

위성이동통신 채널 환경에서의 Trellis Coded Modulation의 성능에 대한 Tight Upper Bound의 계산

正會員 김 재 형*, Paul Ho**

A Calculation of Tight Upper Bound for the Performance of Trellis Coded Modulation in Mobile Satellite Communication Channel

Jae-Hyung Kim*, Paul Ho** *Regular Members*

※본 논문은 1996년도 한국학술진흥재단의 공모과제 연구비에 의하여 연구되었음.

요 약

본 논문은 리시안 페이딩환경에서 TCM(Trellis Coded Modulation)의 오류 성능에 대한 진정한 상위 한계(True Union Bound)를 구하는 방법에 대하여 연구하였다. 이전의 연구에서는 가장 우세한 오류사건들만을 고려하는 근사적 방법, 또는 전달함수한계(transfer function bound)의 각 오류사건에 대하여 Chernoff 한계(Chernoff bound)를 적용하는 등의 근사적 계산법을 적용하고 있다. 그러나 본 연구에서는 전달함수와 오류사건들의 특성함수를 결합하는 방법을 제안 함으로써 이제 까지의 방법중 가장 근접한 오류의 한계를 계산할 수 있었다. 그리고 제안된 방법은 매우 일반적이어서 동기복조, 차동복조는 물론, 파이럿-심볼 및 파이럿-톤을 이용한 복조방식에도 적용이 가능하며, PSK 및 QAM 등의 다양한 형태의 신호 성좌점(constellation)을 가지는 변조방식에 대하여도 적용이 가능하다.

ABSTRACT

A method is presented in this paper for the calculation of the true union bound on error performance of trellis coded modulation in Rician fading channels. As oppose to previous analyses where the union bound is approximated by the most common error events, or through the use of Chernoff bound on individual pairwise error events in the

*창원대학교 제어계측공학과
**사이먼 프레이저 대학교, 응용 공학부, 밴쿠버, 캐나다
論文番號:97377-1016
接受日字:1997年 10月 16日

transfer function bound, our technique uses the exact probability of individual pairwise error events in the transfer function of the code. Although more computationally intensive, the proposed technique produces the tightest bound yet published. In addition, it is very general and is applicable to coherent, differential, and pilot-based detection, and to PSK and QAM types of constellations.

I. 서 론

Trellis Coded Modulation(TCM)은 전력효율 및 대역폭효율이 높다는 장점 때문에 이동통신 및 위성 이동통신에 널리 사용되어 왔다[1]. 이동 통신 채널에서는 전송 신호의 진폭과 위상을 페이딩현상에 의하여 영향을 받기 때문에 페이딩을 보상하기 위한 정확한 채널 추정기(Channel estimator)가 요구되며, 이는 이동통신 채널에서의 TCM 변복조기 성능을 크게 좌우한다. 따라서 차동검파(Differential Detection), 파이럿-톤(Pilot-tone) 및 파이럿-심볼(Pilot Symbol)을 이용한 채널 추정기가 제안되어 사용되어 왔다. 채널 추정 방법을 고려한 변조방식들에 대한 정확한 성능을 평가하는 것이 중요하다는 것은 명백하지만, 해석적으로 구하는 것이 매우 어렵기 때문에 컴퓨터 시뮬레이션에 의존하는 경우가 많았다.

페이딩 채널환경에서 TCM의 오류성능의 해석에 대한 문헌은 [1]-[6]등에서 찾아 볼 수 있다. 이들의 공통점은 유니온 바운드(Union bound)를 이용하는 것이나, 진정한 유니온 바운드(True Union Bound:TUB)를 계산하는 것은 매우 어려워 대부분의 저자들은 근사적인 방법을 도입하였다. 즉, [1], [4], [5] 및 [6]에서는 PEP(pairwise error probability)를 곱의 형태로 나타낼 수 있도록 근사화 한 후, 고려된 길쌈부호(Convolutional code)의 전달함수를 이용하여 모든 오류사건의 합을 구하였다. 그리고 [2], [3] 및 [6]에서는 PEP를 정확하게 계산하였지만, 오류사건들 중에서 몇개의 우세한 것만을 택하여 계산함으로써 유니온 바운드가 보다 오류확률의 근사값을 구하고자 하였다.

본 논문에서는 전달함수와 PEP의 정확한 계산법 [3]을 결합함으로써, 모든 오류사건을 고려한 TUB에 대한 정확한 표현방법을 구하고자 한다. 바꿔 말하면 TUB에 대한 Laplace 변환을 구할 것이며, 이는 다시 선적분에 의하여 가장 근접한 한계(tight bound)를 얻을 수 있다. 여기서는 주로 가시성분(line-of-sight

LOS)이 존재하는 리시안 채널(Rician channel)에 대하여 고려하였으며, 페이딩 대역폭이 심볼률의 수 페센트 이하인 주파수 비선택적 페이딩(flat fading)을 가정하였다. 고려된 변조방식은 TCM 변조된 PAM 및 PSK이며, 차동검파방식과 이상적인 동기검파에 대하여 해석하였다.

II. 시스템 모델

그림 1은 송수신 링크의 모델이다. m개의 비트로 구성된 k 번째 심볼 $a(k)$ 는 길쌈 부호화되어 m+1 비트의 심볼 $c(k)$ 이 된 후 매핑 함수 $x = k(c)$ 에 의하여 복소 스칼라 $x(k)$ 로 매핑된다. $x(k)$ 는 이상적인 인터리버에 입력되어 $x'(k)$ 로 출력되며, 인터리버의 출력 시퀀스는 단위전력 펄스 성형 필터(unit energy pulse shaping filter)를 통과하게 된다. 결국 전송신호의 복소 진폭은 $s(t)$ 이다. 주파수 비선택적 페이딩을 가정하였으므로, 복소 페이딩 이득 $g(t)$ 는 전송신호에 곱해지며, 수신기 전단에서 전력 스펙트럼이 N_0 인 복소 부가 가우시안 잡음(complex additive Gaussian noise)이 더해진다. 수신된 신호는 전송 펄스에 정합된 정합필터(matched filter)를 통과하고, $\sqrt{N_0}$ 에 의하여 정규화된 후, 심볼률로 샘플되어 시퀀스 $r'(k)$ 로 출력된다. 여기서 (*)은 디인터리빙되기 이전의 값들을 의미한다. 동시에 채널 추정기에서도 채널이득의 추정값 $v(k)$ 를 출력하는데, 이는 주로 파이럿-톤 또는 파이럿-심볼을 이용하거나, 차동검파의 경우, 이전 심볼을 기준으로 한 정합 필터의 출력에서 얻을 수 있다. 디인터리빙된 수신샘플 $r(k)$ 및 채널추정치 $v(k)$ 는 트렐리스 복호를 위하여 Viterbi 복호기에 입력된다. 본 논문에서는 인터리빙 깊이가 무한인 이상적인 인터리버를 가정하였기 때문에 $r(k)$ 들은 송신된 신호를 조건부로 하여 서로 통계적으로 독립이라 볼 수 있으며, $v(k)$ 역시 마찬가지다.

