

# 기저의 길이 $L=2M$ 인 경우 무손실 행렬의 분해를 이용한 고속 $M$ -대역 이산 웨이브렛 변환 알고리즘

正會員 권 상 근\*, 이 동 식\*\*

A fast  $M$ -band discrete wavelet transform algorithm using factorization of lossless matrix when the length of bases equals to  $2M$

Sang-Keun Kwon\*, Dong-Sik Lee\*\* *Regular Members*

요 약

무손실 행렬의 분해를 이용하여 기저의 길이  $L=2M$ 인 경우에 대하여 임의의  $M$ -대역 고속 이산 웨이브렛 변환 알고리즘을 제안하였다. 계산 복잡도에서 직접 필터링 방법을 사용하는 경우 곱셈수와 덧셈수는 각각  $(2M^2)$  및  $(2M^2-M)$ 인 반면, 제안한 방법을 사용하는 경우 연산수는 각각  $(M^2+M)$  및  $(M^2+2M-1)$ 으로 감소하게 된다. 특히 이산 웨이브렛 기저를 설계시 사용한 유니터리 행렬이 고속 알고리즘을 가진 경우 연산수는 더욱 감소하게 된다.

ABSTRACT

The fast implementation algorithm of  $M$ -band discrete wavelet transform is proposed using the factorization of lossless matrix when the length of discrete orthogonal wavelet bases equals to  $2M$ . In computational complexity when direct filtering method is employed, the number of multiplication and addition is  $(2M^2)$  and  $(2M^2-M)$ , respectively. But by proposed algorithm, it can be reduced to  $(M^2+M)$  and  $(M^2+2M-1)$ , respectively. And it is possible to reduce the computational complexity further when unitary matrix employed to design the discrete orthogonal wavelet basis has the fast algorithm.

\*금오공과대학교 전자통신공학과 부교수

\*\*프로칩스 연구소

論文番號:96399-1223

接受日字:1996年 12月 23日

### I. 서 론

웨이브렛 변환(wavelet transform: WT)은 지질 검사와 관련된 신호 처리 분야에서 연구가 시작되어, 80년대 말 Mallat[1]에 의해 이산 웨이브렛 변환(discrete wavelet transform: DWT)을 이용한 영상의 다해상도 분할(multiresolution decomposition) 기법 이론이 발표되고, Daubechies[2]에 의하여 유한길이를 가지는(compactly support) 이산 직교 웨이브렛 기저(discrete orthogonal wavelet bases: DOWB)를 설계하는 방법이 알려지면서 DWT는 영상의 에지(edge) 검출, 영상 데이터 압축 및 신호처리 분야에 널리 응용되기 시작하였다.

이러한 DOWB의 설계 방법은 기존의 부대역 부호화(sub-band coding)에서 사용되는 무손실 시스템(lossless system)을 이용한 완전 재생(perfect reconstruction: PR) 필터 뱅크(filter banks)의 설계 방법과 밀접한 관계가 있다[4]. 즉 분해 필터 뱅크의 저역 통과 필터(low-pass filter: LPF)에 레규라리티(regularity) 조건 및 정규화 조건을 추가하면 무손실 시스템을 이용하여 임의의  $M$ -대역 DOWB의 설계가 가능하다[3, 5]. 그러나 이와 같은 방법으로 설계된 DOWB, 예를 들어 Daubechies[2]에 의해 설계된 길이  $L=nM$  ( $n$ 은 정수) DOWB는 대칭성 등이 없어 구현에 어려움이 많다.

따라서 이러한 방법으로 설계된  $M$ -대역 DOWB를 실제의 응용 분야에 보다 쉽게 적용하기 위하여서는 이의 고속 구현 방법이 필요하게 된다. 이를 위하여 [10]에서는 DOWB의 길이  $L=2M$ 인 경우에 대하여 무손실 행렬을 직접 분해하는 방법을 이용하여 고속으로 구현하는 방법을 제시하였다.

본 논문에서는 [10]의 방법과는 달리 DOWB의 설계시 사용되는 무손실 행렬의 대칭성(symmetry)을 이용하여 이를 분해하는 방법으로 고속으로  $M$ -대역 DWT를 구현하는 방법을 제시하였다.

