

# Rayleigh 페이딩 채널에 대한 CQ Importance Sampling 기법

正會員 이 대 일\*, 김 동 인\*\*

## CQ Importance Sampling Technique for a Rayleigh-Faded Channel

Dae Il Lee\*, Dong In Kim\*\* *Regular Members*

### 요 약

IS (Importance Sampling) 기법은 디지털 통신 시스템의 비트오율을 측정할 때 시뮬레이션의 수를 줄이는데 사용되는 변형된 Monte Carlo 기법이다. 본 논문에서는 Rayleigh 페이딩 채널에 대한 IS 기법을 연구한다. CQ (Conventional importance sampling and Quasi-translation) IS 기법을 제안하고, 분석적으로 최적 IS 파라미터를 결정한다. CQ IS 기법은 AWGN에 대해서는 분산조정을 하는 CIS를, Rayleigh 페이딩에 대해서는 의사천이를, 각각 사용하는 IS 기법이다. 예상되는 비트오율이 약  $10^{-5} \sim 10^{-9}$ 이고, 메모리가 있는 이동통신 시스템에 대한 효율적인 성능평가를 수행하여 약  $10^3 \sim 10^8$  이상의 매우 큰 시뮬레이션 이득을 보인다.

### ABSTRACT

IS (Importance Sampling) is a modified Monte Carlo technique that can significantly reduce the number of simulation run times in the estimation of bit error rate (BER). In this paper we analyze IS technique for a Rayleigh-faded channel, propose a CQ (Conventional importance sampling and Quasi-translation) IS technique for the fading channel, and determine optimum IS parameters analytically. The CQ IS technique modifies the variance of additive noise and also performs quasi-translation for the fading distribution. It is shown that the simulation gains are about  $10^3 \sim 10^8$  for the mobile communication systems with memories in case of the expected BERs  $10^{-5} \sim 10^{-9}$ .

### I. 서 론

복잡한 디지털 통신 시스템의 비트오율(BER: Bit Error Rate)을 측정하기 위해 일반적으로 Monte Carlo (MC) 기법이 사용된다. 즉, 시뮬레이션 중 얼마나 자주 에러가 일어나는가를 측정하는 기법이 사용된다. 따라서 고려되는 시스템에서 비트오율이 낮은 경우에 MC 기법을 사용하여 원하는 비트오율을 측정하

\*국방과학연구소  
 \*\*서울시립대학교 전자공학과  
 論文番號: 97040-0201  
 接受日字: 1997年 2月 1日

기 위해서는 매우 큰 시행 회수를 요구하게 된다. 10%의 정확도를 유지하기 위해 필요한 시행 회수는 예상되는 비트오율의 역수의 약 100 배이다. 시스템에 따라 다르지만, 일반적으로 비트오율이  $10^{-7}$  보다 작은 시스템을 시뮬레이션하는 것은 거의 불가능하다. IS (Importance Sampling) 기법은 시뮬레이션 시행 회수를 줄이는 데 사용된다<sup>[1-3]</sup>. IS 기법은 에러가 자주 일어나도록 본래의 확률밀도함수(original probability density function)를 변화(modification)시켜서 시뮬레이션 시행 회수를 줄인다. 또한 본래의 비트오율을 측정하기 위해 무게함수(weighting function)를 사용한다.

현재까지 여러 문헌에서<sup>[1-3]</sup> IS 기법에 대해 소개하고 있지만, 대체로 AWGN (Additive White Gaussian Noise)이 잡음원인 시스템에 대한 IS 기법은 인위적으로 에러를 자주 일으키게 하는 방법의 차이에 의하여 CIS (Conventional Importance Sampling) 기법과 IIS (Improved Importance Sampling) 기법으로 나뉘어진다. CIS 기법은 고려되는 가산 잡음의 분산(variance)을 크게 하여 에러를 자주 일으키고, IIS 기법은 고려되는 잡음의 평균(mean)을, 에러를 일으키지만 그 빈도가 작은 영역으로 이전(translation)시켜 에러를 자주 일으킨다. 기존의 분석적인(analytic) IS 기법에 관한 연구는 AWGN 채널을 가정하여 CIS와 IIS를 적용하였다. IS 기법의 성능평가 기준은 측정기(estimator)의 분산으로 주어진다. 최적 IS 측정기는 IS 파라미터에 의하여 변하는 측정기의 분산이 가장 작은 값을 갖는 측정기이다.

