

# 영점교차검출에 의한 다중레벨 PAM 신호의 타이밍 복원

正會員 金 廷 權\*, 李 容 煥\*

## Timing Recovery Based on Zero-crossing Detection for Multi-level PAM Signals

Jeong-Kwon Kim\*, Yong Hwan Lee\* *Regular Members*

### 요 약

디지털 수신기의 타이밍 복원 방법 중, 영점교차검출을 이용하는 다양한 접근 방법이 알려져 있다. Gardner는 BPSK/QPSK 신호에 적합한 타이밍 복원 방법을 제안하였으나 이를 다중레벨 PAM 신호에 적용할 경우 자체잡음의 증가 때문에 다중레벨 PAM 신호에 사용하기 부적합하다. 본 논문에서는 Gardner 방법을 다중레벨 PAM 신호에 적용하였을 경우 타이밍 지터의 증가로 인한 성능 저하 현상을 분석하고, 이를 해결하기 위한 타이밍 함수를 제안한다. 제안된 타이밍 함수는 다중레벨 PAM 신호가 천이할 때 영점을 교차하도록 주위의 신호를 사용하여 보정하였고 이에 의하여 타이밍 지터의 크기가 현저하게 감소되었다. 제안된 타이밍 함수의 이론적 성능 분석을 통해 타이밍 함수의 계수를 최적화하고, 전산 모의 실험에서 추가 대역폭(roll-off factor)과 SNR 등을 변화시키며 Gardner 방법과 제안된 방법의 성능을 비교한다.

### ABSTRACT

Gardner proposed an algorithm for timing recovery of BPSK/QPSK signals based on zero-crossing detection technique. When Gardner's method is applied to multi-level PAM signals, it suffers from increased timing jitter due to self noise. To alleviate this problem, an improved algorithm is proposed in this paper. The timing function is modified so that it crosses the zero point at the transition of PAM signals, that results in remarkably reduced timing jitter. The performance of the proposed algorithm is analyzed and compared to that of Gardner's one. Finally, analytical results are verified by computer simulation.

### I. 서 론

수신된 아날로그 신호로부터 디지털 신호열을 표현화하기 위하여, 디지털 수신기는 심벌의 천이 시점을 정확하게 추정하여야 한다. 효율적인 주파수 대역 사용을 위하여 별도의 pilot 신호를 사용하지 않고 수신된 신호로부터 직접 타이밍 정보를 얻는 것이 일반

\*서울대학교 공과대학 전기공학부  
論文番號: 97121-0331  
接受日字: 1997年 3月 31日

적이다. 기본적인 타이밍 복원 방법으로서, 제곱기와 같은 비선형 처리를 한 후 협대역 통과 필터를 통과시켜 타이밍 위상을 얻는 스펙트럼-선(spectral-line) 방법과 출력 신호의 평균제곱오차(MSE)를 최소화하거나 eye opening을 최대화하기 위하여 stochastic gradient 알고리즘을 사용하는 방법 등이 있다<sup>(1)</sup>. 이에 필요한 제곱기 같은 비선형 회로와 미분기는 구현하는데 비용이 크고 근사적으로 구현하였을 때 만족할 만한 성능을 얻을 수 없기 때문에, 반도체 기술의 발전에 힘입어 타이밍 복원을 디지털 방식으로 구현하는 것이 일반적이다.

디지털 타이밍 복원 방법은 데이터 신호를 판정하여 사용하는 여부에 따라, 심벌 판정에 근거한 방법(decision-directed: DD)과 그렇지 않은 방법(non decision-directed: NDD)으로 나누어진다. 대표적인 DD 방법으로 매 심벌마다 1개의 표본을 이용하는 Mueller & Müller 방법<sup>(2)</sup>이 있다. 이 방법은 이진 신호의 경우 구현이 간단하고 우수한 성능을 보이지만, 다중레벨 PAM 신호의 경우는 원하는 타이밍 함수를 얻기 위한 곱셈의 수가 너무 많아지고 심벌 판정을 이용하기 때문에 반송파 복원과 동화기와 연동하여 동작하여야 한다. NDD 방법으로는 초기 타이밍 복원 방법에서 사용하던 제곱기, 지연 후 송산회로, 또는 정류회로 등과 같은 비선형 회로와 여파기가 결합된 구조를 디지털 영역에서 동가적으로 구현하는 방법이 주로 사용되고 있다<sup>(3)</sup>. WDM(Wave Difference Method)과 같은 방법은 제곱기를 디지털 방식으로 구현하였고<sup>(4)</sup>, Gardner는 지연 후 송산회로를 이용하여 BPSK/QPSK 신호에 적합한 타이밍 복원 방법을 제안하였다<sup>(5)</sup>. 이 방법은 반송파 위상 에러와 무관하게 타이밍 에러 정보를 추정할 수 있기 때문에 반송파 복원과 독립적으로 동작시킬 수 있는 장점을 가진다. 그러나, 이 방법은 BPSK/QPSK 신호를 고려하여 제안된 영점교차검출 방법이기 때문에, 다중레벨 PAM이나 QAM과 같은 다중레벨 변조 방식의 경우는, 타이밍 지터의 증가로 인하여 Gardner 방법을 직접 적용하기 곤란하다.

BPSK 신호는 천이(transition)할 때 항상 영점을 교차하지만 다중 레벨 PAM 신호는 천이할 때 영점을 교차하지 않을 수 있기 때문에, Gardner 방법의 문제를 해결하기 위해서는 천이할 때 값을 주위의 데이터 샘플로 보상해 주어야 한다. Lankl과 Sebald는 천이

시점의 표본값을 주위 N 개 데이터의 표본값들을 이용한 타이밍 함수를 설계하고, 채널에서 더해지는 잡음이 없는 경우 그 성능을 분석하였다<sup>(6)</sup>. 그러나, 채널에서 더해지는 잡음이 수신기의 성능에 크게 영향을 미치기 때문에, 본 논문에서는 잡음이 있는 경우 타이밍 함수의 분산을 최소화하도록 천이 시점의 값을 보상한다. 이와 같이 천이 시점에서의 값을 주위의 값으로 보상하여 영점을 교차하도록 하면, 다중레벨 변조에 의한 자체잡음(self noise)의 증가를 해결할 뿐 아니라 채널에서 더해진 잡음에 의한 열잡음(thermal noise)도 감소시킬 수 있다. 특히, 성형 필터의 roll-off factor  $\alpha$ 가 크거나 신호 대 잡음비(SNR)가 높아서 자체잡음이 우세한 경우, 제안된 방법에 의한 성능 개선이 두드러지게 나타난다. 또한, 제안된 방법은 기본적으로 Gardner 방법을 기반으로 하기 때문에, 타이밍 지터가 반송파 위상 오차에 의해 영향을 받지 않고 심벌 구간마다 두 샘플을 이용하는 등 Gardner 방법의 장점을 그대로 갖게 된다.

