

극점의 위치에 강인한 ARMA모델의 새로운 차수 결정 알고리즘

정희원 이 정 혜*, 광 지 혜**, 김 형 명**

ARMA Model Order Determination Methods Having Improved Robustness to Pole Location

Jung-Hye Lee*, Ji-Hye Gwak**, Hyung-Myung Kim** *Regular Members*

요 약

ARMA모델은 시스템 결정의 문제에 있어 가장 널리 쓰이는 모델이며 ARMA모델의 차수를 결정하는 문제는 ARMA모델을 모델링함에 있어 가장 중요한 첫단계이다. 본 논문에서는 정하고자 하는 모델의 두 극점의 절대값의 비가 일정값 이상으로 커지게 되면 기존의 알고리즘으로는 안 쪽 극점에 의한 차수를 찾기가 매우 힘들어짐을 밝혔다. 특히 단위원 근처에 극점들이 존재하게 되면 그에 비해 작은 절대값을 갖는 극점들의 존재를 찾아내기가 매우 어려워진다. 이러한 문제점들을 극복하기 위해 두 가지 방법이 제안되었다. 첫 번째 방법은 영점 삽입에 의한 보상을 이용해 단위원 근처 극점들의 영향을 줄이는 것이고 두 번째 방법은 ARMA(p,q)모델의 차수를 구하기 위해 역모델인 ARMA(q,p)모델을 이용하는 것이다. 예제를 통해 제안된 방법의 향상된 성능을 보였다.

ABSTRACT

ARMA model is widely used in the system model identifications. Selecting the model order is a critical first step toward the goal of modeling an ARMA process. In this paper, it is shown that the conventional methods fail to correctly determine the AR model order when the ratio of magnitude of two poles becomes large. When one or several poles are near the unit circle in the z-plane, it is hard to detect the presence of poles which have relatively smaller magnitude than them. To overcome this problem two methods are proposed. The first is to reduce the effect of the poles near the unit circle by adding zeros to compensate their effect. The second is to use the covariance of inverse ARMA(q,p) model to find the order of ARMA(p,q) model when no zeros are located close to the unit circle. Numerical examples are given and illustrate improved accuracy of the proposed methods.

I. 서 론

ARMA모델은 유리식 모델들 중에서 가장 널리 쓰이는 모델이다. 또한 모델의 차수를 정하는 일은 ARMA 과정을 모델링함에 있어 결정적인 역할을 하는 첫단계라 할 수 있다.

따라서 본 논문에서 다루고 있는 ARMA모델의 차수결정 문제는 ARMA모델이 쓰이는 다방면의 분야에

응용될 수 있는데, 음성 모델링, 전력밀도함수 추정, 의료영상 처리, 배열신호 처리, 전파탐지기, 수중음파 탐지기, 채널등화기 등이 이에 속한다. 구체적인 예로 전력밀도함수 추정에 어떻게 이용되는지 살펴보자. 전력밀도함수 추정 방법 중 매개변수 방법은 주어진 데이터를 ARMA형태로 모델링해서 매개변수를 구한 뒤 ARMA모델에 대한 전력밀도 함수식에 그 값들을 대입해서 전력밀도 함수를 추정하는 방법이다. 여기서

* LG전자 DTV연구소(puzzle@wm.lge.co.kr) 정희원, ** 한국과학기술원 전기 및 전자공학과(iihye@panda.kaist.ac.kr, hmkim@panda.kaist.ac.kr) 정희원
논문번호 : 98029-0119, 접수일자 : 1998년 1월 19일

매개변수는 모델 차수와 AR항의 계수, MA항의 계수이며 이 값들 중 모델 차수를 제일 먼저 구해야 한다. 이 과정에서 본 논문에서 다루고자 하는 차수 결정 방법이 쓰이는 것이다.