본 논문에서는 디지털 이동통신 시스템에 대한 IS 기법을 연구한다. 즉, 이동통신 채널을 Rayleigh 페이딩 채널로 가정하고 새로운 IS 기법인 CQ (Conventional importance sampling and Quasi-translation<sup>[2]</sup>) IS 기법을 제안한다. 또한 CQ IS 측정기의 분산을 분석적으로 유도하여 최적 IS 파라미터를 결정한 후, 효율적인 성능평가를 수행한다. 메모리가 있는 AWGN 채널에서 IS 기법으로 IIS가 CIS보다 훨씬 이득이 크다는 것을 논문 [1]에서 보였다. 그러나 본 논문에서는 신호성분이 페이딩으로 인하여 계속 바뀌므로 IIS를 사용하여 평균을 변화시키는 것은 효과가 없을 것으로 예상되므로 CIS를 의사천이와 함께 사용한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 제 2장에서는 CQ IS를 적용하기 위한 시스템 및 시뮬레이션 모델을 제

시하고, 제 3장에서는 Rayleigh 페이딩과 AWGN이 동시에 잡음원으로 작용하는 시스템에 대하여 시스템 메모리가 있는 경우의 CQ IS 기법을 제안하고, CQ IS 측정기의 분산을 이론적으로 유도하여 최적 IS 파라미터를 결정한다. 제 4장에서는 유도된 측정기의 분산을 통해 얻어진 CQ IS 기법의 성능이득을 메모리가 1(memoryless), 3, 5인 경우로 구분하여 제시하고, 각각의 최적 IS 파라미터를 이용한 시뮬레이션을 수행하여 MC 기법에 대한 CQ IS 기법의 성능이득을 제시한 후, 제 5장에서 결론을 맺는다.

## II. 시스템 및 시뮬레이션 모델

### A. 디지털 통신 시스템 모델

본 논문의 표기는 논문 [1]에 기초한다. 즉, 그림 1과 같은 기저대역(baseband) 이진(binary) 디지털 통신 시스템에 대하여 성능평가를 수행한다. 본 논문의 시스템 모델이 논문 [1]과 다른 점은 이동통신 채널을 가정하여 Rayleigh 페이딩이 송산 잡음으로 작용한다는 것이다.

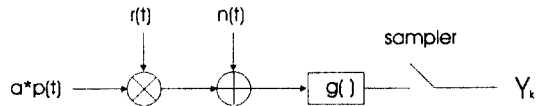


그림 1. 일반적인 기저대역 이진 디지털 통신 시스템.

Fig. 1 Basic baseband model of a binary digital communication system.

수신된 신호  $x(t)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$x(t) = \sum_i a_i p(t - iT) \cdot r(t) + n(t) \quad (1)$$

여기서 정보 데이터  $a_i$ 는  $A$ 와  $-A$ 를 같은 확률로 취하고  $p(t)$ 는  $[0, T]$ 를 제외한 시간에서는 0인 구형파(rectangular pulse)이다. 또한  $r(t)$ 는 Rayleigh 페이딩을 의미하고  $n(t)$ 는 2-sided 전력 스펙트럼 밀도가  $N_0/2$ 인 가산 잡음 신호이다. 매  $T$ 초에 샘플되는  $Y_c$ 는 다음과 같이 비트 단위의 ISI (intersymbol interference)로 표시할 수 있다.

$$Y_c = g(X_c, X_{c-1}, \dots, X_{c-(M-1)}) \quad (2)$$

여기서  $g(\cdot)$ 는 시스템 응답,  $M$ 은 비트 단위의 메모리,  $X_c$ 는 다음과 같은 독립 랜덤 변수(random variable)이다.

$$X_c = A_c \cdot R_c + N_c \quad (3)$$

여기서  $A_c$ 는  $A(H_0, \text{hypothesis } 0)$ 와  $-A(H_1, \text{hypothesis } 1)$ 이고,  $N_c$ 는  $G(0, \sigma_n^2 = N_0/2)$ 인 랜덤 변수이다. 또한  $R_c$ 는 Rayleigh 페이딩을 의미하는 랜덤 변수이고, 본 논문에서는 페이딩이 매 심볼에 작용하고 그동안(메모리) 일정하다고 가정한다. 즉,

$$X_c = A_c \cdot R + N_c \quad (4)$$

여기서  $R$ 은 다음과 같이  $\sigma_R$ 을 파라미터로 갖는 랜덤 변수이다.

$$f_R(r) = \frac{r}{\sigma_R^2} \exp\left[-\frac{r^2}{2\sigma_R^2}\right] \quad (5)$$

일반적으로  $H_1$ 에 대한 비트오율과  $H_0$ 에 대한 비트오율은 같으므로, 본 논문에서는  $H_1$ 에 대한 비트오율만 논의한다. 따라서 그림 1과 같은 시스템의 비트오율은

$$P_e = P_{e0} = P_{e1} = \int_{-\infty}^{\infty} H[g(y)] f'_Y(y) dy \quad (6)$$

여기서  $P_{e0}$ 와  $P_{e1}$ 은 각각  $H_0, H_1$ 에 대한 비트오율,  $f'_Y(y)$ 는  $H_1$ 에 대한 랜덤 변수  $y$ 의 확률밀도함수,  $H[\cdot]$ 는  $H_1$ 에 대한 지표함수(indicator function)로  $y$ 가 0보다 크면 '1', 0보다 작으면 '0'인 값을 갖는 함수이다.