DOWB의 길이  $L=2M$ 인 경우 이를 이용하여 원신호를 임의의  $M$ -대역 신호로 분해하기 위하여 기존의 직접 필터링 방법에서는  $(2M^2)$  및  $(2M^2-M)$ 의 곱셈과 덧셈이 필요하게 된다. 이에 비해 본 논문에서 제안된 방법은  $(M^2+M)$  및  $(M^2+2M-1)$ 의 곱셈수 및 덧셈수를 가지게 된다. 특히  $M=2^n$  ( $n$ 은 정수)인 경

우,  $M$ -대역 DOWB의 설계시 사용된 유니터리 행렬(unitary matrix)이 WHT 및 DCT 등과 같이 고속 구현 방법이 있는 경우 연산수는 더욱 감소하게 되며, 계산량 측면에서는 [10]의 방법과 거의 같은 성능을 가진다.

### II. QMF 뱅크를 이용한 $M$ -대역 DOWB의 설계

$\underline{H}(z)=[H_0(z), H_1(z), \dots, H_{M-1}(z)]^T$  및  $\underline{F}(z)$ 를 그림 1과 같은  $M$ -대역 QMF(quadrature mirror filter) 뱅크 시스템의 분해 및 합성 필터 뱅크라 하자. 이와 같은 시스템이 PR 시스템이 되기 위해서는  $\underline{H}(z)$  및  $\underline{F}(z)$ 의  $M$ -성분 다위상 분해 행렬( $M$ -component polyphase decomposition matrix)  $\underline{E}(z)$  및  $\underline{R}(z)$ 는 식(1)을 만족해야 한다[7].

$$\underline{R}(z) \underline{E}(z) = c \underline{I} \tag{1}$$

여기서  $c$ 는 상수이고,  $\underline{I}$ 는 단위 행렬(identity matrix)이다.

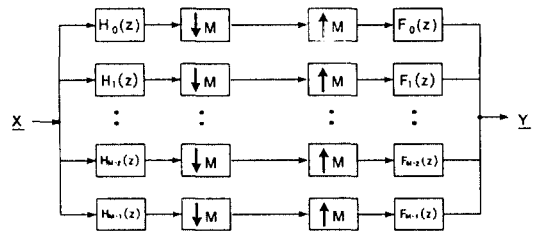


그림 1.  $M$ -대역 QMF 뱅크의 블록도  
Fig. 1. Block diagram of  $M$ -band QMF bank

만일  $\tilde{\underline{E}}(z)$ 를  $\underline{E}(z)$ 의 전치(transpose) 및 공액(conjugate)이라 할 때,  $\underline{R}(z)=\tilde{\underline{E}}(z)$ 를 만족하면 주어진 시스템은 PR 시스템이 된다.

Vaidynathan은 FIR(finite impulse response) 필터의 길이  $L=2M$ 인 경우 PR 조건을 만족하는  $\underline{E}(z)$ 는 식(2)와 같이 표현할 수 있음을 증명하였다[7].

$$\underline{E}(z) = \underline{U} [ (\underline{I} - \underline{\Gamma}) + \underline{\Gamma} z^{-1} ] \tag{2}$$

여기서  $\underline{U}$ 는 유니터리 행렬,  $\underline{\Gamma} =$

$$\begin{bmatrix} v_0^2 & v_0 v_1 & v_0 v_2 & \cdots & \cdots & v_0 v_{M-1} \\ v_0 v_1 & v_1^2 & v_1 v_2 & \cdots & \cdots & v_1 v_{M-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdots & \cdot \\ v_0 v_{M-1} & v_1 v_{M-1} & v_2 v_{M-1} & \cdots & \cdots & v_{M-1}^2 \end{bmatrix} \text{이며}$$

$$\sum_{i=0}^{M-1} v_i^2 = 1 \text{이다.}$$

이 경우  $\underline{E}(z)$ 는 분해 필터뱅크  $\underline{H}(z)$ 와 식(3)의 관계가 성립한다.