이와 같이 모델의 차수를 정하는 일은 매우 중요한 문제이며 지금까지 많은 사람들에 의해 연구되어 왔다. 차수 결정에 쓰이는 척도로 제일 먼저 제안된 것이 Akaike의 정보량척도(Akaike Information criterion)와 최종예측오차(Final Prediction Error)인데 이 척도들은 일관된 차수를 찾지 못한다는 단점이 있다[1]. 이러한 단점을 보완해 일관된 차수를 찾을 수 있는 척도로 제안된 것이 최소묘사길이(Minimum Description Length)이다[2]. 그런데 이 세 가지 척도를 적용하기 위해서는 가능한 모든 모델에 대해 일일이 매개변수를 구해야 하므로 많은 계산량이 요구된다. Liang은 [3]에서 MDL과 같은 의미를 가지면서 공분산 행렬의 최소 고유값에 의존하는 새로운 척도를 정의했으며 이 척도를 이용해 매개변수를 일일이 구하지 않고 차수를 정할 수 있도록 하였다. 그러나 이 방법은 AR차수와 MA차수를 각각 독립적으로 변화시켜가며 모든 쌍에 대해 척도값을 구해보아야 하므로 여전히 계산량이 문제가 된다. 이에 Xiao는 [4]에서 ARMA 모델을 AR형태로 변형한 뒤 AR차수만을 먼저 구하는 방법을 제안하였다. 한편 MA차수 결정 문제를 살펴보면 Chow가 [5]에서 선형식을 이용해 ARMA 모델에서의 MA차수를 정할 수 있음을 밝혔으나, 구체적인 방법제시에는 실패하였고, Zhang이 처음으로 [6]에서 AR차수를 안다는 가정하에 MA차수를 구할 수 있는 구체적인 방법을 제안하였다. MA차수 결정 방법은 매우 어려운 문제이며 이 방법외에는 구체적으로 제안된 것이 없다.

따라서 기존의 방법들 중에서는 Xiao의 AR차수 결정 방법으로 AR차수를 구한 뒤 그 값을 이용해 Zhang의 MA차수 결정 방법으로 MA차수를 구하는 것이 가장 우수하다고 할 수 있다. 그러나 Xiao의 AR차수 결정 방법은 공분산 행렬의 차수(rank) 특성을 이용해 차수를 구하는 것이므로, 한 극점의 절대값이 다른 극점의 절대값에 비해 일정값 보다 작아지게 되면, 공분산에서 절대값이 작은 극점에 관한 항이 상대적으로 무시되어 그 극점을 찾지 못하고 실제 차수보다 작은 값을 추정하게 된다. 본 논문에서는 일반적인 경우에 대해 이러한 사실을 검증하고 AR(2)모델을 통해 한 극점의 값이 정해졌을 때 찾을 수 없는 다른 극점의 절대값의 범위를 구해 보겠다. 또한 그 결과를 통해 단위원 근처에 극점이 존재할 경우 찾을 수

있는 다른 극점의 영역이 매우 작음을 밝히고 이러한 문제를 해결하기 위해 두가지 방법을 제시하겠다.

첫번째 방법은 영점 삽입을 이용한 것이다. 출력에 대한 공분산 값의 세틀링 시간(settling time)을 구해 단위원 근처에 극점이 존재하는가를 판별한다. 단위원 근처에 극점이 존재할 경우 역시 세틀링 시간을 이용해 그 극점의 절대값을 추정하고, 전력밀도 함수에서 세틀링 시간에 대응되는 대역폭을 갖는 피크치를 찾아내어 위상을 추정한 뒤 추정된 위치에 영점을 삽입함으로써 그 극점으로 인한 영향을 감소시킨다. 이러한 과정을 반복 수행해 단위원 근처 극점들의 영향을 모두 감소시킨 뒤 기존의 알고리즘을 적용하면 단위원보다 훨씬 안 쪽에 있는 극점도 무시되지 않게 되어 올바른 차수를 찾을 수 있게 된다.

두 번째 방법은 역모델을 이용한 것이다. 공분산은 단위원 근처의 극점에 의해서는 많은 영향을 받지만 단위원 근처의 영점에 의해서는 별다른 영향을 받지 않는다. 또한 구하고자 하는 모델이 단위원 근처에 극점만이 존재하는 모델일 때, 그것의 역모델은 단위원 근처에 영점만이 존재하게되므로 역모델을 이용해 차수를 구하면 올바른 차수를 구할 수 있다. 역모델의 공분산은 두 모델의 전력 밀도 함수가 역수 관계에 있음을 이용해 관측된 데이터로부터 구하였다.

논문의 구성은 다음과 같다. 우선 II장에서 기존의 방법이 극점간의 절대값의 비에 어떠한 영향을 받으며 그로 인해 발생하는 문제가 무엇인지를 밝히겠다. 이러한 문제점을 보완하기 위해 새로 제안된 두 가지 방법을 III, IV장에서 보이겠다. V장의 모의 실험을 통해 기존의 방법과 제안된 방법의 성능을 분석하였으며 VI장에서 결론을 맺겠다.

II. 극점의 위치가 AR차수 추정에 미치는 영향 분석

본 논문에서 다루고자 하는 ARMA모델의 정의와 가정은 다음과 같다.

$$y_t = - \sum_{i=1}^p \alpha_i y_{t-i} + \sum_{j=0}^q \beta_j e_{t-j} \quad (2.1)$$

<가정>

1. $\alpha_p \neq 0, \beta_q \neq 0, \beta_0 = 1$
2. α_i, β_i 는 실수
3. $p > q$
4. e_t 는 평균이 0이고 분산이 σ^2 인 백색잡음

2.1 기존의 알고리즘

기존의 알고리즘 중 가장 간단하면서도 우수한 성능을 가진 것은 Xiao의 AR차수 결정 알고리즘과 Zhang의 MA차수 결정 알고리즘이다. 이제 이 두 방법에 대해 간단히 살펴보겠다.