### B. 시뮬레이션 모델

시뮬레이션을 수행할 때는 식 (6)과 같은 1개의 랜덤 변수에 의한 식을 사용하지 않고, 이동통신에서 발생하는 페이딩과 AWGN에 대한 랜덤 변수를 각각 독립적으로 고려한 비트오율로 표현해야 한다. 즉, 메모리가 있는 시스템에서는 다음과 같은 독립 랜덤 벡터(random vectors)를 정의해야 한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= [X_c, X_{c-1}, \dots, X_{c-(M-1)}] = \mathbf{A} \cdot \mathbf{R} + \mathbf{N}, \\ \mathbf{A} &= [A_c, A_{c-1}, \dots, A_{c-(M-1)}], \\ \mathbf{N} &= [N_c, N_{c-1}, \dots, N_{c-(M-1)}] \end{aligned}$$

랜덤 벡터가 취하는 값은 일반적으로 소문자로 표시한다. 즉,  $\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{n}, \mathbf{r}$ 로 표현할 수 있고, 랜덤 벡터  $\mathbf{X}, \mathbf{N}, \mathbf{A}$ , 그리고 랜덤 변수  $R$ 의 확률밀도함수는 각각  $f_X(\mathbf{x}), f_N(\mathbf{n}), f_A(\mathbf{a}), f_R(r)$ 로 나타낸다. 즉, 식 (6)의 비트오율은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} P_e &= \int_{\mathbf{x}=-\infty}^{\infty} H[g(\mathbf{x})] f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbf{a}, \mathbf{n}, r} H[g(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{n})] f_A(\mathbf{a}) f_N(\mathbf{n}) f_R(r) d\mathbf{a} d\mathbf{n} dr \\ &= \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J p(j) \end{aligned} \quad (7)$$

여기서  $p(j) = \int_{\mathbf{n}, r} H[g(\mathbf{a}(j) \cdot \mathbf{r} + \mathbf{n})] f_N(\mathbf{n}) f_R(r) d\mathbf{n} dr$ ,  $\mathbf{a}(j)$ 는 랜덤 벡터  $\mathbf{A}$ 의 각각의 realization 벡터를 의미한다<sup>[1]</sup>. 또한  $j=1, 2, \dots, 2^M-1=J$ 이다.

일반적으로 MC 측정기에서 총  $N$ 번의 시행 회수를 수행하면 비트오율은 다음과 같은 식으로 표현된다.

$$P_e = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N H[y_i]$$

여기서  $i$ 는  $i$ 번째 run time을 의미한다. 실제로 시뮬레이션을 수행할 때는 realization을 이용하므로 이에 대한 비트오율은

$$P_e = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \frac{1}{N_j} \sum_{i=1}^{N_j} H[g(\mathbf{a}(j) \cdot \mathbf{r}_i + \mathbf{n}(j, i))] \quad (8)$$

여기서  $\mathbf{n}(j, i)$ 는  $j$ 번째 realization에서  $i$ 번째 run time에 대한 가산 잡음 성분을 의미하고,  $N_j$ 는  $j$ 번째 realization의 시행 회수를 의미한다.

### III. CQ IS 기법

본 장에서는 페이딩과 AWGN이 동시에 잡음원으로 작용하는 이동통신 채널에 대하여 IS를 적용한다. 즉, AWGN에 대해서는 분산조정(variance modification)을 하는 CIS와 페이딩에 대해서는 의사천이(quasi-translation)를 하는 CQ IS 기법을 사용한다. 효율적인 성능평가 기법으로 응용되고 있는 IS 기법에서 가장 중요한 것은 무게함수의 결정, IS 파라미터의 결정, 그리고 IS 시행 회수를 결정하는 것이다.

본래의 확률밀도함수(original pdf) 대신에 변형된 확률밀도함수(modified pdf)를 사용하는 IS에서 비트 오류율은 식 (7)을 변형시켜 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$P_e^* = \int_{a,n,r} H[g(a \cdot r + n)] w_N(n) w_R(r) f_A(a) f_N^*(n) f_R^*(r) da dn dr \quad (9)$$

여기서  $f_N(n)$ ,  $f_R^*(r)$ 은 각각  $N$ 과  $R$ 의 변형된 확률밀도함수이고,  $w_N(n) = f_N(n)/f_N^*(n)$ ,  $w_R(r) = f_R(r)/f_R^*(r)$ 이다. 따라서  $N$ 과  $R$ 이 각각  $f_N^*(n)$ 과  $f_R^*(r)$ 의 새로운 확률밀도함수를 갖고  $H[\cdot]w_N(n)w_R(r)$ 이 새로운 지표 함수가 되는 MC 추정기의 변형된 형태라 할 수 있다.  $w_N(n)$ 과  $w_R(r)$ 을 각각  $N$ 과  $R$ 의 무게함수라 한다. 또한 IS 파라미터와  $N_j^*$ 가 결정됐다고 가정하면 IS 추정기의 비트오율은 다음과 같이 시뮬레이션을 통하여 얻어진다.

$$P_e^* = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \frac{1}{N_j^*} \sum_{i=1}^{N_j^*} H[g(a(j) \cdot r_i + n(j, i))] w_N(n) w_R(r) \quad (10)$$