페이딩이 심볼률에 비하여 느리다고 가정하면, 디

인터리버의 출력은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$r(k) = u(k)x(k) + n(k) \quad (1)$$

여기서 $u(k) = \frac{g(k)}{\sqrt{N_0}}$ 는 정규화된 이득이며, $n(k)$ 는 k 번째 잡음 샘플이다. 신호의 성좌점(constellation)을 $E[|x(k)|^2] = 1$ 이 되도록 정의한다. 여기서, $E[\cdot]$ 은 기대값을 의미한다. 채널이득은 평균이 m_g , 분산이 $\sigma_g^2 = \frac{1}{2} E[|g(k) - m_g|^2]$ 인 가우시안 랜덤변수이다. 따라서 정규화된 채널이득 $u(k)$ 도 평균이

$$m = E[u] = \frac{m_g}{\sqrt{N_0}} \quad (3)$$

이고 분산이

$$\sigma_u^2 = \frac{\sigma_g^2}{N_0} \quad (4)$$

인 가우시안 랜덤변수가 된다.

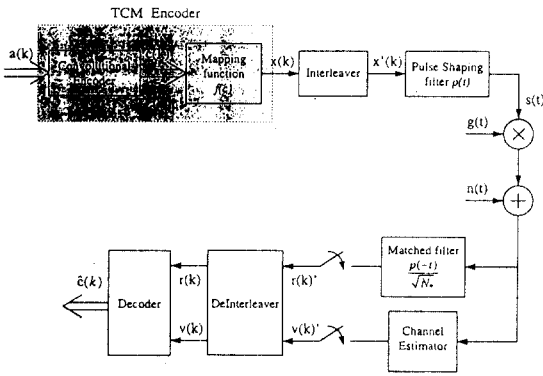


그림 1. 시스템 블록도
Fig. 1 System Block Diagram

부가잡음의 분산이 $\sigma_n^2 = 1$ 이므로, 심볼당 신호 대 잡음비는

$$\Gamma_s = \frac{1}{2} E[|u|^2] = \frac{1}{2} |m|^2 + \sigma_u^2 = \frac{1}{N} \left(\frac{1}{2} |m_g|^2 + \sigma_g^2 \right) \quad (5)$$

이며, $x(k)$ 를 조건으로 한 r 의 분산은

$$\sigma_{r|c}^2 = \sigma_u^2 |x(k)|^2 + 1 \quad (6)$$

라이스 계수 K 는

$$K = \frac{|m|^2}{2\sigma_u^2} \quad (7)$$

으로 주어진다. 만일 $K=0$ 일 경우는 레일리 페이딩(Ratleigh fading)을 의미하며, $K=\infty$ 일 경우는 부가백색잡음 채널을 의미한다.

복조기가 효과적으로 동작하기 위해서는 채널추정치 $v(k)$ 는 $u(k)$ 와 높은 상관관계를 가져야한다. 본 논문에서는 바이어스되지 않은 추정기를 가정한다. 즉,

$$E[v] = E[u] = m \quad (8)$$

을 만족하며, u 와 v 의 공분산(covariance) 및 상관계수(correlation coefficient)는 각각

$$\sigma_{uv}^2 = \frac{1}{2} E[u(k)v^*(k)] - \frac{1}{2} |m|^2 \quad (9)$$

$$\mu = \frac{\sigma_{uv}^2}{\sigma_u \sigma_v} \quad (10)$$

로 표현된다. 채널추정기의 평균자승오차(mean squared error)는

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{2} E[|u-v|^2] = \sigma_u^2 + \sigma_v^2 - 2Re\{\sigma_{uv}^2\} \quad (11)$$

단, σ_v^2 은 v 의 분산이며, 이상적인 채널추정기의 경우(perfect channel state information)에서는 $\mu=1$, $\sigma_e^2=0$ 가 된다. 마지막으로, $r(k)$ 와 $v(k)$ 의 조건부 공분산(conditional covariance)은 다음식으로 주어진다.

$$\sigma_{rv|c}^2 = \frac{1}{2} E[r(k)v^*(k)|x(k)] - \frac{1}{2} |m|^2 = \sigma_{uv}^2 x(k) \quad (12)$$

TCM 디코더는 수신신호 시퀀스 $R = (\dots, r(k), r(k+1), \dots)$ 와 채널 추정치 $V = (\dots, v(k), v(k+1), \dots)$ 를 입력으로 받아 다음의 자승 유클리디안거리(squared Euclidean distance)의 합이 최소가 되는 부호어를 선택한다.

$$M(r(k), v(k), c(k)) = \frac{|r(k) - v(k)x(k)|^2}{2} \quad (13)$$

윗식에서 $\frac{1}{2}$ 은 문헌[3]과 [7]의 결과와의 일치를 위한 계수이다.

Ⅲ. 오류 사건 확률(Pairwise Error Probability : PEP)

본 절에서는 특성함수를 이용하여 오류사건확률(PEP)을 계산하는 방법[3]에 관하여 요약하고자 한다. 길이가 L 인 오류사건에 대하여 전송된 부호어 및 심볼이 각각 $C = (c(1), \dots, c(L))$, $(x(1), \dots, x(L))$ 이고, 오류 부호 및 심볼이 $\hat{C} = (\hat{c}(1), \dots, \hat{c}(L))$, $(\hat{x}(1), \dots, \hat{x}(L))$ 라 가정하자. 만일 \hat{C} 의 메트릭이 C 의 메트릭보다 작을 때, 바꿔 말하면 메트릭의 차이가 음수일 때 오류가 발생할 것이다. 즉,

$$D = \sum_{k=1}^L d(r(k), v(k), c(k), \hat{c}(k)) < 0 \quad (14)$$

단, $d(r, v, c, \hat{c}) = M(r, v, \hat{c}) - M(r, v, c)$ 는 심볼 메트릭의 차를 의미하고, 식(13)을 대입하면 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$d(r, v, c, \hat{c}) = A|r|^2 + B|v|^2 + 2Re[Crv^*] \quad (15)$$

단, $A = 0, B = \frac{1}{2} (|\hat{x}|^2 - |x|^2)$

그리고 $C = \frac{1}{2} (x^* - \hat{x}^*)$ 이다.