II 장에서는 Gardner 방법의 동작과 다중레벨 PAM 신호에 적용할 경우 타이밍 지터 증가 현상을 설명한다. III 장에서는 다중레벨 PAM 신호를 위한 타이밍 함수를 제안하고 제안한 방법의 성능을 이론적으로 분석하여, 타이밍 지터의 감소와 타이밍 지터에 영향을 미치는 주요 변수에 대하여 설명한다. IV 장에서는 roll-off factor  $\alpha$ 와 SNR 등을 변화시키며 모의 실험을 진행하여 Gardner 방법과 제안된 방법의 성능을 비교한다.

## II. Gardner 타이밍 복원기와 문제점

본 논문에서는 그림 1과 같은 NDD 타이밍 복원 시스템을 고려한다. 여기서, 송신 필터  $h(t)$ 는 squared-root RC(raised cosine) 성형 필터이고 수신 필터  $h(-t)$ 는 송신 필터의 정합 필터(matched filter)라 가정하면, 송·수신 필터를 합한 전체 임펄스 응답은 \*

$$g(t) = h(t) * h(-t) = \frac{\sin(\pi t/T) \cos(\alpha \pi t/T)}{\pi t/T [1 - (2\alpha t/T)^2]} \quad (1)$$

와 같이 RC 필터로 주어진다. 반송파 복원에 의해 위상 오차가 완전히 제거되었다고 가정하면 수신 신호  $x(t)$ 의  $t = nT + \tau$ 에서 표본값인  $x_n$ 은 \*

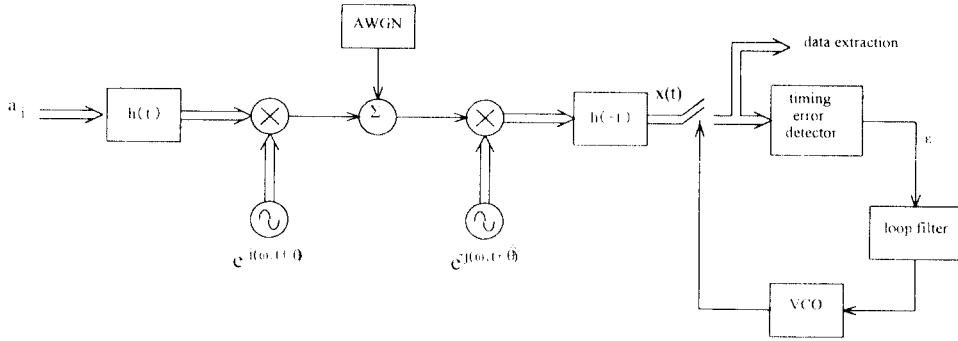


그림 1. 타이밍 복원기의 구조  
Fig. 1 Structure of timing recovery system

$$x_n = x(nT + \tau) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i g_{n-i} + v_n \quad (2)$$

와 같이, 데이터 신호  $a_i$ 가 RC 필터를 통과한 성분과 백색 잡음이 수신 필터  $h(-t)$ 를 통과한 후 표본값  $v_n$ 의 합으로 주어지게 된다. 여기서  $T$ 는 심볼 간격이며,  $g_{n-i} = g[(n-i)T + \tau]$ 이고,  $\alpha$ 는 추가 대역폭을 나타내는 상수로서 타이밍 지터에 큰 영향을 미친다. 타이밍 함수의 출력은 루프 필터를 통과한 후, VCO의 제어 전압으로 사용되어 타이밍 위상을 추적한다. Gardner는 VCO를 조절하는 타이밍 함수로서 영점교차검출기를 제안하였다<sup>(5)</sup>.

Gardner는 표본화 위상  $t = nT$ 에서  $\pm 1/4T$  떨어진 위상의 표본값을 각각 제공하여, 그 두 값의 차이를 타이밍 함수로 사용하였다. 타이밍 위상이 정확하다면, BPSK 신호의 경우 제공한 값이 표본화 위치를 중심으로 대칭이 되기 때문에, 정확한 타이밍 위상에서는 두 값의 차이가 영점을 지나게 된다. 타이밍 위상이 정확하지 않은 경우는 한쪽의 제공값은 증가하고 다른 쪽의 제공값은 감소하므로, 두 값의 차이를 이용하여 타이밍 오차의 크기를 추정할 수 있다. 그러나, 위와 같은 방법을 그대로 사용할 경우 몇 가지 문제점을 가지게 된다. 타이밍 함수를 구하기 위한 표본화 위치와 데이터 신호의 표본화 위치가 다르기 때문에, 한 심볼 당  $nT$ ,  $nT \pm 1/4T$  위치에서 3개의 표본값이 필요하다. 뿐만 아니라, 대역 제한 신호의 경우 자체잡음의 크기가 상당히 크기 때문에 타이밍 추적 성능이 좋지 않게 된다<sup>(5)</sup>.

이러한 문제를 해결하기 위하여, Gardner는 타이밍 함수의 위상을  $1/4T$ (위상  $90^\circ$ )만큼 지연시키는 방법으로 delay-difference 기법을 도입하였다. delay-difference를 통과시키면, 위상이 지연되어  $t = nT$ 와  $t = (n-1/2)T$ 에서의 값이 대칭이 된다. 따라서,  $t = nT$ 와  $t = (n-1/2)T$ 에서의 값을 제공하여 차이를 구하여 보면, Gardner가 제안한 타이밍 함수  $u_n$ 은 \*

$$u_n = x_{n-1/2}^* (x_n - x_{n-1}) = x'_{n-1/2} (x'_n - x'_{n-1}) + x^e_{n-1/2} (x^e_n - x^e_{n-1}) \quad (3)$$

같이 주어진다<sup>(5)</sup>. 여기서, \*는 복소수의 공액(conjugate)을 표시하며,  $x'_n$ 과  $x^e_n$ 은 각각  $x_n$ 의 동위상(in-phase), 직교위상(quadrature) 성분을 나타낸다. Gardner 방법은 반송파의 위상 오차와 무관하게 동작하므로, 본 논문에서는 (3)의 동위상 성분만을 고려하여 다음과 같은 타이밍 함수를 사용한다. \*

$$u_n = x_{n-1/2} (x_n - x_{n-1}) \quad (4)$$

여기서,  $x_{n-1/2} = x[(n-1/2)T + \tau]$ ,  $x_n = x(nT + \tau)$ 이고 본 논문에서 사용되는 모든 신호는 실수 신호이다.