식 (10)과 같은 IS 추정기의 평균과 분산은 추정기의 성능평가를 위한 중요한 척도가 된다. 첫 번째로 식 (10) 추정기의 평균은

$$E^*[\hat{P}_e] = P_e^* = P_e = E[\hat{P}_e] \quad (11)$$

이므로 IS 추정기가 unbiased임을 확인할 수 있다. 따라서  $N_j$ 과  $N_j^*$ 가 같을 경우 식 (8) 추정기(MC 추정기)와 식 (10) 추정기(IS 추정기)의 분산 중 작은 값을 갖는 추정기가 효율적인 추정기이다. 즉, 다르게 표현하면  $N_j$ 보다 작은  $N_j^*$ 를 사용하여 MC 추정기와 같은 분산을 갖는 IS 시뮬레이션을 수행할 수 있다. 두 번째로 IS 추정기,  $P_e^*$ 의 분산은 일반적으로 다음과 같이 realization 형태로 표현된다<sup>[1]</sup>.

$$\begin{aligned} \sigma_{CQ}^2 &= E^*[P_e^{*2}] - (E^*[P_e^*])^2 \\ &= \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \sigma_{CQ}^2(j) \end{aligned} \quad (12)$$

여기서  $\sigma_{CQ}^2(j)$ 는  $j$ 번째 realization의 IS 추정기의 분

산이다. 또한 본 논문에서는  $N_j^*$ 가 각 realization마다 다르므로 참고문헌 [1]의 식 (4.29)와 같이  $N^*$ 로 변하지 않는다.

$$\sigma_{CQ}^2(j) = \frac{1}{JN_j^*} \left( \int_{n,r} H[g(a(j), n, r)] w_N(n) f_N(n) \cdot w_R(r) f_R(r) dn dr - p^2(j) \right) \quad (13)$$

CQ IS 기법을 적용하기 위해 다음과 같은 IS 파라미터를 정의한다.

- ①  $\sigma_R^* = \frac{\sigma_R}{k} \quad (k > 1)$
- ②  $\sigma_n^* = m \sigma_n \quad (m > 1)$

위와 같은 IS 파라미터에 의해 가산 잡음과 페이딩에 대한 각각의 변화된 확률밀도함수는 그림 2와 같다. 각각의 무게함수는 다음과 같다.

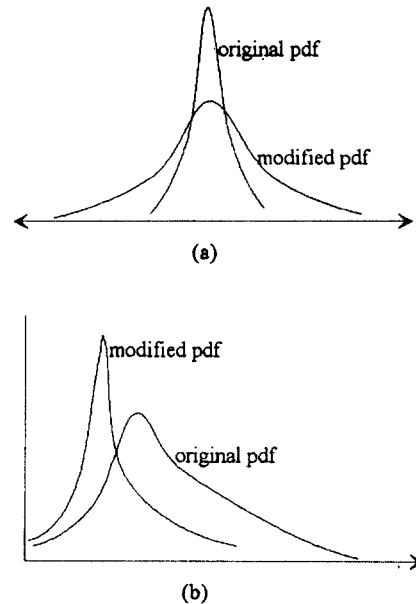


그림 2 변화된 확률밀도함수. (a) 가산 잡음 (b) 페이딩  
Fig. 2 Modified probability density functions. (a) AWGN (b) Fading

$$w_N(n) = \frac{f_N(n)}{f_N^*(n)} = \frac{\sigma_n^*}{\sigma_n} \exp \left[ -\frac{n^2}{2} \left( \frac{1}{\sigma_n^2} - \frac{1}{\sigma_n^{*2}} \right) \right]$$

$$= m \exp \left[ -\frac{n^2}{2\sigma_n^2} \left( 1 - \frac{1}{m^2} \right) \right] \quad (14)$$

$$w_R(r) = \frac{f_R(r)}{f_R^*(r)} = \frac{1}{k^2} \exp \left[ -\frac{r^2}{2\sigma_R^2} (1-k^2) \right] \quad (15)$$

따라서 전체 무게함수는 다음과 같이 식 (14)와 식 (15)의 곱으로 나타낼 수 있다.

$$w(r, n) \triangleq w_R(r) \cdot w_N(n) \quad (16)$$

식 (13)에서 가산 잡음 적분, 즉,  $n$ 에 대한 적분은 식 (14)를 사용하여 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\int_n H[g(a(j), n, r)] w_N(n) f_N(n) dn$$

$$= \int_n H[-B_j r + n] w_N(n) f_N(n) dn$$

$$= \left( \frac{m}{d_j} \right)^M Q \left( \frac{B_j d_j r}{\sigma_1} \right) \quad (17)$$

여기서 식 (17)의 무게함수는 식 (14)의 무게함수를 메모리  $M$ 에 대해서 표현한 식이고,  $B_j, d_j, \sigma_1$ , 그리고  $q$  등의 정의와 식 (17)의 유도는 부록 A에 있고, 또한

$$Q(x) = 1/\sqrt{2\pi} \int_x^\infty \exp(-t^2/2) dt \text{이다.}$$

따라서 식 (17)을 식 (13)에 대입하면,

$$\sigma_{CQ}^2(j) = \frac{1}{JN_j^*} \left[ \left( \frac{m}{d_j} \right)^M \int_{r=0}^\infty Q \left( \frac{B_j d_j r}{\sigma_1} \right) \cdot w_R(r) f_R(r) dr - p^2(j) \right]$$

$$= \frac{1}{JN_j^*} \left[ \left( \frac{m}{d_j} \right)^M \frac{1}{\sigma_R^2 k^2} \int_{r=0}^\infty Q \left( \frac{B_j d_j r}{\sigma_1} \right) \cdot r \exp \left( -\frac{r^2}{2\sigma_R^2} (2-k^2) \right) dr - p^2(j) \right]. \quad (18)$$