식(15)의 메트릭 차, d 는 평균이 영이 아닌, 상관된 복소 가우시안 랜덤변수(non-zero mean, correlated, complex Gaussian random variables)의 쿼드라틱(quadratic) 표현이다. 식(15)의 랜덤변수의 확률 밀도에 대한 라플라스변환, 즉, 특성함수(characteristic function)는 다음과 같이 표현될 수 있다[8][9].

$$\Phi_d(s, c, \hat{c}) = \frac{p_L(c, \hat{c}) p_R(c, \hat{c})}{(s - p_L(c, \hat{c}))(s - p_R(c, \hat{c}))} \cdot \exp\left\{ \frac{p_L(c, \hat{c}) p_R(c, \hat{c})}{(s - p_L(c, \hat{c}))(s - p_R(c, \hat{c}))} \right\} \quad (16)$$

$$s\{\alpha_1(c, \hat{c}) - \alpha_2(c, \hat{c})\}$$

좌반부 극점(p_L)과 우반부 극점(p_R)은 각각 다음과 같이 표현된다[3].

$$\begin{cases} p_L(c, \hat{c}) \\ p_R(c, \hat{c}) \end{cases} = w(c, \hat{c}) \pm \sqrt{w(c, \hat{c})^2 - p_L(c, \hat{c}) p_R(c, \hat{c})} \quad (17)$$

그리고 극점의 곱과 합의 반값은 각각 식(18), 식(19)로 주어진다.

$$p_L(c, \hat{c}) p_R(c, \hat{c}) = \frac{-1}{|\hat{x} - x|^2 [|\hat{x}|^2 (\sigma_u^2 \sigma_v^2 - |\sigma_{uv}|^4) + \sigma_c^2]} \quad (18)$$

$$w(c, \hat{c}) = \frac{\sigma_c^2 (|\hat{x}|^2 - |x|^2) + 2Re\{(|\hat{x}|^2 - x\hat{x}^*) \sigma_{uv}^2\}}{2|\hat{x} - x|^2 [|\hat{x}|^2 (\sigma_u^2 \sigma_v^2 - |\sigma_{uv}|^4) + \sigma_c^2]} \quad (19)$$

단,

$$\alpha_2(c, \hat{c}) = \frac{1}{2} |\hat{x} - x|^2 |m|^2 \quad (20)$$

$$\alpha_1(c, \hat{c}) = \alpha_2(c, \hat{c}) [|\hat{x}|^2 \sigma_c^2 + 1] \quad (21)$$

이상적인 인터리빙을 가정하였으므로 랜덤변수들은 통계적으로 독립이며, 오류 사건의 메트릭 차이 D 에 대한 특성함수는

$$\Phi_D(s, C, \hat{C}) = \prod_{k=1}^L \Phi_d(s, c(k), \hat{c}(k)) \quad (22)$$

로 표현된다. 식(22)의 수렴 영역은 최우측 좌반부 극점과 최좌측 우반부 극점 사이에 존재한다. 특성함수는 라플라스 역변환에 의하여 확률밀도함수가 되는데, 오류사건확률 즉 D 가 음수가 될 확률은 확률밀도를 적분함으로써 구해진다. 즉, 오류사건확률은

$$P_e(C, \hat{C}) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} \frac{1}{s} \Phi_D(s, C, \hat{C}) ds \quad (23)$$

이며, 적분선(integration line)의 위치 σ 는 $0 < \text{Re}[s] < \text{최소우반부극점}$ 으로 정의되는 수렴영역내에 존재해야 한다. 문헌[6]에서 보였듯이 함수 $\Phi_D(s, C, \hat{C})$ 는 s 가 원점에서 멀어질 때 빠르게 감소하므로 식(23)의

무한적분은 적절한 길이의 유한선적분으로 대체되어 도 정확한 결과를 얻을 수 있다.

1. 이상적인 채널추정기의 경우(Perfect CSI)

이상적인 채널추정기, 즉 $v(k) = u(k)$ 를 가정할 경우 식(18)-(21)은 다음과 같이 표현된다.

$$p_L(c, \hat{c}) p_R(c, \hat{c}) = -\frac{P_s}{|\hat{x} - x|^2} \quad (24)$$

$$u(c, \hat{c}) = \frac{1}{2} \quad (25)$$

$$\alpha_1(c, \hat{c}) = \alpha_2(c, \hat{c}) = \frac{|x - \hat{x}|^2 K}{P_s} \quad (26)$$

단, $P_s = \frac{1+K}{\Gamma_s}$ 이다.

p_L 과 p_R 사이에서 실수의 s 값에 대하여 기본특성함수 $\Phi_d(s, c, \hat{c})$ 는 x 와 \hat{x} 의 조합에 관계 없이 $s = \frac{1}{2}$ 에서 최소의 값을 가진다.

2. Differential PSK

Differential PSK에서는 이전 수신샘플 $r(k-1)$ 을 페이딩 이득 $u(k)$ 의 추정치로 사용한다. 즉, $v(k) = u(k-1)x(k-1) + n(k-1)$ 이며 편의상 $x(k-1) = 1$ 로 두자. 동방성산란(Isotropic scattering)을 가정할 경우, $u(k)$ 와 $v(k)$ 의 공분산은

$$\sigma_{uv}^2 = \sigma_u^2 J = \frac{J}{P_s} \quad (28)$$

$u(k)$ 의 분산은

$$\sigma_v^2 = 1 + \sigma_u^2 = \frac{1 + P_s}{P_s} \quad (29)$$

로 주어지며

$$p_L(c, \hat{c}) p_R(c, \hat{c}) = -\frac{P_s^2}{|x - \hat{x}|^2 (P_s + 1 - J)(P_s + 1 + J)} \quad (30)$$

$$u(c, \hat{c}) = \frac{JP_s}{2(1 + P_s + J)(1 + P_s - J)} \quad (31)$$

$$\alpha_2(c, \hat{c}) = \frac{|x - \hat{x}|^2 K}{P_s} \quad (32)$$

$$\alpha_1(c, \hat{c}) = \frac{2\alpha_2(c, \hat{c})}{P_s} (1 + P_s - J) \quad (33)$$

여기서 $J = J_0(2\pi f_d T)$ 이며, J_0 는 베셀 함수, $f_d T$ 는 정규화된 페이드율이다.