식 (4)는 영점교차검출기로서 물리적인 해석이 가능하다. 만약 데이터가 -1에서 1이나 또는 1에서 -1로 천이를 하게 되면, 타이밍 위상이 정확한 경우  $x_{n-1/2}$ 은 그림 2-(c)와 같이 영점에 놓이게 된다. 타이밍 에러가 있는 경우,  $x_{n-1/2}$ 은 타이밍 에러의 크기에 비해

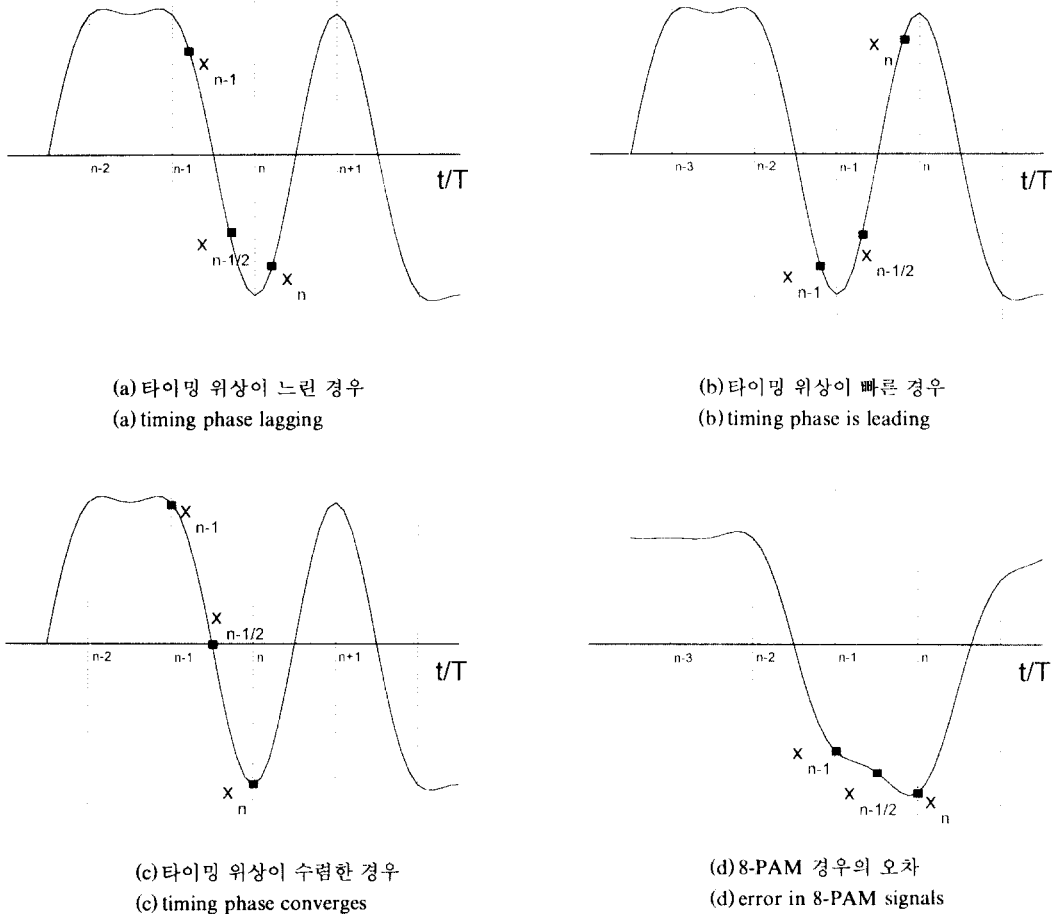


그림 2. Gardner의 영점교차 검출기의 동작과 예  
Fig. 2 Behavior of Gardner's zero-crossing detector and example

하는 영이 아닌 값을 가진다. 그러나, 천이의 방향이 증가와 감소 두 방향이 가능하므로,  $x_{n-1/2}$ 만으로 타이밍 에러에 관한 정보를 얻을 수 없다. 이러한 두 가지 가능한 방향을 구분하기 위하여, (4)는  $x_{n-1/2}$  전후의 데이터 표본값의 차이를 조사한다. 결과적으로, 데이터가 천이를 하게 되면 방향부호에 해당하는 두 데이터 표본값의 차이 ( $x_n - x_{n-1}$ )과 타이밍 에러의 크기에 해당하는  $x_{n-1/2}$ 과의 곱으로 타이밍 에러를 나타낸다. 천이가 없는 경우는 두 데이터 표본값의 차이가 영에 근접하게 되므로  $x_{n-1/2}$ 의 영향은 줄어든다. 그림 2-(a)는 타이밍 위상이 느린 경우로,  $u_n$ 의 부호가

양수가 되어 표본화 순간이 좀 더 빨라지고, 그림 2-(b)는 타이밍 위상이 빠른 경우로,  $u_n$ 의 부호가 음수가 되어 표본화 순간이 늦춰진다. 그림 2-(c)와 같이 타이밍 위상이 수렴하면,  $u_n$ 은 데이터의 천이에 관계 없이 영에 가까운 값을 가진다.

$x_{n-1/2}$ 값은 BPSK/QPSK 신호의 경우 두 데이터 표본값의 중간값인 영이 되지만, 다중레벨 PAM 신호의 경우에는 그림 2-(d)와 같이 영이 아닌 값을 가진다. 물론 전송하는 신호의 평균값이 영이기 때문에  $x_{n-1/2}$ 의 값은 평균적으로 영인 값을 가지지만, 매 표본화 순간마다 표본값  $x_{n-1/2}$ 은  $x_n$ 과  $x_{n-1}$ 의 중간값으로

영이 아닌 값을 가질 수 있기 때문에 타이밍 지터가 매우 커지는 문제점을 가지게 된다. 따라서, 다중레벨 PAM의 경우 자체잡음의 증가를 유발하는  $x_{n-1/2}$ 항을 수정하여 Gardner 방법에서 나타나는 분산 증가를 감소시킬 수 있다.