참고문헌 [4, p. 649]로부터  $\nu=2, \beta=qB_j, \mu^2 = \frac{k^2-2}{2\sigma_R^2}$ , ( $\beta^2 > \mu^2, \nu > 0$ )일 때,

$$\text{적분값} = \frac{\Gamma(1.5)}{\sqrt{\pi} 2 \beta^2} \cdot {}_2F_1(1, 1.5, 2; \frac{\mu^2}{\beta^2})$$

$$= \frac{1}{4\beta^2} \cdot {}_2F_1(1, 1.5, 2; \frac{\mu^2}{\beta^2}). \quad (19)$$

여기서  ${}_2F_1(\cdot)$ 는 Gauss' hypergeometric 함수이다. 또한 참고문헌 [4, p. 1045, 9.137]의 내용을 정리하면,

$$\sigma_{CQ}^2(j) = \frac{1}{JN_j^*} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{m}{d_j} \right)^M \cdot \frac{1}{k^2(k^2-2)} \cdot \left( \frac{qB_j \sigma_R \sqrt{2}}{\sqrt{2q^2 B_j^2 \sigma_R^2 - k^2} + 2} - 1 \right) - p^2(j) \right\} \quad (20)$$

관심있는 영역에서  $(q^2 B_j \sigma_R \sqrt{2}) \gg \sqrt{2q^2 B_j^2 \sigma_R^2 - k^2} + 2$  이므로 식 (20)을 다음과 같이 근사한다.

$$\sigma_{CQ}^2(j) \cong \frac{1}{JN_j^*} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{m}{d_j} \right)^M \cdot \frac{1}{k^2(k^2-2)} \cdot \frac{qB_j \sigma_R \sqrt{2}}{\sqrt{2q^2 B_j^2 \sigma_R^2 - k^2} + 2} - p^2(j) \right\} \quad (21)$$

식 (20)과 식 (21)은 일반적으로 그림 3과 같이 고정된  $m$ 에 대해  $k$ 의 변화에 대하여 convex 함수를 나타낸다. 따라서  $\sigma_{CQ}^2(j)$ 의 최소값을 유도하기 위해 고정된  $m$ 에 대하여  $\sigma_{CQ}^2(j)$ 의  $k$ 에 관한 미분이 '0'인 점을 찾는다. 식 (21)을  $k$ 에 관하여 미분하면,

$$\frac{d\sigma_{CQ}^2(j)}{dk} \cdot \frac{\sqrt{2} N_j^*}{qB_j \sigma_R} \left( \frac{m}{d_j} \right)^M \cong \frac{1}{k^3(k^2-2)^2(C-k^2)^{3/2}}$$

$$[5k^4 - 2(3+2C)k^2 + 4C] \quad (22)$$

여기서,  $C \triangleq 2q^2 B_j^2 \sigma_R^2 + 2$ 이다.

따라서 미분이 '0', 즉, 주어진  $m$ 에 대한 최적 IS 파라미터는

$$k_{opt, m}^2 \cong \frac{3+2C \pm \sqrt{4C^2 - 8C + 9}}{5}. \quad (23)$$

여기서 '-' 부호일 때는  $k_{opt, m}$ 이 거의 '0'이므로 '+' 부호일 때가 주어진  $m$ 에 대한 최적 IS 파라미터이다. 따라서 최적 IS 파라미터는  $m$ 을 변화시키면서 유도

된  $k_{opt, m}$ 에 의해 결정된  $\sigma^2_{CQ}(j)$ 이 가장 작은 값을 갖게 하는  $m_{opt}$ 과  $k_{opt, m_{opt}}$ 이 된다.

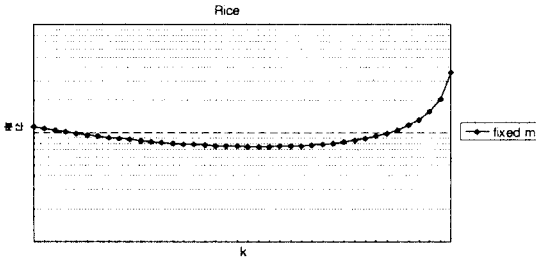


그림 3. 일반적인  $\sigma^2_{CQ}$ 와  $k$ 의 그림.  
Fig. 3 General plot of  $\sigma^2_{CQ}$  versus  $k$ .

