.
6. R. Rosenholtz and A. Zakhor, "Iterative procedures for reduction of blocking effects in transform image coding," *IEEE Trans. Circuits and Systems for Video Technology*, vol.2, no.1, pp.91-95, March

1992.

7. Y. Yang, N.P. Galatsanos, and A.K. Katsaggelos, "Regularized reconstruction to reduce blocking artifacts of block discrete cosine transform compressed images," *IEEE Trans. Circuits and Systems for Video Technology*, vol.3, no.6, pp.421-432, Dec. 1993.
8. Y. Yang, N.P. Galatsanos, and A.K. Katsaggelos, "Projection-based spatially adaptive reconstruction of block-transform compressed images," *IEEE Trans. Image Processing*, vol.IP-4, no.7, pp.896-908, July 1995.
9. S.J. Reeves and S.L. Eddins, "Comments on 'iterative procedures for reduction of blocking effects in transform image coding'," *IEEE Trans. Circuits and Systems for Video Technology*, vol.3, no.6, pp. 439-440, Dec. 1993.
10. S.H. Park and Y. Yashima, "Iterative reduction of blocking artifacts in transform coding by using a narrow quantization constraint," in *Proc. 1994 ITE Annual Convention, Japan, 1994*, pp.201-202.
11. 박섭형, 김동식, "A narrow quantization constraint for iterative postprocessing of transform-coded images," 대한전자공학회 하계 학술대회 논문집, 청주, 1995년 7월, pp.381-384.
12. S.H. Park, D.S. Kim, and J.S. Lee, "Projection onto the narrow vector quantization constraint set for postprocessing of vector quantized images," to be presented at *IEEE ICIP'96, Lausanne, Switzerland, Sep. 1996*.
13. 김동식, 박섭형, "Theory of projection onto the narrow quantization constraint set in postprocessing," 한국신호처리 학술대회 논문집, 전주, 1995년 9월, pp.203-206.
14. D.S. Kim and S.H. Park, "Projection onto the narrow quantization constraint set for postprocessing of scalar quantized images," in *Proc. SPIE VCIP'96 Symposium, Orlando, USA, March 1996*, pp.1473-1483.
15. S.H. Park and D.S. Kim, "Theory of projection onto narrow quantization constraint set and its application," submitted to *IEEE Trans. Image*

Processing.

16. S.P. Lloyd, "Least squares quantization in PCM," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol.IT-28, no.2, pp. 129-137, 1982.



김 동 식(Dong Sik Kim) 정회원

1963년 10월 16일생

1986년 2월:서울대학교 공과대학
제어계측공학과 (공학사)

1988년 2월:서울대학교 대학원 제
어계측공학과 (공학석사)

1994년 2월:서울대학교 대학원 제어계측공학과 (공학박사)

1994년 3월~1995년 3월:서울대학교 제어계측신기술
연구센터, 연구원

1995년 8월~현재:서울대학교 뉴미디어통신공동연구
소, 특별연구원

※주관심분야:신호 처리, 영상 코딩 및 후처리, ATM
네트워크, 무선 전송



박 섭 형(Scop Hyeong Park) 정회원

1961년 9월 21일생

1984년 2월:서울대학교 공과대학
제어계측공학과 (공학사)

1986년 2월:서울대학교 대학원 제
어계측공학과 (공학석사)

1990년 8월:서울대학교 대학원 제어계측공학과 (공학박사)

1986년 8월~1987년 2월:군복무 (석사장교)

1990년 9월~1992년 9월:생산기술연구원, 선임연구원

1993년 10월~1994년 9월:일본 NTT Human Interface
연구소 객원연구원

1992년 10월~현재:한국통신 연구개발본부 통신망연
구소 초고속망연구실 네트워크서비
스팀장

※주관심분야:신호 처리, 영상 통신, 패킷 비디오, ATM
망을 이용한 멀티미디어 서비스