Xiao의 AR차수 결정 알고리즘은 다음과 같다[4]. 아래와 같이 정의된 공분산 행렬 \hat{R}_p 를 생각해 보자.

$$\hat{R}_p = \begin{bmatrix} \hat{r}_L & \hat{r}_{L-1} & \cdots & \hat{r}_{L-p} \\ \hat{r}_{L+1} & \hat{r}_L & \cdots & \hat{r}_{L+1-p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{r}_{L+K} & \hat{r}_{L+K-1} & \cdots & \hat{r}_{L+K-p} \end{bmatrix}, L > q^* \quad (2.2)$$

여기서, $\hat{r}(k) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{i=k}^{N-1} y_{i-k} y_i, & k \geq 0 \\ \hat{r}(-k), & k < 0 \end{cases} \quad (2.3)$

T_p 를 다음과 같이 정의하고

$$T_p = \hat{R}_p^T \hat{R}_p \quad (2.4)$$

T_p 의 최소 고유값을 λ_{\min} 이라고 정의하면 AR차수를 결정하는 척도를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$J(p) = \lambda_{\min} [(K+1)^{\frac{1}{(K+1)}}]^{-p} \quad (2.5)$$

$K \rightarrow \infty$ 가 되면 $J(p)$ 는 p 값을 변화시켜가며 T_p 행렬의 최소 고유값을 구하는 것과 같아진다. 한편, $p < p^*$ 이면 $\lambda_{\min} > 0$ 이고 $p \geq p^*$ 이면 $\lambda_{\min} \approx (k+1)\sigma^2 \approx 0$ 이 된다. 다시 말해 $p \geq p^*$ 이면 $J(p) \approx 0$ 가 되는 것이다[3][8]. 따라서, $\gamma_p = \frac{J(p)}{J(p-1)}$ 의 비가 최대값을 갖게되는 p 값을 찾으면 그 값이 실차수 p^* 가 된다.

Zhang의 MA차수 결정 알고리즘은 AR차수 p 를 알고있을 때, 관측된 출력 데이터의 공분산을 이용해 MA차수 q 를 찾는 방법이다[6]. 정리해보면 다음과 같다.

2.2 극점의 위치가 AR차수 추정에 미치는 영향 분석

식 (2.1)에 대한 전달함수를

$$H(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \quad (2.8)$$

1단계) AR차수 p^* 를 구한 후, $p = p^*, q = p^* + 1$ 로 놓는다. 아래와 같이 정의된 R_{pq} 행렬을 구한 후, 최소고유값 λ_{\min} 을 구해 $\lambda_{\min}^{(q)}$ 로 놓는다.

$$R_{pq} = \begin{bmatrix} r(q-p) & r(q-p+1) & \cdots & r(q) \\ r(q-p+1) & r(q-p+2) & \cdots & r(q+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(q) & r(q+1) & \cdots & r(q+p) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

2단계) $q = q - 1$ 로 한 차수 감소시키고 다시 $\lambda_{\min}^{(q)}$ 을 구한 후, 다음의 비 γ_q 를 구해본다.

$$\gamma_q = \frac{[\lambda_{\min}^{(q)} - \lambda_{\min}^{(q+1)}]}{\lambda_{\min}^{(q)}} \quad (2.7)$$

3단계) $q \neq 0$ 이면 2단계로 돌아가고 $q = 0$ 이면 4단계로 넘어 간다.

4단계) γ_q 값이 최대가 되는 q 값을 q^* 로 선택한다.

$$A(z^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^p \alpha_i z^{-i}, B(z^{-1}) = \sum_{i=0}^q \beta_i z^{-i} \quad (2.9)$$

라 하자. (단, $p < q, \alpha_i, \beta_i$ 는 실수)

$p < q$ 라는 가정하에 $H(z^{-1})$ 를 부분 분수합의 형태로 나타내면

$$H(z^{-1}) = \sum_{i=1}^p \frac{b_i}{1 - a_i z^{-i}} \quad (2.10)$$

여기서 a_i 는 극점, b_i 는 a_i 에 대응되는 잉여값(residue)을 나타내며 편의상 다중극점이 없는 것으로 가정하였다.