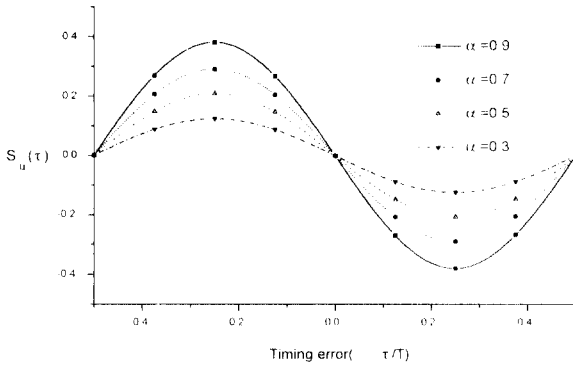


그림 3. Gardner 방법의 타이밍 함수 평균 출력

위에서 신호의 파형 관찰을 통하여 살펴 본 Gardner 방법의 문제점은 타이밍 함수  $u_n(t)$ 의 확률적인 특성으로부터 정량적으로 분석될 수 있다. 타이밍 함수 값은 NCO(Number Controlled Oscillator) 또는 VCO에 입력이 되어 표본화 순간을 정확하게 조정하는 폐루프(feedback tracking loop)를 구성하기 때문에, 타이밍 함수의 출력은 평균적으로 정확한 타이밍 위상에 안정된 수렴점을 가져야 한다. 전송 신호  $a_n$ 이 i.i.d.(independent identically distributed)이고, 표본화된 잡음 신호  $v_n$ 은 백색 가우시안 잡음으로서  $a_n$ 과 비상관화되었다고 가정하면, Gardner가 제안한 타이밍 함수  $u_n(t)$ 의 평균  $S_u(t)$ 는 \*

$$\begin{aligned}
 S_u(t) &= E\{u_n(t)\}/E\{a^2\} \\
 &= E\{(\sum_i a_i g_{n-1/2-i} + v_{n-1/2}) \\
 &\quad (\sum_j a_j g_{n-j} + v_n - \sum_i a_i g_{n-1-i} + v_{n-1})\}/E\{a^2\} \\
 &= \sum_m g_{m-1/2}(t) [g_m(t) - g_{m-1}(t)] \quad (5)
 \end{aligned}$$

와 같이 주어지고, 타이밍 에러  $\tau$ 에 대하여 그림 3과

같은 곡선을 나타내고  $\tau=0$ 인 점으로 수렴한다.  $\alpha$  값의 변화에 따른  $S_u(t)$ 의 특성은 그림 3에서 보인 바와 같이,  $\alpha$ 가 클 때는 원점에서의 기울기가 크기 때문에 수렴 속도가 매우 빠르지만,  $\alpha$ 가 작은 경우는 타이밍 함수의 출력값이 작기 때문에 수렴 속도가 늦을 뿐 아니라 타이밍 검출기의 안정성도 문제가 된다<sup>(2)</sup>. 따라서, Gardner 방법은  $\alpha > 0.4$  정도인 비교적 큰 추가 대역폭을 가지는 신호에 적합하다.

일반적인 타이밍 오차에 대하여 타이밍 함수의 분산을 계산하는 것은 매우 복잡하지만, 타이밍 위상이 수렴한 후는 Nyquist 조건에 의해  $t=nT$ 에서  $g_n$  값이 소거되기 때문에 쉽게 계산할 수 있다. 타이밍 함수  $u_n(t)$ 의 수렴 후 분산  $\sigma_u^2$ 은 다음과 같이 표시될 수 있다<sup>(7), (8)</sup>. \*

$$\begin{aligned}
 \sigma_u^2/E^2\{a^2\} &= E\{x_{n-1/2}x_{n-1/2}(x_n-x_{n-1})(x_n-x_{n-1})\}/E^2\{a^2\} \\
 &= 2 \left\{ \sum_n g_{n-1/2}^2 - 2g_{1/2}^2 + g_{1/2}^2 \left[ \frac{E\{a^4\}}{E\{a^2\}} - 1 \right] \right\} \\
 &\quad + 2 \frac{\sigma^2}{E\{a^2\}} \left( 1 + \sum_n g_{n-1/2}^2 \right) + 2 \left[ \frac{\sigma^2}{E\{a^2\}} \right]^2 \quad (6)
 \end{aligned}$$

여기서  $\sigma^2$ 은 표본화된 잡음  $v_n$ 의 분산값이고,  $E\{a^2\}$ 과  $E\{a^4\}$ 은 각각 데이터 신호  $a_n$ 의 2차, 4차 모멘트이다. 위 식에서 첫째 항은 대역 제한 신호가 인접한 신호와의 상관성 때문에 생기는 자체잡음이고 둘째, 셋째 항은 채널에서 더해진 백색 잡음에 의해 생기는 열잡음이다. 열잡음은 SNR에 의하여 영향을 받고 자체잡음은 변조 방식에 의하여 영향을 받는다. 참고문헌 [7]에서는 이진 신호만을 고려했기 때문에 데이터 신호의 에너지에 관한 항을 생략했으나, 다중레벨 PAM

표 1. 변조 방식에 따른 moment 값과  $E\{a^4\}/E^2\{a^2\}$   
Table 1. Moment and  $E\{a^4\}/E^2\{a^2\}$  according to the modulation

moment level	$E\{a^2\}$	$E\{a^4\}$	$E\{a^4\}/E^2\{a^2\}$
2-PAM	1	1	1.00
4-PAM	5	41	1.64
8-PAM	21	777	1.76
$\infty$ -PAM	$\infty$	$\infty$	1.80

신호의 경우는 데이터 신호의 에너지와 관계된 항이 포함되는 것을 알 수 있다.

자체잡음 성분 중에서  $E\{a^4\}/E^2\{a^2\}$  항은 Cauchy-Schwarz 부등식에 의해 항상 1보다 큰 값을 가지며, 표 1에서 볼 수 있듯이 다중레벨 PAM 신호의 경우 레벨의 수가 증가할수록 큰 값을 가지게 된다. 따라서, 다중레벨 PAM 방식에 Gardner 방법을 적용할 경우,  $E\{a^4\}/E^2\{a^2\}$ 을 포함하고 있는 자체잡음 항이 크게 증가한다. 또한,  $E\{a^4\}/E^2\{a^2\}$ 에 곱해지는 항  $g_{1/2}^2$ 은 부엽 쪽의 다른  $g_{n-1/2}^2 (n \neq 0, 1)$  값에 비해 상대적으로 매우 크기 때문에, 자체잡음은 더욱 현저하게 증가한다. BPSK인 경우는  $E\{a^4\}/E^2\{a^2\}=1$ 이 되므로, 자체잡음이  $2(\sum_n g_{n-1/2}^2 - 2g_{1/2}^2)$ 로 줄어 들어, 주엽에 있는 두 개의 가장 큰 값  $g_{1/2}^2$ 와  $g_{-1/2}^2$ 이 소거되기 때문에 자체잡음이 작은 값을 가진다. 따라서, BPSK/QPSK 신호의 경우는 타이밍 지터의 크기가 심각한 문제가 되지 않지만, 다중레벨 PAM의 경우는 자체잡음이 크게 증가한다.