#### IV. 수치 및 시뮬레이션 결과

본 장에서는 CQ IS 기법을 사용하여 Rayleigh 페이딩이 승산 잡음으로 작용하고 AWGN이 가산 잡음으로 작용하며, 메모리가 1(memoryless), 3, 5인 시스템에 대하여 식 (21)과 식 (23)을 이용하여 각각의 최적 IS 파라미터를 유도하였다. 변조 방식은 제 2장의 가정과 같이 BPSK (binary phase shift keying)로 하고, Rayleigh 페이딩의 파라미터인  $\sigma_R$ 은 '1'로 가정하였다. 또한 본 논문에서 사용한  $E_b/N_0$  값은 페이딩이 없을 때의  $E_b/N_0$ 를 사용하였다. 따라서  $\sigma_R$ 이 파라미터인 Rayleigh 페이딩 채널일 경우, 실제의  $E_b/N_0$ (average  $E_b/N_0$ )는 (original  $E_b/N_0$ )  $\times E[r^2]$ 이다.

MC 측정기의 분산은 식 (12)에서 무계함수를 1로 대입하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma^2_{MC} &= E[P_e^2] - (E[P_e])^2 \\ &= \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \sigma^2_{MC}(j) \end{aligned} \quad (24)$$

여기서  $\sigma^2_{CQ}(j)$ 는  $j$ 번째 realization의 IS 측정기의 분산이다.

$$\sigma^2_{MC}(j) = \frac{p(j) \cdot (1-p(j))}{JN_j} \quad (25)$$

일반적으로  $\sigma^2_{MC}(j)$ 은  $(0.01 \times p^2(j))$ 로 주어지도록,

즉, 예상되는 비트오율의 역수의 약 100 배로  $N_j$ 를 선택한다.

IS 측정기의 성능 평가 기준은 IS 측정기의 MC 측정기에 대한 시뮬레이션 이득(saving factor)으로 주어진다. 시뮬레이션 이득은 MC 측정기와 IS 측정기의 분산을 같게 하였을 때의 각각의 시행 회수의 비로써 표현된다.

$$r_{MC/CQ} = [N_j/N_j^*]_{\sigma^2_{MC} = \sigma^2_{CQ}} \quad (26)$$

$E_b/N_0$ 가 50~80 dB, 즉, 예상되는 비트오율이  $10^{-6}$ ~ $10^{-9}$ 이고, 메모리가 1인 시스템에 대하여 최적 IS 파라미터와 IS 시행 회수( $N^*$ )를 표 1에 제시하였다. 또한 메모리가 1인 시스템에 대한 최적 IS 파라미터를 사용하여 CQ IS 시뮬레이션을 통하여 얻어진 비트오율, 분석적인 식을 이용하여 유도된 비트오율(식 (7)), 그리고 최적 IS 파라미터를 사용할 때의 MC 측정기에 대한 이득, 즉,  $r_{MC/CQ}$ 를 그림 4에 제시하였다. 즉, 메모리가 1인 시스템에서는  $E_b/N_0$ 에 관계없이, 예상되는 비트오율이 낮을 경우 시뮬레이션 이득( $r_{MC/CQ}$ )은 비트오율의 역수에 비례해서 커짐을 표 1을 통해 확인할 수 있다.

또한 시스템의 메모리가 있을 경우, 즉, 메모리가 3, 5인 시스템에 대하여 최적 IS 파라미터와 시뮬레이션 이득을 표 2와 표 3에 제시하였다. 메모리가 3인 경우 총 realization의 수(J)는  $4(2^{M-1})$ , 메모리가 5인 경우는 16이므로  $E_b/N_0$ 가 60 dB인 경우에 대하여 각각 최적 IS 파라미터를 제시하였다. 메모리가 증가할 경우에 대한 비교는 메모리가 다를 경우 각 realization에 따라 비트오율이 변하므로 단순 비교하기가 어렵지만, 메모리의 증가에 따라  $N_j^*$ 가 증가한다. 즉, 이것은 메모리가 증가함에 따라 시뮬레이션 이득이 대체로 감소함을 나타내는 것이다. 그리고 메모리가 정해지면 가산 잡음에 대한 최적 IS 파라미터( $m_{opt}$ )도  $E_b/N_0$ 에 관계없이 정해짐을 확인할 수 있다. 또한 메모리가 증가할수록  $m_{opt}$ 는 감소하여, 메모리가 큰 시스템에서는 가산 잡음에 대한 IS (CIS)보다는 승산 잡음에 대한 IS (의사천이)가 훨씬 큰 작용을 함을 알 수 있다.

표 1, 2, 3에서 유도된 최적 IS 파라미터를 사용하여 IS 시뮬레이션한 결과는 각각 그림 4, 5, 6에 제시하였다. 즉, IS 파라미터인  $m_{opt}$ ,  $k_{opt}$ 을 사용하여 CQ

IS 기법을 적용한 메모리 시스템(M=1, 3, 5)의 비트 오류율은 분석적인 식으로부터 유도된 비트오율(식 (7))과 거의 유사함을 확인할 수 있다. 또한 IS 시행 회수(N<sub>j</sub>\*)는 거의 1,000 내외이므로 예상되는 비트오율이 클 경우는 시뮬레이션 이득이 크지 않지만, 예상되는 비트오율이 매우 작을 경우에는 시뮬레이션 이득이 매우 큼을 표 1, 2, 3과 그림 4, 5, 6의 y축(우축)을 통하여 확인할 수 있다.