IV. 오류상태도의 전달함수

TCM에서 전달함수를 이용한 바운드를 구하는 가장 일반적인 방법은 오류사건확률(pairwise error probability)을 곱의형태로 표현하는 것이며, 대표적인 방법이 Chernoff 바운드 이다. 즉, $C = (c(1), \dots, c(L))$, 이 전송 부호어이고, $\hat{C} = (\hat{c}(1), \dots, \hat{c}(L))$ 이 오류부호어 일 때 오류사건확률을 다음과 같이 표현한다.

$$P_e = (C, \hat{C}) \leq \prod_{k=1}^L P_u(c(k), \hat{c}(k)) \quad (34)$$

단, $P_u(c(k), \hat{c}(k))$ 는 요소 상위한계(constituent upper-bound)이다. 신호의 성좌점(constellation)의 개수가 유한하기 때문에 요소 상위한계의 집합은 유한할 수밖에 없으며 이 집합을 기본 상위한계(elementary upperbounds)라 부른다. 전달함수 한계(transfer function bound)를 구하기 위해서는 적절한 기본 상위한계를 오류상태도의 전이(transition)에 할당한 후 전달함수를 구하는 방법을 이용한다.

본 연구에서 제안한 전달함수 한계는 위의 방법과 유사하지만, 오류상태도의 각 전이(transition)에 기본 상위한계를 사용하는 대신, 이에 해당되는 기본 특성함수를 사용한다는 점이 다르다. 결국 구해진 전달함수는 TUB(tight upper bound)의 특성함수이며 이것을 라플라스 역변환하면 TUB를 구할 수 있다.

1. 전달함수

그림 2는 TCM 부호기를 보여준 것이다. 크기가 $M' = 2^m$ 신호 집합으로부터 선택된 심볼 $a(k)$ 는 m 비트로 구성되며, TCM 부호기는 2^{m+1} 개의 성좌점 중의 하나를 선택하여 복소 채널 심볼(complex channel symbol) $x(k)$ 를 출력한다. 부호기를 살펴보면, m 중에 \overline{m} 비트는 부호율 $\frac{\overline{m}}{m+1}$ 인 길쌈부호에 의하여 부호화되어 $\overline{m} + 1$ 비트가 된 후 성좌점의 부분집합(sub-

constellation)을 선택하며, 나머지 $m - \bar{m}$ 비트는 성좌 점 부분집합내의 심볼을 선택하는데 이용한다. 결국 $m + 1$ 비트의 부호어 $c(k)$ 가 매핑 함수(mapping function) $x = f(c)$ 에 의하여 $x(k)$ 로 매핑이 되는 것이다.

길쌈부호기는 N 개의 상태 ($\sigma_0, \dots, \sigma_{N-1}$)를 가지며, 그림 3a의 격자도(trellis diagram)에 의하여 잘 표현이 되는데, 각 상태의 전이(transition)는 입출력 비트가 a/c 와 같이 명시되어 있다. 각 상태로의 입력 및 출력 되는 전이의 수는 $2^{\bar{m}}$ 이며 부호화되지 않은 $m - \bar{m}$ 비트는 병렬 전이(parallel transition)을 발생 시킨다. 오류확률의 합집합 한계(union bound)를 구하기 위해서는 모든 가능한 오류사건들을 고려해야 한다. 발생이 가능한 오류는 길쌈부호에 의하여 제한이 되므로, 모든 오류사건들을 열거하는 직접적인 방법은 오류상태도를 이용하는 것이다. 길쌈부호의 선형성에 의하여, 오류상태도는 무오류 상태(ϵ_0 : error free state, all-zero state)가 source와 sink로 나누어진다는 것을 제외하면 길쌈부호의 상태도와 동일하다. 그림 3c는 그림 3a의 격자도에 대한 오류상태도이다.

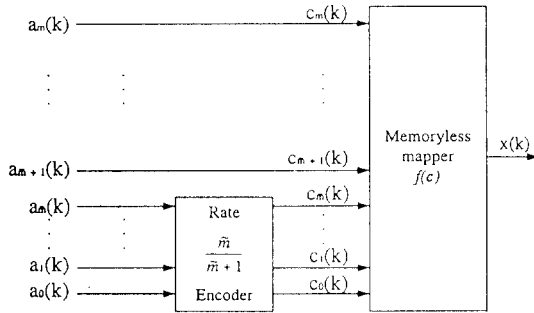


그림 2. TCM 변조기의 구조
Fig. 2 General Structure for TCM Schemes

특성함수에 의하여 오류사건확률을 열거하기 위하여, 먼저 오류변환행렬(error transform matrix) $G(s, e)$ 을 정의하자. $G(s, e)$ 의 i, j 원소는

$$[G(s, e)]_{i,j} = \frac{1}{M'} \sum_{c_{i \rightarrow j}} \Phi_d(s, c_{i \rightarrow j}, c_{i \rightarrow j} \oplus e) \quad (35)$$

여기서 $c_{i \rightarrow j}$ 는 상태 σ_i 에서 σ_j 로의 전이에 관련된 부호

어이며, e 는 오류어(error word)이다. 오류상태도에서, 상태 ϵ_m 에서 ϵ_n 으로의 전이에 대하여는 $F(s, I, e)$ 의 label 행렬(label matrix)이 명시되며 다음과 같이 정의된다.

$$F(s, I, e_{m \rightarrow n}) = I^b \sum_{c_{m \rightarrow n}} G(s, e) \quad (36)$$

단, I 는 보조 변수, b 는 해당 전이에 의하여 결과적으로 발생될 소스 비트 오류의 개수이다. 그리고, 상태 ϵ_m 에서 ϵ_n 으로의 전이를 기시키는 모든 오류 사전들의 합을 취한다. 따라서, 행렬전달함수(matrix transfer function) $T(s, I)$ 가 오류상태도의 전달함수를 계산함으로써 구해지며, 오류변환 (error transfer)은

$$t(s, I) = \frac{1}{N} \mathbf{1}^T T(s, I) \mathbf{1} \quad (37)$$

으로 주어진다. 여기서 $\mathbf{1}$ 은 단위 행렬이다. 주목할 점은, $t(s, I)$ 가 TUB의 "특성함수"의 역할을 한다는 점이다. 그러나, 이것은 $s=0$ 에서 단위값을 갖지 않으므로 진정한 특성함수라고 할 수는 없다.

부호가 균일성(uniform)을 가진다면, 모든 e 에 대하여, 오류변환행렬 $G(s, I)$ 의 각행의 합이 모두 같아진다. 이 경우, 오류 변환 $t(s, I)$ 는 오류상태도의 label 행렬이 행의 합으로 직접 대치된 후 계산된 전달함수이다. 일반적으로, $t(s, I)$ 는 항상 다음과 같은 형태로 표현될 수 있다.

$$t(s, I) = Y(s, I) X(s, I) Z(s, I) \quad (38)$$

단,

$$X(s, I) = \sum_{n=0}^{\infty} H^n(s, I) = [1 - H(s, I)]^{-1} \quad (39)$$

이다. $H(s, I)$ 는 $(N-1) \times (N-1)$ 의 오류상태도의 전이 행렬이며, (m, n) 번째 요소는 식(36) label 행렬 $F(s, I, e_{m \rightarrow n})$ 의 행의 합으로 주어진다. 행 벡터 $Y(s, I)$ 및 열 벡터 $Z(s, I)$ 도 $H(s, I)$ 와 유사하게 정의되며, m 번째 요소가 각각 오류상태도에서 $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon_m$ 의 전이 및 $\epsilon_m \rightarrow \epsilon_0$ 의 전이에 관련된다는 점이 다르다.