식 (2.10)을 이용해 y_t 의 공분산 함수를 구해보면 다음과 같다.

$$r_{y(k)} = \begin{cases} \sigma^2 \frac{b_p^2}{1 - a_p^2} a_p^{k|k} & , \text{ if } p = 1 \\ \sigma^2 \sum_{i=1}^p \left[\left(\sum_{j=1}^p \frac{b_i b_j}{1 - a_i a_j} \right) a_i^{k|k} \right] & , \text{ if } p = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (2.11)$$

위 식에서 알 수 있듯이 r_y 는 $\frac{b_i b_j}{1 - a_i a_j} a_i^{k|k}$ 의 합

의 형태로 되어있다. a_m 과 a_M 을 $|a_M| > |a_m|$ 를 만족 하는 임의의 두 극점이라 하자. 식 (2.11)의 항 중 $a_M^{l|k|}$ 에 관한 항을 $A_M(k)$, $a_m^{l|k|}$ 에 관한 항을 $A_m(k)$ 라 하자.

$$A_M(k) = \left[\sum_{j=1}^p \frac{b_M b_j}{1 - a_M a_j} \right] a_M^{l|k|} \quad (2.12)$$

$$A_m(k) = \left[\sum_{j=1}^p \frac{b_m b_j}{1 - a_m a_j} \right] a_m^{l|k|} \quad (2.13)$$

$a_m^{l|k|}$ 의 감소율이 $a_M^{l|k|}$ 의 감소율보다 상당히 크므로 k 값이 일정값 이상 커지게 되면 $A_M(k)$ 값이 $A_m(k)$ 값에 비해 무시할 만큼 작아지게 된다. Xiao의 AR차수 결정 방법은 공분산을 원소로 갖는 \hat{R}_p 행렬의 차수특성으로부터 AR차수 p 를 추정하는 것이다. \hat{R}_p 의 원소는 $\{r_y(k) | l - p_{\max} \leq k \leq l + K\}$ 이며, 따라서 $l - p_{\max} \leq k \leq l + K$ 에서 $A_M(k)$ 값이 $A_m(k)$ 값에 비해 무시할만큼 작아지게 되면 a_m 이 무시되어 실제 차수보다 작은 값이 나오게 된다. $|a_M|$ 과 $|a_m|$ 의 비가 커질수록 이러한 효과가 커지므로 정해진 $|a_M|$ 에 대한 $|a_m|$ 이 일정값보다 작아지게 되면 a_m 에 위치한 극점이 차수 결정에 반영되지 못한다. 모델에 따라 경계값에 다소 차이는 있겠지만 $|a_M|$ 값이 1에 가까워 질수록 $a_M^{l|k|}$ 이 더 천천히 감소하므로 상대적으로 반영되지 않는 $|a_m|$ 의 범위가 늘어나게 된다. 이제 두 극점 사이의 이러한 경향을 AR(2)모델을 통해 구체적으로 살펴보겠다.

전달 함수가 다음과 같이 주어지는 AR(2)모델을 생각해 보자.

$$H(z^{-1}) = \frac{1}{(1 - a_M z^{-1})(1 - a_m z^{-1})} \quad (2.14)$$

문제를 간단히 하기 위해서 a_M 과 a_m 은 양의 실수로 가정하고 입력의 분산은 1로 하였다.

전달함수를 부분분수의 합으로 나타내면

$$H(z^{-1}) = \frac{\left(\frac{a_M}{a_M - a_m}\right)}{1 - a_M z^{-1}} - \frac{\left(\frac{a_m}{a_M - a_m}\right)}{1 - a_m z^{-1}} \quad (2.15)$$

식(2.1)과 식(2.15)로부터 AR(2) 모델에 대한 공분산을 구해보면

$$R_y(k) = A_M(k) + A_m(k) \quad (2.16)$$

$$A_M(k) = \left[\frac{a_M^2}{(a_M - a_m)^2 (1 - a_M^2)} - \frac{a_M a_m}{(a_M - a_m)^2 (1 - a_M a_m)} \right] a_M^{l|k|} \quad (2.17)$$

$$A_m(k) = \left[\frac{a_M a_m}{(a_M - a_m)^2 (1 - a_M a_m)} - \frac{a_m^2}{(a_M - a_m)^2 (1 - a_m^2)} \right] a_m^{l|k|} \quad (2.18)$$

이 때, $\frac{A_M(k)}{A_m(k)}$ 을 구해보면

$$\frac{A_M(k)}{A_m(k)} = \frac{1 - a_m^2}{1 - a_M^2} \left(\frac{a_M}{a_m}\right)^{|k|+1} \quad (2.19)$$

$\frac{A_M(k)}{A_m(k)}$ 값이 k 값의 증가에 따라 점점 커짐을 확인할 수 있으며 $|a_M|$ 과 $|a_m|$ 의 비가 일정값 이상이 되면 $k \geq l - p_{\max}$ 에서 $A_M(k)$ 값이 $A_m(k)$ 값에 비해 무시되게 됨을 알 수 있다.