$$\underline{E}(z) = \begin{bmatrix} a_{0,0} + a_{M,0} z^{-1} & a_{1,0} + a_{M+1,0} z^{-1} & & & \\ a_{0,1} + a_{M,1} z^{-1} & a_{1,1} + a_{M+1,1} z^{-1} & & & \\ \cdot & \cdot & & & \\ a_{0,M-1} + a_{M,M-1} z^{-1} & a_{1,M-1} + a_{M+1,M-1} z^{-1} & & & \\ \cdots & a_{M-1,0} + a_{2M-1,0} z^{-1} & & & \\ \cdots & a_{M-1,1} + a_{2M-1,1} z^{-1} & & & \\ \cdots & \cdot & & & \\ \cdots & a_{M-1,M-1} + a_{2M-1,M-1} z^{-1} & & & \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{1,0} & \cdots & a_{M-1,0} \\ a_{0,1} & a_{1,1} & \cdots & a_{M-1,1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{0,M-1} & a_{1,M-1} & \cdots & a_{M-1,M-1} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} a_{M,0} & a_{M+1,0} & \cdots & a_{2M-1,0} \\ a_{M,1} & a_{M+1,1} & \cdots & a_{2M-1,1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{M,M-1} & a_{M+1,M-1} & \cdots & a_{2M-1,M-1} \end{bmatrix} z^{-1}$$

$$= \underline{A}_0 + \underline{A}_1 z^{-1} \quad (3)$$

여기서  $\underline{H}_i(z) = \sum_{k=0}^{2M-1} a_{ki} z^{-k}$ 이다.

그러므로 식(2)와 식(3)을 비교하면 식(4)의 관계가 성립함을 알 수 있으므로 이를 이용하면 PR조건을 만족하는  $\underline{H}(z)$ 의 설계가 가능하다.

$$\underline{A}_0 = \underline{U} (\underline{I} - \underline{\Gamma}), \quad \underline{A}_1 = \underline{U} \underline{\Gamma} \quad (4)$$

식(2)를 이용하여 M-대역 DOWB를 설계하기 위하여는 분해 필터뱅크의 LPF  $H_0(z)$ 는 레규라리티 조건[3]을 만족하여야 하며, 이를 위하여는  $\underline{U}$ 의 첫번째 열행렬(row matrix)  $\underline{u}^0$ 은 식(5)와 같은 하르(Haar) 행렬이 되어야 한다[5].

$$\underline{u}^0 = \frac{1}{\sqrt{M}} [1, 1, \dots, 1] \quad (5)$$

그러므로 기저의 길이  $L=2M$ 인 M-대역 DOWB를 설계하는 것은 레규라리티 조건을 만족하는  $\underline{U}$  및  $\underline{\Gamma}$ 를 설계하는 것과 같으며, 이들의 선택 방법에 따라 설계된 DOWB의 주파수 특성이 변하게 된다[4, 5].

### III. M-대역 DOWB의 고속 알고리즘 구현

식(2)를 이용하여 설계된 길이  $L=2M$ 인 DOWB를 이용하여 임의의 M-대역으로 다음과 같은 방법으로 고속으로 분해 및 합성을 할 수 있다.

$\underline{X}$  및  $\underline{Y}$  각각을 M-대역 DOWB로 구성된 분해 필터뱅크의 입력 및 출력이라 하자.

$$\underline{X}^T = [ \underline{X}_n \mid \underline{X}_{n+1} ] \underline{Y}^T$$

$$= [ y_0, y_1, \dots, y_{M-1} ] \quad (6)$$

여기서  $\underline{X}_n = [x_0, x_1, \dots, x_{M-1}]$ ,  $\underline{X}_{n+1} = [x_M, x_{M+1}, \dots, x_{2M-1}]$ 이다.

입력과 출력의 관계를 식(2)를 이용하여 표현하면 식(7)과 같이 된다.

$$\underline{Y} = \underline{U} \{ (\underline{I} - \underline{\Gamma}) \underline{X}_n + \underline{\Gamma} \underline{X}_{n+1} \}$$

$$= \underline{U} \{ \underline{X}_n - \underline{\Gamma} (\underline{X}_n - \underline{X}_{n+1}) \} \quad (7)$$

식(7)에서 DOWB를 사용하여 신호를 임의의 M-대역으로 고속으로 분해하는 것은 주어진  $\underline{U}$ 에 대하여  $\underline{\Gamma}$ 의 고속 구현과 같음을 알 수 있다. [10]에서는  $\underline{\Gamma}$ 를 식(8)과 같이 분해함으로써 고속알고리즘을 구현하였다.

$$\underline{\Gamma} = \underline{D}_0 \underline{D}_1 \underline{D}_0 \quad (8)$$

여기서  $\underline{D}_0 = \begin{bmatrix} v_0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & v_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & v_{M-1} \end{bmatrix}$ ,

$\underline{D}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdots & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ 이다.