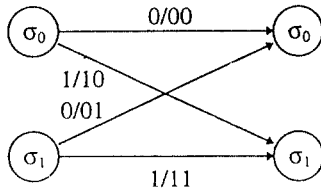
2. 2-상태 4 PAM

예로서 그림 3의 2-상태, 4 PAM의 경우를 고려해보자. 신호 성자점의 크기가 일정하지 않기 때문에, 기본 특성함수는 자승 유클리디안 거리 뿐만 아니라, 전송 신호의 크기에 의하여 결정된다. 가능한 오류 변환 행렬들은 다음과 같다.

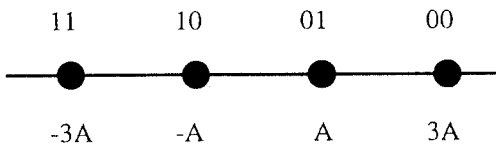
$$G(s, 10) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Phi(s, 00, 10) & \Phi(s, 10, 00) \\ \Phi(s, 01, 11) & \Phi(s, 11, 01) \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$G(s, 01) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Phi(s, 00, 01) & \Phi(s, 10, 11) \\ \Phi(s, 01, 00) & \Phi(s, 11, 10) \end{bmatrix} \quad (41)$$

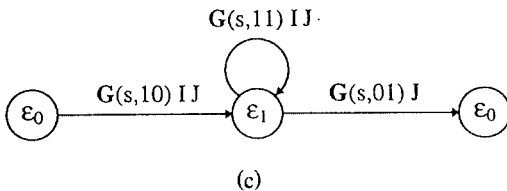
$$G(s, 11) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Phi(s, 00, 11) & \Phi(s, 10, 01) \\ \Phi(s, 01, 10) & \Phi(s, 11, 00) \end{bmatrix} \quad (42)$$



(a)



(b)



(c)

그림 3. 2-상태 4PAM 부호: (a) Trellis, (b) 신호 성자점, (c) 오류상태도

Fig. 3 2-state 4PAM Code: (a) Trellis, (b) Signal Constellation (c) Error State Diagram

모든 행렬의 행의 합은 동일하므로, 균일 부호(uniform code)이며, $Y(s, l) = \frac{1}{2} I(\Phi(s, 00, 10) + \Phi(s, 10, 00))$,

$H(s, l) = \frac{1}{2} I(\Phi(s, 00, 11) + \Phi(s, 10, 01))$ 및 $Z(s, l) = \frac{1}{2} I(\Phi(s, 00, 01) + \Phi(s, 10, 11))$ 로 주어진다. 이때, 오류변환(error transform)은

$$f(s, l) = \frac{\frac{1}{4} I(\Phi(s, 00, 10) + \Phi(s, 10, 00))(\Phi(s, 00, 01) + \Phi(s, 10, 11))}{1 - \frac{1}{2} I(\Phi(s, 00, 11) + \Phi(s, 10, 01))} \quad (43)$$

으로 표현된다.

3. Ungerboeck의 4-상태 및 8-상태 8 PSK 부호

PSK에 대한 예로서 Ungerboeck의 4-상태 및 8-상태 부호[11]에 대하여 적용하고자 한다. 이 부호들의 오류 상태도는 문헌[2]의 그림 6 및 그림 8에 각각 나타나 있으며, 여기서는 반복하지 않겠다. 먼저, $d_0^2 < d_1^2 < \dots < d_4^2$ 을 8 PSK의 자승 유클리디안 거리의 집합, $\Phi_0(s), \Phi_1(s), \dots, \Phi_4(s)$ 를 각각의 자승거리에 관련된 기본 특성함수라 가정하자. 여기서 $d_0^2 = 0$ 및 $\Phi_0(s) = 1$ 이다. Chernoff 한계의 경우, 자승거리가 d_i^2 인 브랜치 오류 사건(branch error event)에는 D^{d_i} 을 대입하는데, 본 논문에서는 기본 특성함수 $\Phi_i(s)$ 를 대입한다.

문헌[2]의 그림 6의 오류상태도에서, 4-상태 부호의 $X(s, l)$ 와 $Y(s, l)$ 는 각각 문헌[2]의 식(18)의 첫 번째 항 및 두 번째 항에 대한 전치행렬로 주어짐을 보일 수 있으며,

$$Z(s, l) = [\alpha_{13} \ \alpha_{14} \ \alpha_{15}]^t \quad (44)$$

이고, 여기서 α_k 는 역시 문헌[2]의 표 2에 정의가 되어 있으나, 본 연구에서 제안한 TUB 기법에서는 다음과 같이 특성함수를 대입하여야 한다.

$$\begin{aligned} W(001) &= \Phi_1(s) \\ W(010) &= W(110) = \Phi_2(s) \\ W(011) &= W(111) = \frac{1}{2} (\Phi_1(s) + \Phi_3(s)) \end{aligned} \quad (45)$$

$$W(100) = \Phi_4(s)$$

$$W(101) = \Phi_3(s)$$

8-상태 부호의 오류상태도 또한 문헌[2]의 그림 8에서 볼 수 있으며, $X(s, l)$ 와 $Y(s, l)$ 는 각각 문헌[2]의 식(20)의 첫 번째 항 및 두 번째 항에 대한 전치행렬로 주어짐을 보일 수 있다. 그리고 열벡터 $Z(s, l)$ 는

$$Z(s, l) = [0 \quad \alpha_4 \quad 0 \quad \alpha_{16} \quad 0 \quad \alpha_{24} \quad 0]^T \quad (46)$$

로 주어지며, α_k 는 문헌[2]의 표 3과 식(45)에 의하여 정의된다.

V. True Union Bound의 계산

오류변환 $t(s, l)$ 는 오류사건 확률 또는 비트오류확률 등을 구하는데 사용할 수 있다. 오류사건 확률은

$$P_e = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \frac{1}{s} [t(s, l)]_{l=1} ds \quad (47)$$

으로 표현이 되는데, 좀더 정확히 말하면 모든 가능한 오류사건에 대한 정확한 확률값을 합산한 진정한 합집합 한계(TUB)이므로 고려되는 부호의 오류성능(error performance)에 대한 평가라고 할 수 있다.