표 2.  $\alpha$  값에 따른 주엽, 부엽 에너지  
Table 2. Mainlobe and sidelobe Energies according to  $\alpha$

$\alpha$	$g_{1/2}^2$	$\sum_n g_{n-1/2}^2 - 2g_{1/2}^2$	$\frac{g_{1/2}^2}{\sum_n g_{n-1/2}^2 - 2g_{1/2}^2}$
0.0	0.41	0.1798	2.25
0.1	0.40	0.1432	2.82
0.3	0.39	0.0729	5.33
0.5	0.36	0.0295	12.21
0.7	0.32	0.0077	41.75
0.9	0.27	0.0005	523.29
1.0	0.25	0.0000	$\infty$

자체잡음만을 고려할 경우 BPSK에서는 잡음의 크기는  $\sum_n g_{n-1/2}^2 - 2g_{1/2}^2$ 에 비례하고 다중레벨 PAM에서는 잡음의 크기가  $\sum_n g_{n-1/2}^2 - 2g_{1/2}^2 + g_{1/2}^2 [E\{a^4\}/E^2\{a^2\} - 1]$ 에 비례한다. 따라서 다중레벨 PAM에 의한 타이밍 지터의 증가량은  $g_{1/2}^2 [E\{a^4\}/E^2\{a^2\} - 1]$ 이 되고, BPSK의 타이밍 지터에 대한 다중레벨 PAM에 의한 증가 비율은  $g_{1/2}^2 / (\sum_n g_{n-1/2}^2 - 2g_{1/2}^2)$ 에 비례하게

된다. 여기서  $g_{1/2}^2$ 은 성형 필터의 주엽의 에너지에 해당하고  $\sum_n g_{n-1/2}^2 - 2g_{1/2}^2$ 는 부엽의 에너지에 해당하므로, 타이밍 지터의 증가 비율은 주엽의 에너지와 부엽의 에너지의 비율에 비례한다. 표 2는  $\alpha$  값의 변화에 따른  $g_{1/2}^2$ 에 대한  $\sum_n g_{n-1/2}^2 - 2g_{1/2}^2$ 의 비율값을 보여주고 있다.  $\alpha$ 가 커질수록 시간 축에서 주엽 쪽에 에너지가 집중이 되기 때문에, 다중레벨 PAM 신호에 의한 자체잡음의 증가비율이 매우 커지게 된다. Gardner 방법은 추가 대역폭이 비교적 큰 신호에 주로 사용되기 때문에, 이러한 자체잡음의 문제를 해결하기 위한 개선책이 필요하다.

### III. 다중레벨 PAM 신호에 적합한 타이밍 함수

그림 2에서 예시한 바와 같이 이진 신호는 데이터 신호가 천이하면서 영점을 교차하는 반면, 다중레벨 PAM 신호의 경우 영이 아닌 두 데이터 신호의 중간 값을 지나기 때문에 Gardner가 제안한 타이밍 함수의 지터가 커지게 된다. 따라서, 데이터 신호가 천이할 때 타이밍 함수가 영점을 교차하도록,  $x_{n-1/2}$ 의 값을 주위의 표본값  $x_n$ 으로부터 추정하여 보상하여야 한다.<sup>(6)</sup> Lanki과 Sebald는 전후 N 개의 표본값을 이용하여 추정하였으나, 시스템을 간단하게 구현하고 채널에서 더해지는 잡음에 의한 영향을 살펴보기 위하여 본 논문에서는 다음과 같이 전 후 두 개의 표본값을 이용한 타이밍 함수  $u_n(\tau)$ 를 제안한다.\*

$$u_n(\tau) = [x_{n-1/2} - c(x_n + x_{n-1})] \cdot (x_n - x_{n-1}) \quad (7)$$

여기서,  $c$ 는 수렴 후 정상상태에서 타이밍 함수의 분산이 최소화되도록 정해져야 할 상수이다.

제안된 타이밍 함수  $u_n(\tau)$ 는 Gardner가 제안한 타이밍 함수  $u_n(\tau)$ 와  $x_n^2$ 과  $x_{n-1}^2$ 의 차이의 합으로 주어진다. 수신 신호의 표본값  $x_n$ 은 cyclo-stationary하기 때문에, T 간격 떨어진 표본화 순간에 관계없이 일정한 2차 모멘트를 가진다. 따라서, 제안한 타이밍 함수의 평균값  $S_u(\tau)$ 는\*

$$\begin{aligned} S_u(\tau) &= E\{u_n(\tau)\}/E\{a^2\} \\ &= E\{u_n(\tau)\}/E\{a^2\} - c \cdot [E\{x_n^2\} - E\{x_{n-1}^2\}]/E\{a^2\} \\ &= S_u(\tau) \end{aligned} \quad (8)$$

가 되어, Gardner가 제안한 타이밍 함수의 평균값과 같게 된다.

$v_n(\tau)$ 는 (8)과 같이 평균적으로는  $u_n(\tau)$ 와 같은 곳에 수렴하지만, 상수  $c$ 를 최적화함으로써 다중레벨에 의한 왜곡을 보상하여  $v_n(\tau)$ 의 분산을 최소로 만들 수 있다. 참고 문헌 [6]에서는 채널에 의한 잡음이 없는 경우  $x_{n-1/2}$ 과 그 추정 값의 평균제곱오차(MSE)를 최소화하여 상수  $c$ 를 결정하였으나, 본 논문에서는 타이밍 함수  $v_n(\tau)$ 의 분산을 최소화하도록 상수  $c$ 를 결정한다. 실제 채널에서는 잡음에 의한 왜곡이 타이밍 함수의 성능을 크게 좌우하므로, 잡음을 고려한 분석이 필수적이다. 제안된 타이밍 함수  $v_n(\tau)$ 의 수렴 후 정상 상태에서 분산  $\sigma_v^2$ 은 \*

$$\begin{aligned} \sigma_v^2 &= E\{[x_n x_{n-1/2} - x_{n-1} x_{n-1/2} - c(x_n^2 + x_{n-1}^2)]^2\} \\ &= \sigma_u^2 + 2c^2 E\{x_n^4\} + 2cE\{x_n x_{n-1} x_{n-1} x_{n-1/2}\} \\ &\quad + 2cE\{x_n x_n x_{n-1} x_{n-1/2}\} - 2cE\{x_n x_n x_n x_{n-1/2}\} \\ &\quad - 2cE\{x_{n-1} x_{n-1} x_{n-1} x_{n-1/2}\} - 2c^2 E\{x_n x_n x_{n-1} x_{n-1}\} \end{aligned} \quad (9)$$