[10]의 방법과는 달리 여기서는  $\underline{\Gamma}$ 의 식(9)와 같은 성질을 이용하여  $\underline{\Gamma}$ 를 식(10)과 같이 분해함으로써 고속 M-대역 DWT를 구현하였다[6].

$$\underline{\Gamma}^T \underline{\Gamma} = \underline{\Gamma} \underline{\Gamma}^T \quad (9)$$

$$\underline{\Gamma} = \underline{\Theta}^{-1} \underline{\Lambda} \underline{\Theta} \quad (10)$$

여기서  $\underline{\Lambda}$ 는  $\underline{\Gamma}$ 의 고유치(eigenvalues)로 이루어지는 대각 행렬(diagonal matrix)이고,  $\underline{\Theta}$ 는  $\underline{\Gamma}$ 의 고유 벡터(eigenvector)이다.

여기서  $\underline{\Lambda}$ ,  $\underline{\Theta}$  및  $\underline{\Theta}^{-1}$ 는 식(11)과 같이 된다(증명은 부록 참조).

$$\underline{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\Theta} = \begin{bmatrix} -\frac{v_{M-1}}{v_0} & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\frac{v_{M-2}}{v_0} & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{v_1}{v_0} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{v_0}{v_{M-1}} & \frac{v_1}{v_{M-1}} & \cdots & \frac{v_{M-2}}{v_{M-1}} & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\underline{\Theta}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & v_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & v_{M-1} \end{bmatrix}$$

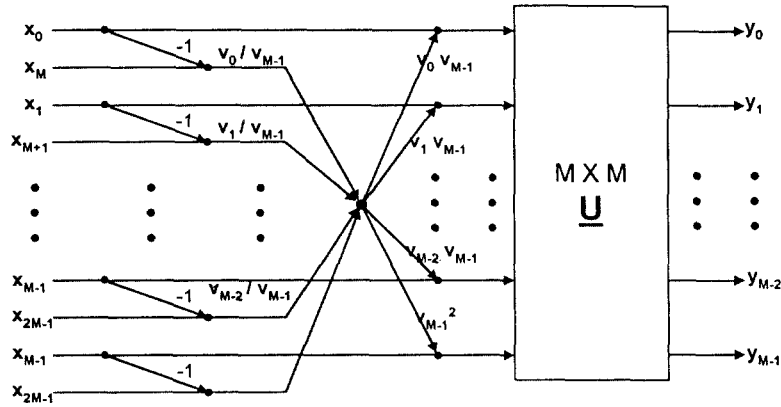
$$\begin{bmatrix} v_{M-1} & v_{M-2} & \cdots & v_1 & -v_{M-1} \\ v_{M-1} & v_{M-2} & \cdots & v_1 & -v_{M-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{M-1} & v_{M-2} & \cdots & v_1 & -v_{M-1} \end{bmatrix}$$

그러므로 식(11)을 이용하여 식(10)을 정리하면 다음과 같이 된다.

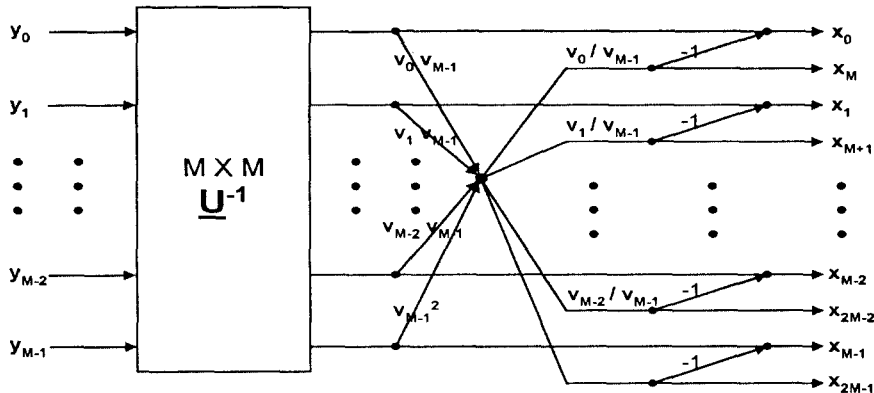
$$\underline{\Gamma} = \underline{P} \underline{W} = \begin{bmatrix} v_0 v_{M-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & v_1 v_{M-1} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & v_{M-1}^2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{v_0}{v_{M-1}} & \frac{v_1}{v_{M-1}} & \cdots & 1 \\ \frac{v_0}{v_{M-1}} & \frac{v_1}{v_{M-1}} & \cdots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{v_0}{v_{M-1}} & \frac{v_1}{v_{M-1}} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