이제 실제로 $|a_M|$ 을 변화시켜가면서, AR차수 결정에서 무시되는 $|a_m|$ 의 범위를 앞의 AR(2)모델에 대해 구해보겠다. $|a_m|$ 은 0에서부터 0.01씩 증가시켜 가면서 $p=1$ 로 AR차수가 오판정이 나는 범위를 구했으며, 이에 대한 결과가 표 2.1에 나와 있다. 앞에서 예상했던 대로 $|a_M|$ 값이 커질 수록 차수결정에 반영되지 못하는 $|a_m|$ 의 범위가 커지며, 특히 $|a_M|$ 이 단위 원에 가까워지면 그 범위가 상당히 넓어져 큰 문제가 됨을 알 수 있다.

표 2.1 Xiao의 방법으로 차수 결정에 반영할 수 없는 $|a_m|$ 의 범위

$ a_M $	0.99	0.98	0.97	0.96	0.95	0.94	0.93	0.92	0.91	0.9	0.88
$ a_m $ 범위	0.94이하	0.84	0.80	0.78	0.76	0.75	0.74	0.73	0.71	0.7	0.68
$ a_M $	0.86	0.84	0.82	0.8	0.75	0.7	0.65	0.6	0.55	0.5	
$ a_m $ 범위	0.67이하	0.65	0.63	0.61	0.57	0.53	0.49	0.47	0.42	0.38	

III. 영점 삽입을 이용한 AR차수 결정 알고리즘

II장에서 단위원 근처에 극점이 존재하면 Xiao의

AR차수 결정에 영향을 미치지 않는 다른 극점들의 영역이 상당히 커져 심각한 문제가 됨을 알았다. 이러한 문제점을 보완하기 위해 제안하는 것이 영점 삽입을 이용한 AR차수 결정 알고리즘이다. 이 방법은 극점, 영점 상쇄에 의한 보상[17]과 유사하나 극점이 완전히 상쇄되지 않고 그 극점에 대응되는 잉여값의 크기를 줄이는 정도로만 보상을 한다는 점에서 차이가 있다. 잉여값을 줄이는 정도로만 보상해주면 되므로 문제가 되는 극점과 정확히 같은 위치에 영점을 삽입할 필요가 없고, 따라서 어느 정도 범위 안에서 추정오차가 허용된다. 추정오차가, 제안하는 알고리즘에 미치는 영향은 3.3장에서 분석하였다. 극점의 위치를 추정하는 방법은 추정할 극점의 위치가 단위원 근처라는 점에 착안해서 제안하였다. 알고리즘을 간단히 정리해보면 다음과 같다.

관측된 데이터의 표본 공분산의 세틀링 시간을 이용해 가장 바깥쪽 극점의 절대값을 추정해 단위원 근처에 극점이 존재하는지를 밝힌 뒤 존재할 경우, 전력 스펙트럼(power spectrum)을 이용해 그 극점의 위상까지 추정해서 추정된 위치에 영점을 삽입함으로써 그 극점의 영향을 줄이는 것이다. 이러한 과정을 거친 뒤 Xiao의 AR차수 결정 알고리즘을 적용하면 올바른 차수를 찾게되는 것이다.

3.1 세틀링 시간을 이용한 극점의 절대값 추정

관측된 데이터 y_t 를 ARMA모델로 모델링했을 때, 공분산 r_y 는 식 (2.1)에 의해

$$r_y(k) = \sum_{i=1}^M A_i a_i^{|k|} \tag{3.1}$$

의 형태가 됨을 알 수 있다. 절대값이 가장 큰 극점을 a_M 이라 했을 때, r_y 의 감소율은 $|a_M|$ 값이 1에 가까워질수록 작아지게 된다. 이러한 사실을 이용하기 위해 세틀링 시간을 ' $|r_y(k)| \leq 0.1|r_y(0), \forall k \geq T_s$ '을 만족하는 T_s 로 정의하겠다. T_s 는 a_M 의 절대값이 1에 가까워질수록 커지게 된다. 따라서 적당한 t문턱값을 정한 뒤 T_s 가 그 값 이상이면 단위원 근처에 극점이 존재한다고 할 수 있다. 이 때 모델이 요구하는 정밀도에 따라 단위원 근처로 간주하는 영역을 정의할 수 있으며 영역의 경계값에 대응되는 세틀링 시간을 구하면 무턱값이 된다. 또한 T_s 와 $|a_M|$ 의 대응 관계를 구한 뒤, 측정된 T_s 로부터 $|a_M|$ 의 값을 추정할

수 있다.