가 되어 상수  $c$ 의 2차 함수로 주어지고 극점을 가진다. 앞에서 가정한 바와 같이,  $a_n$ 이 i.i.d.이고  $v_n$ 이  $a_n$ 과 비상관화된 백색 가우시안 잡음이며,  $g(t)$ 가 Nyquist 조건을 만족한다고 가정하면, 참고문헌 [7]의 계산방법과 Isserlis 공식<sup>(8)</sup>을 이용하여 제안된 타이밍 함수의 분산을 다음과 같이 구할 수 있다. \*

$$\begin{aligned} \sigma_v^2 &= 2[E\{a^4\} - E^2\{a^2\} + 4E\{a^2\}(\sigma^2 + 2\sigma^4)](c - g_{1/2})^2 \\ &\quad + 2E^2\{a^2\}(\sum_n g_{n-1/2}^2 - 2g_{1/2}^2) \\ &\quad + 2\sigma^2 E\{a^2\}(1 + \sum_n g_{n-1/2}^2 - 4g_{1/2}^2) + 2\sigma^4(1 - 2g_{1/2}^2) \end{aligned} \quad (10)$$

여기서,  $\sigma_v^2$ 은  $c$ 의 2차 함수이고 이차항의 계수는 Cauchy-Schwarz 부등식에 의해 항상 양의 값을 가지게 되기 때문에,  $\sigma_v^2$ 을 최소화하는 상수  $c$ 가 존재한다. 즉,  $c = g_{1/2}$  일 때 제안한 타이밍 함수  $v_n$ 의 분산  $\sigma_v^2$ 이 최소화되며, 이 때 최소값은 다음과 같이 주어진다.

$$\sigma_v^2 / E^2\{a^2\} = 2(\sum_n g_{n-1/2}^2 - 2g_{1/2}^2)$$

$$\begin{aligned} &+ 2 \frac{a^2}{E\{a^2\}} (1 + \sum_n g_{n-1/2}^2 - 4g_{1/2}^2) \\ &+ 2 \frac{a^4}{E^2\{a^2\}} (1 - 2g_{1/2}^2) \end{aligned} \quad (11)$$

식 (6)와 (11)을 비교하면, 다중레벨 PAM 신호의 경우 데이터 신호가 찬이할 때 영점을 교차하도록 수정하였기 때문에, 다중레벨 PAM에 의한 자체잡음의 증가가 없어지게 됨을 알 수 있다. 또한, 열잡음에 해당하는 둘째, 셋째 항 역시 기존의 값에서 각각  $\sigma^2/E\{a^2\}$ 의  $4g_{1/2}^2$ ,  $2g_{1/2}^2$  배 만큼 감소된다. BPSK 신호에 대하여 비교하였을 경우,  $E\{a^4\}/E^2\{a^2\}$ 의 값이 '1'이 되어 제안된 방법과 Gardner 방법의 자체잡음의 값이 같고 열잡음에서만 감소하기 때문에 성능 개선이 두드러지지 않는다.

여기서 주목할 것은 자체잡음의 감소 비율은 열잡음의 감소 비율 보다 매우 크다는 점이다. 자체잡음은 주엽에 있는 두 개의 큰 값  $g_{1/2}^2$ 과  $g_{1/2}^2$ 이 소거되기 때문에 Gardner 방법에 비해 크게 감소한다. 특히  $\alpha$ 가 크면 주엽 쪽에 에너지가 집중이 되기 때문에 그 감소비율이 더욱 커진다. 감소 비율은, 대략 부엽의 에너지에 대한 주엽의 에너지의 비율의 역수 값과 비슷하고, 표 2에서 볼 수 있듯이,  $\alpha = 0$ 인 경우 0.4,  $\alpha = 0.9$ 인 경우 0.002 정도의 값을 가진다. 한편, 열잡음과 관련된 항  $(1 + \sum_n g_{n-1/2}^2 - 4g_{1/2}^2)$ 과  $(1 - 2g_{1/2}^2)$ 에서는 고정된 상수 '1'이 감소량  $g_{1/2}^2$ 에 비해 상대적으로 크기 때문에, 식 (11)의 둘째, 셋째 항인 열잡음은 자체잡음에 비해 감소 비율이 작다.

그림 4는  $E_b/N_0$ (단측 대역 잡음 에너지 밀도에 대한 비트당 에너지의 비)가 15 dB인 8-PAM 신호에 대하여 Gardner 방법과 제안한 방법의 분산을 비교한 것이다. 자체잡음의 현저한 변화를 보이기 위하여 높은  $E_b/N_0$ 에 대하여 결과를 제시하였다.  $\alpha$ 가 클수록 자체잡음의 감소가 두드러져,  $\alpha = 0.3$ 인 경우는 약 5 dB,  $\alpha = 0.9$ 인 경우는 약 20 dB 정도 분산이 감소한다. 타이밍 에러가 있는 경우는 타이밍 함수 분산의 계산이 매우 복잡하기 때문에, 모의 실험을 통하여 얻어낸 타이밍 함수의 분산값을 그림 4에 나타내었다. 제안된 방법은 타이밍 위상이 수렴하지 않은 경우도 Gardner 방법에 비해 작은 타이밍 지터를 가진다. 그러나, 그림 4의 BPSK의 경우에는 앞에서 언급한 바와 같이 제안

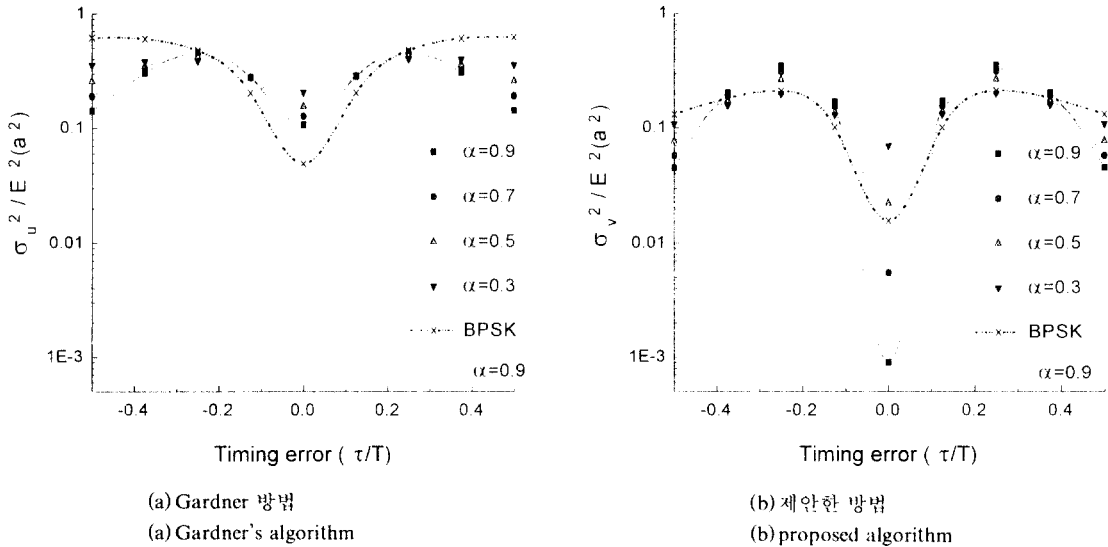


그림 4. 타이밍 에러에 대한 타이밍 함수의 분산( $E_b/N_0=15\text{dB}$ )  
 Fig. 4 Variance of timing function vs timing error ( $E_b/N_0=15\text{dB}$ )

된 자체잡음이 감소하지 않고 열잡음만 약간 감소하기 때문에 높은  $E_b/N_0$ 에서는 성능의 개선이 크지 않음을 알 수 있다.