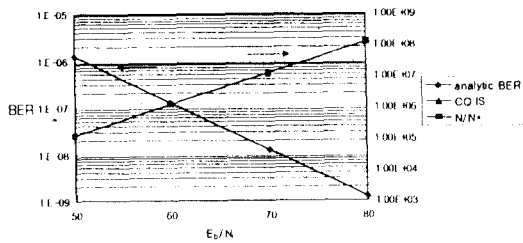


그림 4. M=1 시스템의 CQ IS 적용 결과.  
Fig. 4 Plot of analytic BER, CQ IS BER, and saving factors versus  $E_b/N_0$  for an M=1 system.

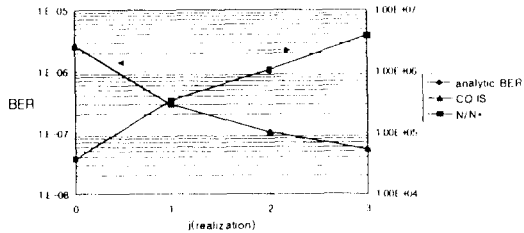


그림 5. M=3 시스템의 CQ IS 적용 결과( $E_b/N_0=60$  dB).  
Fig. 5 Plot of analytic BER, CQ IS BER, and saving factors versus realizations for an M=3 system( $E_b/N_0=60$  dB).

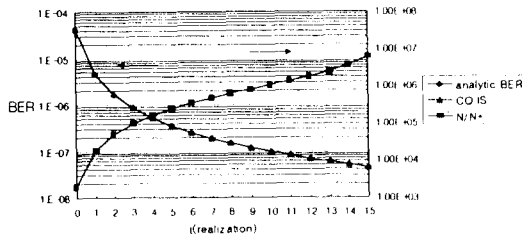


그림 6. M=5 시스템의 CQ IS 적용 결과( $E_b/N_0=60$  dB).  
Fig. 6 Plot of analytic BER, CQ IS BER, and saving factors versus realizations for an M=5 system( $E_b/N_0=60$  dB).

표 1. M=1 시스템에 대한 최적 IS 파라미터와 시행 회수.  
Table 1. Optimum IS parameters and minimum IS runs for an M=1 system.  $m_{opt}=1.74$

$E_b/N_0$	$k_{opt}$	$\sigma_{CQ}^2 \times N^*$	$N/N^*$
50	516.87	1.01E-11	1.24E+05
60	1634.48	1.01E-13	1.24E+06
70	5168.68	1.01E-15	1.24E+07
80	16344.8	1.01E-17	1.24E+08

표 2. M=3 시스템에 대한 최적 IS 파라미터와 시행 회수.  
Table 2. Optimum IS parameters and minimum IS runs for an M=3 system.  $E_b/N_0=60B$ ,  $m_{opt}=1.3$

$j$	$k_{opt}$	$\sigma_{CQ}^2 \times N_j^*$	$N_j/N_j^*$
0	327.566	2.35E-11	3.70E+04
1	982.691	2.85E-13	3.41E+05
2	1637.82	3.24E-14	1.08E+06
3	2292.94	4.59E-14	3.89E+06

표 3. M=5 시스템에 대한 최적 IS 파라미터와 시행 회수.  
Table 3. Optimum IS parameters and minimum IS runs for an M=5 system.  $E_b/N_0=60B$ ,  $m_{opt}=1.18$

$j$	$k_{opt}$	$\sigma_{CQ}^2 \times N_j^*$	$N_j/N_j^*$	$j$	$k_{opt}$	$\sigma_{CQ}^2 \times N_j^*$	$N_j/N_j^*$
0	77.565	1.31E-9	2.02E+03	8	1318.41	1.47E-14	6.25E+05
1	232.664	1.62E-11	1.83E+04	9	1473.51	9.10E-15	8.11E+05
2	387.769	2.10E-12	5.07E+04	10	1628.62	5.78E-15	1.05E+06
3	542.875	5.46E-13	9.96E+04	11	1783.73	3.72E-15	1.35E+06
4	697.982	1.99E-13	1.65E+05	12	1938.83	2.39E-15	1.79E+06
5	853.088	8.87E-14	2.48E+05	13	2093.94	1.49E-15	2.45E+06
6	1008.19	4.50E-14	3.50E+05	14	2249.05	8.80E-16	3.60E+06
7	1163.3	2.50E-14	4.75E+05	15	2404.15	4.45E-16	6.22E+06

### V. 결 론

본 논문에서는 최근에 연구가 활발히 진행되고 있는 이동통신 채널, 즉, Rayleigh 페이딩 채널에 대해 효율적인 성능평가 방법으로 새로운 CQ IS 기법을 제안하였다. 수신단의 비트 단위의 메모리가 1(memoryless), 3, 5인 시스템에서 CQ IS 측정기에 대해 분산을 최소화 하는 최적 IS 파라미터를 분석적으로 추출

하였다. AWGN 채널에서 CIS는 메모리 시스템에 대해 시물레이션 이득이 작아지나, 본 논문에서는 CIS와 함께 의사천이 기법을 사용하여 메모리 시스템에서도 CQ IS 기법이 효율적인 성능평가 기법임을 확인하였다. 또한 메모리가 증가할 경우 시물레이션 이득이 줄어들지만, IS 시행 회수( $N_j^*$ )는 대체로 1,000 내외이므로 비트오율이 낮아질수록 시물레이션 이득이 약  $10^3 \sim 10^8$  이상으로 개선됨을 확인하였다.