이제 T_s 와 $|a_M|$ 의 대응관계를 구해보자. 단위원 근처의 임의의 극점 a_i 에 대해 $|a_i|$ 의 값이 조금만 작아져도 $|a_i^k|$ 의 감소율이 눈에 띄게 증가하고 우리가 관심을 갖는 a_M 은 단위원 근처에 있는 것이므로 T_s 와 $|a_M|$ 의 대응관계를 구할 때 다른 극점에 의한 영향은 무시해도 좋다. 따라서, 절대값이 $|a_M|$ 인 켈레복소쌍을 극점으로 갖는 AR(2)모델에 대해 T_s 에서 $|a_M|$ 로의 대응관계를 구하면 그 결과를 다른 차수의 모델에도 적용할 수 있다. 표 3.1에서 표본수 $N = 300$ 에 대한 결과를 보였으며 필요에 따라 다양한 표본수에 대한 결과를 구해 극점의 절대값 추정에 이용할 수 있다. T_s 의 단위는 표본화 시간이다.

표 3.1 세틀링 시간에서 극점의 절대값으로의 대응관계

T_s	17~20	21~23	24	25~28	29~36	37~48	49~64	65~92	93~160	161~232	233~300
$ a_M $	0.9	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99	0.995

3.2 전력밀도 함수의 극대점을 이용한 극점의 위상 판정

ARMA모델로 모델링되는 y_t 의 전력밀도함수는 각 주파수가 극점의 위상과 일치하는 점에서 피크치를 가지며 대역폭이 가장 작은 피크치에 대응되는 위상이 절대값이 가장 큰 극점의 위상이다. 또한 그 대역폭은 앞에서 구한 세틀링 시간에 대응되는 값이다. 따라서 공분산 함수로부터 전력밀도함수를 추정한 뒤, 극대점과 그에 해당하는 대역폭을 구한 후, 그 중 가장 대역폭이 작은 극대점의 주파수로부터 가장 바깥쪽 극점의 위상을 추정할 수 있다.

3.3 영점삽입과 그 효과

앞 장에서 우리는 가장 바깥쪽 극점이 단위원 근처에 있는지를 판별하고 있을 경우 그 극점의 절대값과 위상을 추정했다. 이제 추정된 위치에 영점을 삽입하게 되면 어떠한 효과가 생기는지 알아보자. 공분산 값에서 $a_M^{|k|}$ 에 관한 항은 다음과 같이 표현된다.

$$A_M(k) = \left[\sum_{j=1}^M \frac{b_j}{1 - a_M a_j} \right] (b_M a_M^{|k|}) \tag{3.2}$$

또한 극점 a_M 에 대한 잉여값은 다음과 같이 주어진다.

$$b_M = (1 - a_M z^{-1})H(z^{-1})|_{z=a_M} = \frac{\prod_{j=1}^L (1 - \frac{c_j}{a_M})}{\prod_{i=1, i \neq M}^K (1 - \frac{a_i}{a_M})} \quad (3.3)$$

추정된 a_M 의 위치에 영점을 삽입하고 그 영점의 이름을 c_{aM} 이라 하면 b_M 값은 다음과 같이 변하게 된다.

$$b_M = (1 - \frac{c_{aM}}{a_M}) b_M \quad (3.4)$$

절대값에 대한 추정오차와 위상에 대한 추정오차를 다음과 같이 정의하자.

$$\Delta\phi = |\angle(a_M) - \angle(c_M)| \quad (3.5)$$

$$\Gamma a = \frac{|c_{aM}|}{|a_M|} \quad (3.6)$$

$|b_M'|$ 을 Γa 와 $\Delta\phi$ 를 이용해 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} |b_M'| &= |(1 - \Gamma a e^{-j\Delta\phi})| |b_M| \\ &= \sqrt{1 + (\Gamma a)^2 - 2(\Gamma a)\cos(\Delta\phi)} |b_M| \end{aligned} \quad (3.7)$$

따라서 영점 삽입 후, $|A_M'(k)|$ 값은 다음과 같이 변하게 된다.

$$|A_M'(k)| = \sqrt{1 + (\Gamma a)^2 - 2(\Gamma a)\cos(\Delta\phi)} |A_M(k)| \quad (3.8)$$

$\Gamma a \approx 1$ 이고 $\Delta\phi \approx 0$ 이므로 $|A_M'(k)|$ 은 매우 작은 값을 갖게된다. 따라서 상대적으로 무시되던 다른 극점에 관한 항이 무시되지 않게 되어 올바른 차수를 찾게 된다.