#### IV. 타이밍 함수의 성능 평가

제안된 방법의 성능을 분석하기 위하여, 타이밍 지터의 크기에 영향을 주는 변수 중에서 추가 대역폭의 크기를 나타내는  $\alpha$ 와 SNR을 변화시키며 Gardner 방법의 성능과 비교하였다. 실험의 파라미터로서 SNR 대신  $E_b/N_0$ 를 사용하였고 표본화된 잡음의 분산  $\sigma^2$ 과  $E_b/N_0$ 와의 관계는 \*

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{E\{\alpha^2\}g^2(0)}{2\sigma^2n_b} \quad (12)$$

과 같다<sup>(9)</sup>. 여기서, RC 필터의 경우  $g(0)=1$ 이고,  $n_b$ 는 데이터 심벌 당 전송되는 비트 수를 나타내며, 8-PAM 신호의 경우  $n_b=3$ 이다. 그리고, 보통의  $\alpha$ 값인 경우 주엽 쪽에 에너지가 집중이 되고 부엽으로 갈수록 급격히 감소하기 때문에, 모의 실험에서는 송·수신 필터를 4 배의 심벌구간( $4T$ )으로 제한하고 과표본화(oversampling)하여 FIR 필터 구조로 구현한다.

수렴특성을 고려하지 않고, 단지 타이밍 지터의 크기만 구하려면 개-루프(open-loop)로 실험하는 것도 가능하지만, 타이밍 복원기의 수렴 여부를 확인하기 위하여 VCO에 타이밍 함수의 출력을 입력시킨 폐쇄 환루프를 구성한다. 이러한 구조에서  $\alpha$ 와  $E_b/N_0$ 를 변화시키면 타이밍 위상의 수렴속도와 시스템의 안정성이 바뀌게 되므로, VCO의 이득값을 적절하게 조정해야 한다. 잡음의 분산과 S-곡선의 원점에서의 기울기가 수렴속도에 미치는 영향과, 시스템의 안정성을 보장하는 VCO 이득값의 범위에 대하여 Mueller and Miler에 의해 분석되었고 이를 기반으로 VCO의 이득값을 정하였다<sup>(2)</sup>.

그림 5는  $E_b/N_0$ 가 각각 0.9 dB인 경우에 대해,  $\alpha$ 의 변화에 따른 Gardner 방법과 제안된 방법의 수렴 후 타이밍 지터를 비교하고 있다.  $E_b/N_0$ 가 0 dB인 경우는 백색 잡음의 에너지가 크기 때문에 감소 비율이 작은 열잡음이 우세하게 되어, 타이밍 지터의 분산은  $\alpha$ 의 변화에 따른 영향을 작게 받는다. 실험 데이터를 살펴 보면, 제안된 방법의 타이밍 지터가 Gardner 방법에 비해 약 6~8 dB 정도 감소한다.  $E_b/N_0$ 가 9 dB인 경우는 데이터 신호가 잡음에 비해 크기 때문에, 제안된 타이밍 함수의 분산은  $\alpha$ 가 커질수록 자체잡음이



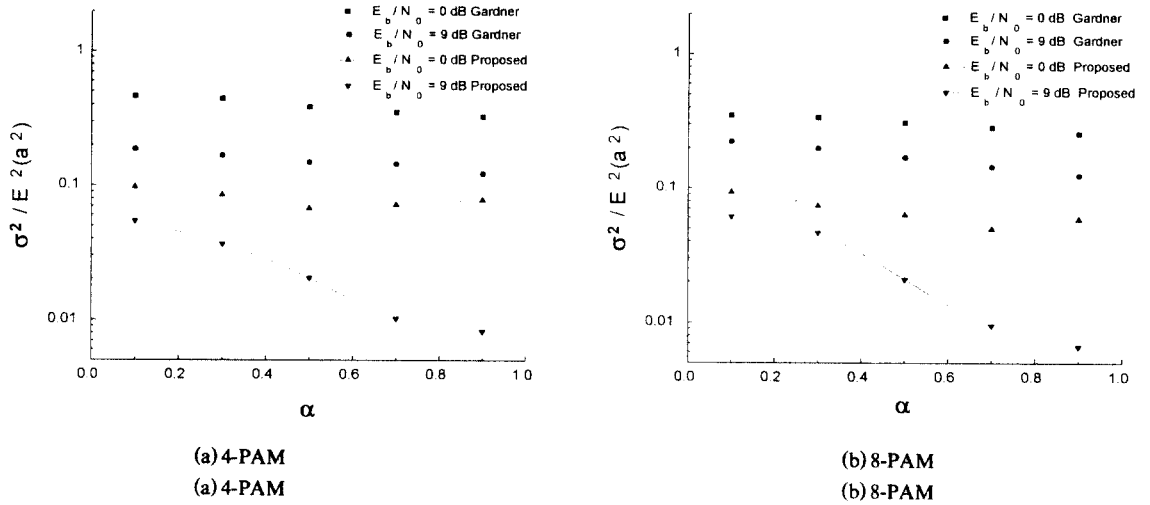


그림 5.  $\alpha$  값에 따른 타이밍 함수의 분산  
Fig. 5 Variance of timing function according to  $\alpha$

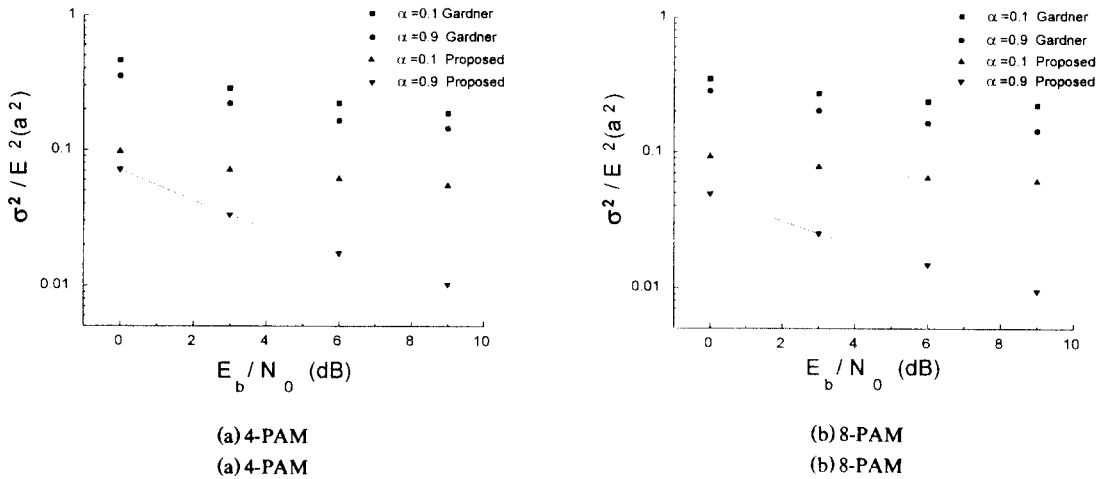


그림 6.  $E_b/N_0$ 에 따른 타이밍 함수의 분산  
Fig. 6 Variance of timing function according to  $E_b/N_0$