비트오류확률에 대한 TUB는 $t(s, l)$ 를 l 에 대해 편미분을 취하고 다음식을 이용하여 계산할 수 있다.

$$P_b = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \left[\frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial l} t(s, l) \right]_{l=1} ds$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} q_b(s) ds \quad (48)$$

단, $q_b(s)$ 는 비트 오류확률의 변환이며

$$q_b(s) = \frac{1}{m} (Y'(s)X(s)Z(s) + Y(s)X(s)H'(s)X(s)Z(s) + Y(s)X(s)Z'(s)) \quad (49)$$

으로 표현될 수 있다. 여기서, $H'(s)$, $Y'(s)$ 및 $Z'(s)$ 는 각각 $H(s, l)$, $Y(s, l)$ 및 $Z(s, l)$ 를 l 에 대하여 편미분한 후 $l=1$ 을 대입하여 계산한 행렬들이다. 마찬가지로

$X(s)$, $Y(s)$ 및 $Z(s)$ 도 각각 $X(s, l)$, $Y(s, l)$ 및 $Z(s, l)$ 를 $l=1$ 에서 계산한 행렬들이다.

1. 결합 수렴 영역(Series Region of Convergence)

식(47) 및 식(48)은 $t(s, l)$ 와 $q_b(s)$ 의 수렴영역(region of convergence) 내에서 선적분을 취함으로써 계산될 수 있다. 수렴영역은 기본특성함수의 수렴영역들의 부분집합이며, 다음의 구간내에 존재한다.

$$LP_{\max} < Re\{s\} < RP_{\min} \quad (50)$$

윗식에서, $Re\{s\}$ 는 s 의 실수부, LP_{\max} 및 RP_{\min} 은 각각 모든 기본 특성함수의 극점 중, 최대 좌반부 극점 및 최소 우반부 극점을 나타낸다. 본논문의 이후 부터는 $t(s, l)$ 와 $q_b(s)$ 의 수렴영역을 결합수렴영역(series region of convergence: SROC)라 하자. SROC내의 임의의 s 값에서, 행렬 $H(s)$ 의 스펙트럼반경(최대 고유치의 절대값)은 항상 1 보다 작은 값을 가지며, 결과적으로 식(39)에 포함된 행렬의 수열이 수렴하게 될 것이다. 예를 들어, 식(43)의 PAM의 경우, SROC 내의 s 에서는 $|\Phi(s, 00, 11) + \Phi(s, 10, 01)| < 2$ 를 항상 만족한다.

선적분을 이용한 역변환 방법을 사용할 경우, SROC의 전영역을 알아야 할 필요는 없다. 단지 선적분을 취할 수 있는 실수축 상의 한점만 알아내면 충분하다. 이상적인 채널추정기(perfect CSI)의 경우, s 가 실수일 때 $s=1/2$ 에서 최소값을 가지며, 이점에 대하여 좌우대칭이다. 따라서 SROC가 존재한다면 반드시 $s=1/2$ 이 포함될 것이다.

차동 검파 PSK의 경우, 기본 특성 함수들의 최소점이 반드시 같지는 않다. 그러나 다음에 설명하는 특성을 이용하면 SROC를 어렵지 않게 구할 수 있다. $\Phi_k(s)$, $i=0, 1, 2 \dots M/2$ 를 MPSK 성좌점의 자승 유클리디안 거리가 d_i^2 인 경우의 기본 특성 함수이며, $d_0^2 < d_1^2 < \dots < d_{M/2}^2$ 라 가정하자. 이 경우 $s=0$ 와 $s=2w$ 사이의 (w 는 식(19)에 정의됨) 실수의 s 값에서, 모든 $\Phi_k(s)$ 들은 양의 값을 가지며 $d_i^2 < d_j^2$ 일 경우 $\Phi_i(s) > \Phi_j(s)$ 의 관계를 갖는다는 것을 보일 수 있다. 또한, $\Phi_k(s)$ $k=2, 3 \dots M/2$ 을 모두 $\Phi_1(s)$ 로 대치시킨 행렬을 $H_U(s)$ 라 하면, $H_U(s)$ 는 원래의 $H(s)$ 보다 항상 크거나 같을 것이다. 이것은 문헌[11]의 65페이지의 정리를 이용하여 설명이 될 수 있다.

Theorem : If $H_U(s)$ is a non-negative irreducible matrix with a spectral radius of r_u , $H(s)$ is another non-negative matrix, and for all (i, j) pairs $[H_U(s)]_{i, j} \geq [H(s)]_{i, j}$, then the spectral radius r of $H(s)$ satisfies $r \leq r_u$.

여기서, $[H_U(s)]_{i, j}$ 와 $[H(s)]_{i, j}$ 는 각각 H_U 및 $H(s)$ 의 (i, j) 번째 원소이다. 위의 정리는, 만일 $[H_U(s)]_{i, j}$ 가 $0 < s < 2w$ 에서 SROC를 가지고 있다면, 그것은 $[H(s)]_{i, j}$ 의 SROC의 부분집합이라는 것을 의미하고 있으며, 아울러, $[H_U(s)]_{i, j}$ 가 SROC를 가진다면, $\Phi_1(s)$ 의 최소점이 반드시 포함된다는 것을 알 수 있다. 바꿔말하면, DPSK의 경우, SROC를 찾는 문제는 최악 조건의 기본특성함수를 가지고 최소점을 찾는 문제로 바뀌게 되는데, 이것은 간단한 다항식의 근을 구하는 문제이기 때문에 매우 쉽게 구할 수 있다. 게다가, 우리가 관심을 가지는 대부분의 신호대잡음 비율에 대해서는 거의 $0 < s < 2w$ 에서 수렴영역을 발견할 수 있었다.

2. Chernoff Bound와 True Union Bound의 관계

식(14)의 랜덤변수 D 는 독립적인 변수들의 합이며, D 가 음수가 될 확률은 Chernoff bound에 의하여 다음과 같이 주어질 수 있다.

$$P_c(\sigma) = E(e^{-\sigma D}) = \prod_{k=1}^K E(e^{-\sigma \delta_k}) \quad (52)$$

단, $\delta_k = d(\tau(k), v(k), c(k), \hat{c}(k))$ 이고, σ 는 양의 실수이며 Chernoff bound 계수라한다. 가장 근접한 한계는 식(52)를 σ 에 대하여 최소화 함으로써 구할 수 있는데, 모든 기본 상위한계(elementary upper bound), $E[e^{-\sigma \delta_k}]$ 들이 같은 σ 에서 최소값을 갖는 경우¹⁾라면 최소화는 간단하다. 그러나 기본 상위한계들이 서로 다른 σ 에서 최소점을 갖는 경우에는 전달함수한계(transfer function bound)를 모든 σ 에 대하여 최소화해야 한다. 식(52)를 자세히 살펴보면, 각 기본 상위한계는 기본 특성함수에 $s = \sigma$ 를 대입한 것임을 알 수 있다. 즉,

$$E[e^{-\sigma \delta_k}] = \Phi_d(\sigma, c(k), \hat{c}(k)) \quad (53)$$

결국 식(52)로부터 얻어지는 전달함수-Chernoff 한계는 오류변환 $q_b(s)$ 를 $s = \sigma$ 에서 계산한 값이라 볼 수 있다. 본 논문에서 제안한 TUB 기법은 적분선이 SROC에 존재하는 한, σ 의 위치에 민감하지 않으나, Chernoff 한계의 경우 σ 에 크게 영향을 받는다는 점을 지적할 수 있다.