이제 알고리즘을 정리해보면 다음과 같다.

IV. 역모델을 이용한 ARMA 차수 결정

이 장에서는 역모델을 이용하여 ARMA모델의 차수를 구해 보았다. 역모델의 개념은 여러 분야에서 다양한 방법으로 이용되고 있다. 특히 디지털 통신에서는 채널에 의한 신호의 ISI (InterSymbol Interference)를 막기 위해서 채널에 대한 역모델, 즉 등화기를 사용하고 있다[18].본 논문에서는 이와 같이 기존에 알려진 역모델의 개념과 여러 가지 성질을 ARMA모델의 차수를 정하는데 적용시켜 보았다.

<영점삽입을 이용한 AR차수 결정 알고리즘>

1단계) 추정된 데이터 y_t 로부터 표본공분산 $\hat{r}(k) =$

$$\frac{1}{N} \sum_{i=k}^{N-1} y_{t-k} y_t,$$

를 추정한 후 $|r_y(k)| \leq$

$0.1|r_y(0)|, \forall k \geq T_s$ 를 만족하는 세틀링

시간 T_s 를 구한다. T_s 가 문턱값 이상이면

2단계로 가고, 그렇지 않으면 5단계로 간다.

2단계) T_s 로부터 가장 바깥쪽에 있는 극점 $p = re^{jw_0}$

의 절대값 r 을 추정한다.

3단계) 전력밀도함수에서 최소 대역폭을 갖는 피

크치를 찾아 가장 바깥쪽 극점의 위상 w_0

를 추정한다.

4단계) 추정된 위치에 영점을 삽입하기 위해 y_t 를

MA 필터, $(1 - \rho z^{-1})$ 에 통과시켜 출력 $x_t =$

$y_t - \rho y_{t-1}$ 을 얻는다. $y_t = x_t$ 로 개선한 후

1단계로 돌아간다.

5단계) Xiao의 AR차수 결정 알고리즘을 적용한다.

4.1 영점의 위치가 공분산에 미치는 영향 분석

전달함수가 다음과 같이 주어지는 ARMA(p, q) 모델을 생각해 보자.

$$H(z^{-1}) = \frac{\prod_{j=1}^q (1 - c_j z^{-1})}{\prod_{i=1}^p (1 - a_i z^{-1})} = \sum_{i=1}^q \frac{b_i}{1 - a_{iz}^{-1}} \quad (4.1)$$

이 모델의 출력 y_t 에 대한 공분산 r_y 는 식(2.11)에 주어져 있다. 식(2.11)에서 임의의 1에 대해 b_i 는 다음과 같이 구해진다.

$$b_i = (1 - a_i z^{-1})H(z^{-1})|_{z=a_i} = \frac{\prod_{j=1}^q (1 - \frac{c_j}{a_i})}{\prod_{i=1, i \neq i}^p (1 - \frac{a_i}{a_i})} \quad (4.2)$$

단위원 근처에 영점이 있을 경우에 공분산에 어떤 영향을 주는지 알아보자. 가장 바깥쪽의 영점 c_M 이

라 하자. b_i 을 c_M 에 관해 다시 써보면 $b_i = (1 - \frac{c_M}{a_i})$

$\frac{\prod_{j=1, j \neq M}^q (1 - \frac{c_j}{a_i})}{\prod_{i=1, i \neq i}^p (1 - \frac{a_i}{a_i})}$ 이 된다. 식에서 알 수 있듯이

$m \neq M$ 을 만족하는 c_m 에 대해 $|c_m| \approx 1$ 이 되어도 b_i 값에서 인수 $(1 - \frac{c_m}{a_i})$ 의 영향이 무시되지 않는다. 따라서 공분산 값에서 단위원 근처에 영점이 존재하더라도 그 영향으로 다른 영점들이 무시되는 일이 없다. Zhang의 MA 차수 결정 알고리즘도 공분산 행렬의 rank 특성으로부터 차수를 결정한다. 따라서 단위원 근처에 영점이 존재해도 Zhang의 MA 차수 결정 알고리즘으로 올바른 MA 차수를 찾을 수 있다. 이 점을 이용해서 단위원 근처에 극점이 있을 경우에 올바른 차수를 얻어낼 수 있는 또 다른 알고리즘을 제안하겠다. 이 방법은 III장에서 제안한 알고리즘에 비해 구현이 간단하다는 장점이 있는 반면 적용될 수 있는 경우가 최소위상(minimum phase)이면서 극점은 단위원 근처에 있어도 영점은 단위원 근처에 없는 경우로 제한된다는 단점이 있다.