위 결과를 이용하면 식(7)은 그림 2와 같이 구현될 수 있으며 이들의 구현을 위하여 필요한 계산량은 다음과 같다. 식(12)와 같이 분해된  $\underline{\Gamma}$ 를 구현하기 위하여 필요한 계산량은 우선  $\underline{P}$ 의 구현을 위하여는(M)개의 곱셈,  $\underline{W}$ 를 위하여는 (M-1)개의 곱셈 및 덧셈이 필요하게 된다. 또한 임의의  $M \times M$ 인  $\underline{U}$ 를 구현하기 위하여는  $(M(M-1)+1)$ 개의 곱셈 및  $(M(M-1))$ 개의 덧셈이 필요하게 된다. 여기서 곱셈수가  $(M^2)$ 이 아니고  $(M(M-1)+1)$ 이 된 것은  $\underline{U}$ 는 첫번째 열행렬이 하르 행렬이기 때문이다. 따라서 식(7)의 구현을 위하여



(a) 순방향(분해) 신호 흐름도(forward signal flow graph)



(b) 역방향(합성) 신호 흐름도(inverse signal flow graph)

그림 2. 대칭 행렬 분해 방법을 이용한 M-대역 고속 WT의 신호 흐름도

Fig. 2. Signal flow graph of M-band Fast WT using symmetric matrix factorization

여 필요한 전체 곱셈수 및 덧셈수는 각각  $(M^2 + M)$  및  $(M^2 + 2M - 1)$ 이 된다.

이에 비해 FIR 필터의 길이  $L=2M$ 인 경우 직접 필터링 방법으로 신호를 M-대역으로 분해하기 위하여는  $(2M \times M)$  및  $((2M - 1) \times M)$ 개의 곱셈 및 덧셈이 필요하게 된다.

#### IV. 성능 평가

제안된 방법의 성능 평가 방법을 위해 임의의 M-대역에 대하여 기존의 직접 필터링 방법과 연산수를 표 1에 보였다. 표 1에서 제안된 방법은 직접 필터링

방법에 비하여 곱셈수는  $(M^2 - 1)$ , 덧셈수는  $(M^2 - 3M + 1)$  감소됨을 알 수 있고, 특히 M이 증가할수록 전체적인 계산량은 거의 50%정도 감소함을 알 수 있다.

표 1. 임의의 M 대역에 대한 직접 방법과 제안된 알고리즘들의 연산수

Table 1. Computational complexity of direct method and proposed algorithm when M is arbitrary integer

대역수	직접 방법		고속알고리즘	
	곱셈	덧셈	곱셈	덧셈
M	$2M^2$	$2M^2 - M$	$M^2 + M$	$M^2 + 2M - 1$

M=2<sup>n</sup>인 경우에는 고속으로 구현 가능한 유니터리 행렬이 존재하므로 연산수는 더욱 감소된다. 표 2에는 유니터리 행렬로 Lee[9]의 고속 DCT 알고리즘을 사용한 경우 연산수를 직접 필터링 방법과 비교하였다. 여기서 우리는 M이 임의의 정수인 경우 보다 연산수는 더욱 감소함을 알 수 있다.

표 2. M=2인 경우 고속 알고리즘과 직접 방법의 연산수  
Table 2. Computational complexity of fast algorithm and direct method when M=2<sup>n</sup>

대역수	고속알고리즘		직접 방법		연산비(%)	
	곱셈	덧셈	곱셈	덧셈	곱셈	덧셈
4	11	20	32	28	34.4	71.4
8	27	52	128	120	21.1	43.3
16	63	128	512	496	12.3	25.8
32	143	304	2048	2016	7.0	15.1
64	319	704	8192	8128	3.9	8.7

### V. 결 론

본 논문에서는 임의의 M-대역 DOWB가 길이 L=2M인 경우, 무손실 행렬이 가지는 대칭성을 이용하여 분해함으로써 M-대역 DWT를 고속으로 구현하는 방법을 제안하였다. 제안한 고속 알고리즘을 이용하는 경우 직접 필터링 방법에 비하여 계산량이 많이 감소됨을 알 수 있으며, 특히 M이 증가할수록 연산수는 거의 50% 정도 감소하게 됨을 알 수 있다. 또한 M=2<sup>n</sup>인 경우 고속으로 구현할 수 있는 유니터리 행렬이 존재하므로 전체적인 연산수는 더욱 감소된다.