VI. 결과 및 요약

이 절에서는 본 논문의 결과로서, Ungerboeck의 4-상태 및 8-상태 8PSK 코드[2, 11] 그리고 2-상태 4PAM 코드의 TUB(True Union Bound)와 Chernoff 한계를 비교하여 그림 3에 나타내었다. 이상적인 채널 추정기(Perfect CSI)의 경우와 차동검파를 하는 경우를 고려하였으며, 이상적인 채널 추정기의 경우, 식(23)의 적분선은 $\sigma = 1/2$ 에 위치하고 Chernoff 한계는 $q_b(1/2)$ 이 된다는 것을 알았다. 차동검파의 경우는 적분선은 최악조건 기본 특성함수의 최소점에 위치하며, Chernoff 한계는 같은 σ 값을 가지고 $q_b(\sigma)$ 를 계산한 값이 된다. 물론, Chernoff 한계에 대한 최적의 σ 를 찾을 수도 있지만, 본 연구에서는 그러한 과정을 수행하지 않았다. 함수 $q_b(s)$ 는 s 가 실수 축으로 부터 멀어짐에 따라 급속하게 단조 감소하기 때문에, 경험적으로 식(33), (34)의 무한적분이 구간 $[\sigma - j, \sigma + j]$ 의 유한적분으로 대체될 수 있음을 알았다. 비록 Huang와 Campbell[6]이 라이스 페이딩에서 DPSK 코드에 대한 몇 가지 오류 한계계산법을 제안했지만, 이것들은 TUB가 아니기 때문에 본 연구의 결과와 비교 하지 않았다.

이상적인 채널 추정기와 $5dB$ 의 채널 계수(K)의 라이스 페이딩에서의 4PAM 부호, 4-상태 8PSK 부호와 8-상태 8PSK 부호에 대한 오류한계와 시뮬레이션 결과를 그림 4, 5 그리고 6에 각각 나타내었다. 모든 경우에, Chernoff 한계는 시뮬레이션 결과에 비해 $2 \sim 3dB$ 떨어져 있는 반면 TUB는 매우 근접해 있음을 관찰할 수 있다. DPSK에 대한 결과는 그림 7과 8에 나타내었다. $f_d T = 0$ 과 $f_d T = 0.05$ 의 두 가지 페이드율(fade rate)을 고려하였으며, 역시 TUB가 매우 근접함을 관찰할 수 있었다. 아울러, 페이드율이 클수록 Chernoff

1) 모든 기본 상위한계(elementary upper bounds)가 같은 위치에서 최소값을 갖는 경우는: (1) 라이스 페이딩과 이상적인 채널추정기, (2) 레일리 고속 페이딩과 PSK, (3) 정적 라이스페이딩과 DPSK의 경우를 들 수 있다.

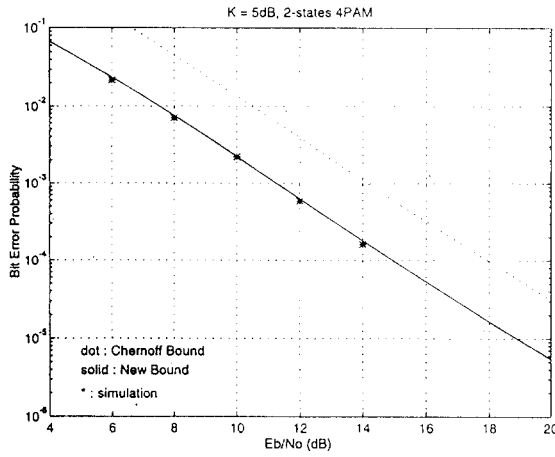


그림 4. 2상대 4PAM 부호의 상위한계(upper bound) 및 시뮬레이션 결과 (K = 5dB 라이스 페이딩, 이상적인 동기검파)

Fig. 4 Upper Bounds and Simulation Results for the 2-state 4PAM Code in Rician Fading with K = 5dB and Perfect CSI

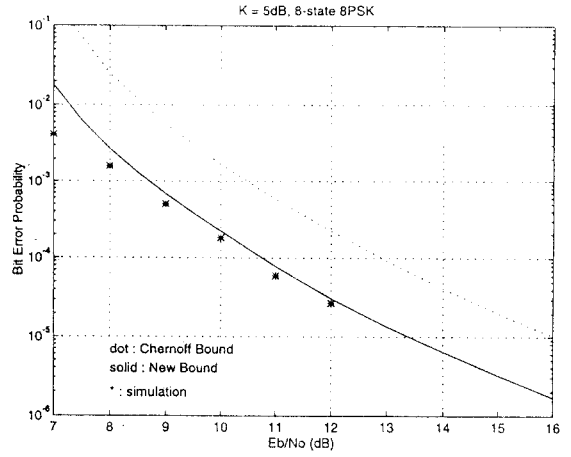


그림 6. 8상대 8PSK 부호의 상위한계(upper bound) 및 시뮬레이션 결과 (K = 5dB 라이스 페이딩, 이상적인 동기검파)

Fig. 6 Upper Bounds and Simulation Results for Ungerboeck's 7-state Code in Rician Fading with K = 5dB and Perfect CSI

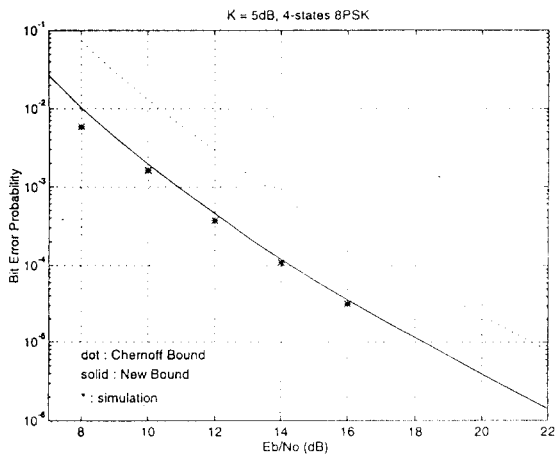


그림 5. 4상대 8PSK 부호의 상위한계(upper bound) 및 시뮬레이션 결과 (K = 5dB 라이스 페이딩, 이상적인 동기검파)