### 부록 A. 식 (17)의 유도

식 (13)에서 가산 잡음 적분, 즉,  $n$ 에 대한 적분은 식 (14)를 사용하여 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\int_n H[g(a(j), n, r)] w_N(n) f_N(n) dn = \int_n H[-B_j r + n] w_N(n) f_N(n) dn \quad (A.1)$$

식 (A.1)을 유도하기 위해 다음과 같은 변수를 정의한다.

- ①  $n \triangleq [n_1, n_2, \dots, n_M]$     ②  $r$ 은 최소  $M$  동안 일정
- ③  $k$  index는 편의상 생략한다.

$$\begin{aligned} g(a(j), n, r) &= \sum_{i=1}^M x_1(j)b_M + x_2(j)b_{M-1} + \dots + x_M(j)b_1 \\ &= (a_1(j)r + n_1)b_M + (a_2(j)r + n_2)b_{M-1} \\ &\quad + \dots + a_M(j)r + n_M)b_1 \\ &= -B_j \cdot r + n \end{aligned}$$

- ④  $B_j \triangleq -a(j) \cdot b^T = -[a_1(j)b_M + a_2(j)b_{M-1} + \dots + a_M(j)b_1]$
- ⑤  $a(j) \triangleq [a_1(j), a_2(j), \dots, a_M(j)]$ .  $a_M(j) = -A$
- ⑥  $b \triangleq [b_M, b_{M-1}, \dots, b_1]$ ,  $b_i = 0.5^{i-1}$
- ⑦  $n \triangleq n \cdot b^T = n_1 b_M + n_2 b_{M-1} + \dots + n_M b_1$
- ⑧  $n_i \sim G(0, \sigma_n^2)$

$$\textcircled{9} \alpha^2 \triangleq \sum_{i=1}^M b_i^2, \sigma_1^2 = \sigma_n^2, \sigma_i^{*2} = \alpha^2 \sigma_n^{*2}$$

$$\textcircled{10} \sigma_2^2 \triangleq \frac{\sigma_n^2}{(2 - \sigma_n^2/\sigma_n^{*2})}, d_j^2 \triangleq (2 - \sigma_n^2/\sigma_n^{*2}) = (2 - \frac{1}{m^2})$$

$$\textcircled{11} q \triangleq \sqrt{\frac{2-1/m^2}{2\sigma_1^2}}$$

$$\textcircled{12} Z \triangleq \frac{1}{N_j^*} \frac{1}{2} \left(\frac{m}{d_j}\right)^M \frac{1}{\sigma_R^2 k^2} \exp(-\eta_R^2/\sigma_R^2)$$

따라서 식 (A.1)에  $w_N(n) f_N(n)$ 을 대입하고 정의 ⑩에 의해 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} (A.1) &= \int_n H[-B_j r + n] \left(\frac{\sigma_n^*}{\sigma_n}\right)^M \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}}\right)^M \\ &\quad \cdot \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_n^2} (2 - \sigma_n^2/\sigma_n^{*2})(n_1^2 + \dots + n_M^2)\right) dn \end{aligned} \quad (A.2)$$

또한  $n = G(0, \sigma_2^2 \alpha^2)$ 이라 할 수 있으므로 위식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} (A.2) &= \left(\frac{\sigma_n^*}{\sigma_n d_j}\right)^M \int_{n=B_j r}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2 \alpha^2}} \exp\left(-\frac{n^2}{2\sigma_2^2 \alpha^2}\right) dn \\ &= \left(\frac{m}{d_j}\right)^M Q\left(\frac{B_j d_j r}{\sigma_1}\right) \end{aligned} \quad (A.3)$$

### 참고 문헌

1. D. Lu and K. Yao, "Improved importance sampling technique for efficient simulation of digital communication systems," *IEEE J. Select. Areas Commun.*, vol. 6, no. 1, pp. 67-75, Jan. 1988.
2. M. Devetsikiotis and J. K. Townsend, "An algorithmic approach to the optimization of importance sampling parameters in digital communication system simulation," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 41, no. 10, pp. 1464-1473, Oct. 1993.
3. M. Devetsikiotis and J. K. Townsend, "A useful and general technique for improving the efficiency of Monte Carlo simulation of digital communication systems," in *Proc. IEEE GLOBECOM '90*, San Diego, CA, pp. 1215-1221, Dec. 1990.
4. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, New York, 1980



이 대 일(Dae Il Lee)

정회원

현재: 국방과학연구소 연구원  
제 22권 5호 참조

김 동 인(Dong In Kim)

정회원

현재: 서울시립대학교 전자공학과 부교수  
제21권 8호 참조