### 부록) 식(11)의 증명

행렬 Γ의 고유치 λ는 식(a-1)에 의하여 결정된다.

$$D = \text{Det} [\Gamma - \lambda I]$$

$$= \begin{vmatrix} v_0^2 - \lambda & v_0 v_1 & \cdots & v_0 v_{M-1} \\ v_1 v_0 & v_1^2 - \lambda & \cdots & v_1 v_{M-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{M-1} v_0 & v_{M-1} v_1 & \cdots & v_{M-1}^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (a-1)$$

여기서 Det[·]는 행렬의 결정값(determinant)이다.

임의의 M×M 행렬식의 결정값은 한 행 또는 한 열의 모든 요소(element)에 같은 상수를 곱하는 것은 D에 그 상수를 곱한 것과 같고, 한 행 또는 한 열의 각 원소에 다른 행의 대응하는 원소의 상수배를 더하여도 그 값은 불변이므로 식(a-1)은 식(a-2)와 같이 된다.

$$D = v_0^2 v_1^2 \cdots v_{M-1}^2 \begin{vmatrix} 1 - \frac{\lambda}{v_0^2} & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{\lambda}{v_0^2} & -\frac{\lambda}{v_1^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\frac{\lambda}{v_{M-1}^2} \end{vmatrix} = 0 \quad (a-2)$$

식(a-2)에 V의 단위 놈(norm) 조건인  $\sum_{i=0}^{M-1} v_i^2 = 1$ 을 적용하면 식(a-3)과 같으며 따라서 λ는 식(a-4)가 된다.

$$D = -\lambda^{M-1} (1 - \lambda) = 0 \quad (a-3)$$

$$\underline{\lambda} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (a-4)$$

식(a-3)에 의한 고유치 λ<sub>i</sub> (i=0, 1, ..., M-1)에 대한 고유 벡터 M<sub>i</sub>는 식(a-5)와 같다.

$$(\Gamma - \lambda_i I) \underline{M}_i^T = \underline{0} \quad (a-5)$$

식(a-5)를 이용하여 λ<sub>M-1</sub>=1 및 λ<sub>i</sub>=0인 경우에 대응하는 고유 벡터 M<sub>i</sub>=[μ<sub>i,0</sub>, μ<sub>i,1</sub>, ..., μ<sub>i,M-1</sub>]는 각각 식(a-6) 및 (a-7)을 만족하게 된다.

$$\frac{\mu_{M-1,0}}{v_0} = \frac{\mu_{M-1,1}}{v_1} = \cdots = \frac{\mu_{M-1,M-1}}{v_{M-1}} \quad (a-6)$$

$$\mu_{i,0} v_0 + \mu_{i,1} v_1 + \cdots + \mu_{i,M-1} v_{M-1} = 0 \quad (a-7)$$

식(a-6)에서 μ<sub>M-1, M-1</sub>=1이라 하면 M<sub>M-1</sub>는 식(a-8)과 같이 같아진다.

$$\underline{M}_{M-1} = \left[ \frac{v_0}{v_{M-1}}, \frac{v_1}{v_{M-1}}, \cdots, 1 \right] \quad (a-8)$$

또한  $\lambda_i=0$ 인 경우 고유 벡터는 식(a-7) 및 고유 벡터는 서로 직교하는 성질을 이용하면  $\Theta$ 는 식(a-9)와 같이 된다.

$$\Theta = \begin{bmatrix} -\frac{v_{M-1}}{v_0} & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\frac{v_{M-2}}{v_0} & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\frac{v_1}{v_0} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{v_0}{v_{M-1}} & \frac{v_1}{v_{M-1}} & \cdots & \frac{v_{M-2}}{v_{M-1}} & 1 \end{bmatrix} \quad (a-9)$$