Fig. 5 Upper Bounds and Simulation Results for Ungerboeck's 4-state Code in Ricain Fading with K = 5dB and Perfect CSI

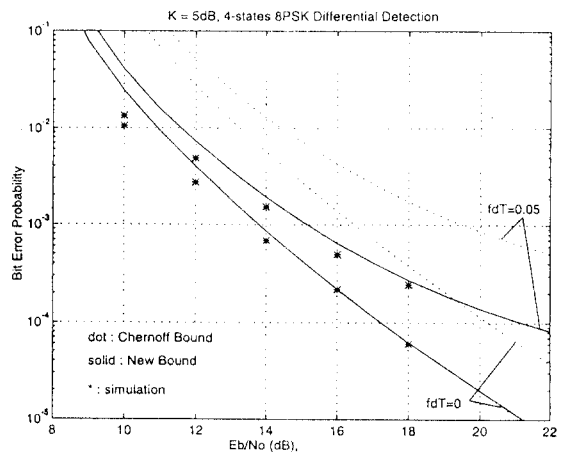


그림 7. 4상대 차동검파 8PSK 부호의 상위한계(upper bound) 및 시뮬레이션 결과 (K = 5dB 라이스 페이딩, 차동검파)

Fig. 7 Upper Bounds and Simulation Results for Ungerboeck's 4-state Code in Rician Fading with K = 5dB and Differential Detection

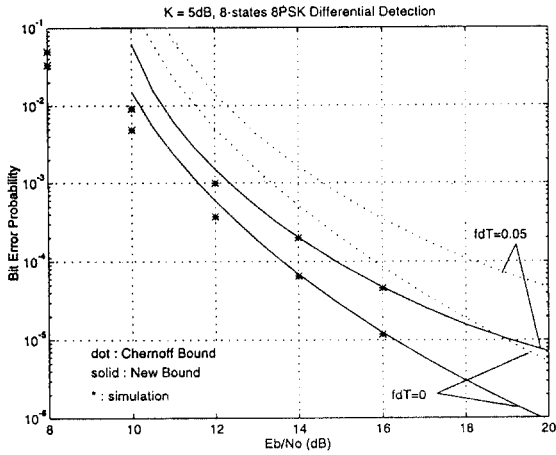


그림 8. 8상태 8PSK 부호의 상위한계(upper bound) 및 시뮬레이션 결과 (K = 5dB 라이스 페이딩, 이상적인 동기검파)

Fig. 8 Upper Bounds and Simulation Results for Ungerboeck's 8-state Code in TRician Fading with K = 5dB and Differential Detection

한계는 TUB와 더욱 멀어짐도 볼 수 있다.

본 논문에서 제안한 TUB의 계산 방법은 오류사건들을 디코릴레이션(decorrelation)하는 방법이 발견되지 않는 한 가장 근접한 바운드임에 틀림없다. 또한 이 방법은 동기검파, 차동검파, 파이릿검파 그리고 QAM과 PSK에 적용할 수 있는 매우 일반적인 것이다. 한가지 단점으로는 [1]과 [6]에서 제안한 방법보다 다소 많은 계산을 요구한다는 것이지만, 오늘날 컴퓨터의 연산 속도 및 심볼릭 연산 패키지의 이용을 고려할 경우, 이것은 그다지 심각한 결점이 될 수 없다고 본다.

참 고 문 헌

1. D. Divsalar and M.K. Simon, "The Design of trellis coded MPSK for fading channels: Performance criteria", IEEE Trans. Commun., vol. COM-36, pp. 1004-1012, Sept. 1988.
2. R.G. McKay, P.J. McLane, and E. Biglieri, "Error bounds for trellis coded MPSK on a fading mobile satellite channel", IEEE Trans. Commun., vol. 39,

pp. 1750-1761, Dec 1991.

3. J.K. Cavers and P. Ho, "Analysis of the error performance of trellis coded modulations in Rayleigh fading channels", IEEE Trans. Commun., vol. 40, pp. 74-80, Jan 1992.
4. K.Y. Chan and A. Bateman, "The performance of reference based M-ary PSK with trellis coded modulation in Rayleigh fading", IEEE Trans. Vehicular Technol., vol. 41, pp. 190-198, May 1992.
5. S.B. Slimane, and T. Le-Ngoc, "Tight bounds on the error probability of coded modulation schemes in Rayleigh fading channels", IEEE Trans. Vehicular Technol., Vol. 44, pp. 121-130, Feb. 1995.
6. J. Huang, and L.L. Campbell, "Trellis Coded MDPSK in Correlated and Shadowed Rician Fading Channels", IEEE Trans. Vehicular Technol., vol. 40, pp. 786-797, Nov. 1991.
7. J. Cavers, J.H. Kim, and P. Ho, "Exact Calculation of the Union Bound of Performance of Trellis Coded Modulation in Fading Channels", sub-accepted for publications, IEEE Trans. on Communications, Feb. 1996.
8. J.G. Proakis, Digital Communications, 3rd Edition, New York, McGraw Hill, 1995.
9. M. Schwartz, W. Bennett, and S. Stein, Communication Systems and Techniques, New York, McGraw Hill, 1966.
10. E. Biglieri, D. Divsalar, P.J. McLane, and M.K. Simon, Introduction to Trellis-coded Modulation with Applications, New York, Macmillan Publishing Company, 1991.
11. G. Ungerboeck, "Channel coding with multilevel/phase signals", IEEE Trans, Information Theory, vo. IT-28, pp. 55-67, Jan 1982.
12. F.R. Gantmacher, Matrix Theory, Vol. 2, Chelsea Publishing Company, New York, N.Y., 1959.



김 재 형(Jae Hyung Kim) 정회원

1983년 2월:고려대학교 공과대학 전자공학과(공학사)

1985년 2월:고려대학교 대학원 전자공학과(공학석사)

1989년 8월:고려대학교 대학원 전자공학과(공학박사)

1994년 3월~1995년 3월:Simon Fraser University(CANADA) Visiting Professor

1991년 3월~현재:창원대학교 제어계측공학과 부교수
※주관심분야:변복조, 부호이론, 위성통신, 이동통신

Paul K. M. Ho

1981년:Saskatchewan University(CANADA) 전기공학과(공학석사)

1985년:Queen's University(CANADA) 전기공학과(공학박사)

1985년~현재:Simon Fraser University, School of Engineering Science 교수

※주관심분야:Coding and Modulation, Mobile communication, CDMA, OFDM