급격히 감소하여  $\alpha > 0.4$ 인 경우 감소효과가 뚜렷이 나타난다. 4-PAM의 경우  $\alpha = 0.9$ 에서 제안된 방법이 Gardner 방법에 비해 12 dB 감소한다. 8-PAM의 경우에  $E\{\alpha^4\}/E^2\{\alpha^2\}$ 이 더 크기 때문에 분산의 감소율이 약간 더 크다.

그림 6은 각각  $\alpha$ 가 0.1, 0.9인 경우에 대해  $E_b/N_0$ 를 변화시키며, Gardner 방법과 제안한 방법의 수렴 후 타이밍 지터를 비교하고 있다.  $\alpha = 0.9$ 인 경우는 주엽

의 에너지가 매우 크기 때문에,  $E_b/N_0$ 가 커져 자체잡음이 우세할수록 제안된 방법의 분산 감소 비율이 매우 커짐을 알 수 있다. 4-PAM의 경우, 제안된 방법의 타이밍 지터가 Gardner 방법에 비해  $E_b/N_0 = 1$  dB인 경우 7 dB,  $E_b/N_0 = 9$  dB인 경우는 12 dB 정도 감소한다. 그러나,  $\alpha = 0.1$ 인 경우는 부엽의 에너지가 상대적으로 커져서 타이밍 지터의 감소 비율이 작아지기 때문에, 제안된 방법이 Gardner 방법에 비해 5~7 dB 정

도 분산이 감소한다.

이상에서 살펴본 바와 같이, 제안한 타이밍 함수는 다중레벨 PAM에 의해 증가된 타이밍 지터를 감소시키며, 타이밍 지터의 감소 비율은 추가 대역폭과 SNR에 의해 영향을 받는다. 추가 대역폭에 따라 주엽의 에너지와 부엽의 에너지의 비율이 변화하기 때문에, 타이밍 지터는  $\alpha$ 의 값에 영향을 받고  $\alpha$ 가 클수록 제안된 방법이 더욱 우수한 성능을 보인다. 자체잡음의 감소 비율이 열잡음에 비해 매우 크기 때문에, SNR이 커서 자체잡음이 우세한 경우 제안된 방법의 타이밍 지터 감소 비율이 더욱 크게 된다. 따라서, 제안된 타이밍 함수는  $\alpha$ 가 크고 SNR이 큰 경우 다중레벨 PAM 신호에 대하여 효율적으로 적용될 수 있다.

### V. 결 론

본 논문에서는, Gardner가 제안한 영점교차검출 방식 타이밍 복원기를 다중 레벨 PAM 신호에 적용하였을 때 성능 열화를 막기 위하여, Gardner 방법을 수정하여 영점교차검출 타이밍 복원 방법을 제안하였다. Gardner 방법과 제안한 방법에서, 타이밍 함수의 수렴 후 분산의 크기를 이론적으로 분석하여, 다중레벨 변조 방식이 타이밍 지터에 미치는 영향을 검토하였다. 다중레벨 PAM 신호에 Gardner 방법을 사용할 경우, 레벨의 수가 많을수록 타이밍 함수의 자체잡음이 증가하여 성능이 저하되기 때문에, 이를 해결하기 위한 타이밍 함수를 제안하고 수렴 후 타이밍 함수의 분산을 최소화하도록 타이밍 함수를 최적화하였다. 또한, 타이밍 함수의 분산을 자체잡음과 열잡음으로 구분하여 이에 영향을 끼치는 요인을 살펴보고 모의 실험을 통해 제안된 타이밍 함수의 성능을 검증하였다.

### 참 고 문 헌

1. E. A. Lee and D. G. Messerschmitt, *Digital Communication, 2nd Ed.*, Kluwer Academic 1994.
2. K. H. Mueller and M. M. Ller, "Timing recovery in digital synchronous data receivers," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-14, pp. 516-530, May 1976.
3. L. E. Franks, "Carrier and bit synchronization in data communication," *IEEE Trans. Commun.*, vol.

COM-28, pp. 1107-1120, Aug. 1980.

4. T. Suzuki, H. Takatori, M. Ogawa, and K. Tomooka, "Line equalizer for a digital subscriber loop employing switched capacitor technology," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-30, pp. 2074-2082, Sept. 1982.
5. F. M. Gardner, "A BPSK/QPSK timing-error detector for sampled receivers," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-3, No. 5, pp. 423-429, May 1986.
6. B. Lankl and G. Sebald, "Jitter-reduced digital timing recovery for multilevel PAM and QAM systems," *Proceedings of ICC '93*, vol. 2, pp. 804-810, May 1993.
7. W. G. Cowly and L. P. Sabel, "The performance of two symbol timing recovery algorithms for PSK demodulators," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 42, No. 6, pp. 2345-2355, June 1994.
8. W. B. Davenport, *Probability and Random Process*, McGraw-Hill, 1970.
9. J. G. Proakis, *Digital Communications, 2nd Ed.*, McGraw-Hill, 1989.



金 廷 權(Jeong-Kwon Kim) 정희원  
1995년 2월: 서울대학교 전자공학과 학사  
1997년 2월: 서울대학교 전자공학과 석사  
1997년 3월~현재: 서울대학교 전기공학부 박사과정 재학 중

※주관심분야: 통신이론, 타이밍복원, 영상통신



李 容 煥(Yong Hwan Lee) 정희원  
1977년 2월: 서울대학교 전기공학과 학사  
1980년 2월: 한국과학기술원 전기공학과 석사  
1989년 5월: Univ. of Massachusetts, Amherst, 전기공학과 박사

1980년 3월~1985년 2월: 국방과학연구소 선임연구원  
1989년 4월~1994년 2월: Motorola, Inc. 책임연구원  
1994년 3월~현재: 서울대학교 전기공학부 교수  
※주관심분야: 유/무선 전송기법, 비선형 신호처리, 검출 및 추정