$\Theta^{-1}$ 는 다음과 같은 방법으로 구하여 진다.  $\Theta$ 가 식(a-10)과 같이 분해되어진다면,  $\Theta^{-1}$ 는 식(a-11)과 같이 된다.

$$\Theta = S Q R \quad (a-10)$$

$$\Theta^{-1} = R^{-1} Q^{-1} S^{-1} \quad (a-11)$$

이러한 관계를 이용하여  $\Theta$ 를 분해하면 식(a-12)와 같이 된다.

$$\Theta = S Q R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & -v_{M-1} \\ 0 & 1 & \cdots & -v_{M-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \frac{v_{M-2}}{v_{M-1}} & \cdots & \frac{v_0^2}{v_{M-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{v_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (a-12)$$

식(a-12)에서는  $R^{-1}$  및  $Q^{-1}$ 는 쉽게 구할 수 있으며  $S^{-1}$ 는 가우시안 소거법(Gaussian elimination)을 이용하면 구할 수 있다. 이 결과에  $V$ 의 놈 조건을 이용하여 간소화시키고, 이를 다시 분해하여 표현하면 식(a-13)과 같다.

$$\Theta^{-1} = \begin{bmatrix} -v_0 v_{M-1} & -v_0 v_{M-2} & \cdots & -v_0 v_1 & v_0 v_{M-1} \\ -v_1 v_{M-1} & -v_1 v_{M-2} & \cdots & 1 - v_1^2 & v_1 v_{M-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -v_{M-2} v_{M-1} & 1 - v_{M-2}^2 & \cdots & -v_1 v_{M-2} & v_{M-2} v_{M-1} \\ 1 - v_{M-1}^2 & -v_{M-2} v_{M-1} & \cdots & -v_1 v_{M-1} & v_{M-1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & v_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & v_{M-1} \end{bmatrix} \quad (a-13)$$

$$\begin{bmatrix} v_{M-1} & v_{M-2} & \cdots & v_1 & -v_{M-1} \\ v_{M-1} & v_{M-2} & \cdots & v_1 & -v_{M-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ v_{M-1} & v_{M-2} & \cdots & v_1 & -v_{M-1} \end{bmatrix} \quad (a-13)$$

### 참고 문헌

1. S. Mallat, "A Theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation," IEEE Trans. on PAMI, pp674-693, July 1989.
2. I. Daubechies, "Orthogonal bases of compactly supported wavelets," Comm. on Pure and Applied Math., vol. XLI 909-996, pp909-996, 1988.
3. P. N. Heller, et al, "Regular M-band wavelets and applications," ICASSP93, pp. III-229-232, 1993.
4. S-k Kwon and J-k Kim, "Wavelet bases design from the PR filter banks viewpoint," APCC93, 1993.
5. S-k Kwon and J-k Kim, "A New regular M-band orthogonal wavelet filter bank design using zeros insertion method," Electronics Letters, pp 753-754, 1994.
6. S. J. Leon, "Linear algebra with applications," Prentice-hall, 1994.
7. P. P. Vaidynathan, "Multirate system and filter banks", Prentice-hall, 1993.
8. 이동식, "무손실 행렬의 분해를 이용한 고속 웨이

브렛 변환 방법에 대한 연구,” 금오공과 대학교 석사학위 논문, 1996.

9. B. G. Lee, “A new algorithm to compute the discrete cosine transform,” IEEE Trans. on ASSP, pp. 1243-1245, Dec., 1984.

10. S-k kwon et al, “Fast  $M$ -band orthogonal wavelet transform algorithm when base length equals  $2M$ ,” Electronics letter, pp. 470-472, Mar., 1997.



이 동 식(Dong-Sik Lee) 정회원  
1995년 2월: 금오공과대학교 전자공학과(공학사)  
1997년 2월: 금오공과대학교 전자통신공학과(공학석사)  
현재: 프로칩스 연구소



권 상 근(Sang-Keun Kwon) 정회원  
1982년 2월: 서강대학교 전자공학과(공학사)  
1987년 2월: 한국과학기술원 전기 및 전자공학과(공학석사)  
1994년 8월: 한국과학기술원 전기 및 전자공학과(공학박사)  
1990년 9월~현재: 금오공과대학교 전자통신공학과 부교수