4.2 역모델을 이용한 ARMA 차수 결정 알고리즘

모델링하고자 하는 ARMA(p,q)모델의 입력을 e_i , 출력을 y_i , 전달함수를 $H(z^{-1})$ 라 할 때 전달함수가 $\frac{1}{H(z^{-1})}$ 인 역모델 ARMA(q,p)을 생각해 보자. 역모델의 입력은 e_i 이며 출력은 x_i 라 하자.

이때의 가정을 정리해 보면

1. H(z)는 minimum phase
2. 단위원 근처에 극점 존재
3. 단위원 근처에 영점 존재하지 않음

이제 x_i 에 대한 공분산 r_x 를 주어진 y_i 로부터 구해 보자.

$$r_y(k) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{i=k}^{N-1} y_{i-k} y_i, & k \geq 0 \\ r_y(-k), & k < 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

$$P_y = F(r_y), \quad F: \text{Fourier Transform} \quad (4.4)$$

$$P_x = \frac{\sigma_c^4}{P_y} \quad (4.5)$$

$$r_x = F^{-1}\{P_x\} \quad (4.6)$$

이와 같이 구한 r_x 를 이용해 Xiao의 AR 차수 결정 알고리즘을 역모델에 적용시키면 원모델의 MA 차수인 q값을 구할 수 있다. 이때, 원모델의 영점, 즉

역모델의 극점이 모두 단위원보다 훨씬 안쪽에 있으므로, Xiao의 알고리즘은 q값을 성공적으로 찾아내게 된다. q값을 찾아낸 후 Zhang의 MA 차수 결정 알고리즘을 역모델에 적용시키면 역모델의 MA 차수이자 원모델의 AR 차수인 p값을 찾아낼 수 있다. 이때 원모델의 극점, 즉 역모델의 영점은 단위원 근처에도 존재하지만 앞에서 살펴본 것처럼 공분산 r_x 값이 영점의 위치에 별다른 영향을 받지 않으므로 Zhang의 방법은 p값을 성공적으로 찾게 된다. 즉, 주어진 가정을 만족하는 경우에 $p \rightarrow q$ 의 순으로 차수를 찾으면 실패하게 되지만 $q \rightarrow p$ 의 순으로 찾으면 올바른 차수를 찾게 된다. 이 과정을 정리해 보면 다음과 같다.

<역모델을 이용한 ARMA 차수 결정 알고리즘>

1단계) 주어진 출력 y_i 로부터 공분산 r_y 와 앞에서 설명한 역모델의 공분산 r_x 를 구한다. (식 (4.3)~(4.6))

2단계) r_y 의 세틀링 시간으로부터 극점이 단위원 근처에 있는지를 판별한다. 없으면 Xiao의 방법으로 AR 차수를 Zhang의 방법으로 MA 차수를 구하고, 있으면 3단계로 넘어간다.

3단계) r_x 의 세틀링 시간으로부터 영점이 단위원 근처에 있는지 판별한다. 영점이 단위원 근처에 있으면 4장에서 제안한 방법으로 AR 차수를 구한 후 Zhang의 방법으로 MA 차수를 구하고, 없으면 4단계로 넘어간다.

4단계) r_x 를 이용해 Xiao의 방법[4]으로 역모델의 AR 차수, 즉 원모델의 MA 차수에 해당하는 q값을 구한다.

5단계) r_x 와 4단계에서 구한 q를 이용해 Zhang의 방법[6]으로 역모델의 MA 차수 즉, 원모델의 AR 차수에 해당하는 p값을 구한다.

4.3 영점삽입 방법과 역모델 방법의 비교

ARMA 차수를 결정하는데 가장 많이 쓰이는 방법 이, 먼저 AR모델로 변환하여 Xiao의 방법으로 AR 차수를 구한 후, Zhang의 방법으로 MA 차수를 결정하는 방법이다. 그런데 AR모델의 극점이 단위원 근처에 존재하는 경우, Xiao의 방식은 단위원 근처의 극점들에 의한 차수만을 산출해 내는 단점이 있다. 이 단점을 보완하기 위하여 III장에서 제안된 영점삽입을 이용한 AR 차수 결정 방법은, 단위원 근처의 극점들

을 추정하여 그 위치에 영점을 삽입한 후, Xiao의 방법으로 AR차수를 결정하도록 하였다. 이 AR차수를 근거로 ARMA모델의 MA차수를 Zhang의 방법으로 결정하는 알고리즘이 영점삽입에 의한 ARMA차수 결정 방법이다.

이 방법은 ARMA모델의 극점의 위치를 추정하는 과정을 필요로 하나, 만일 ARMA모델이 단위원 근처에 극점이 없으면 이 과정을 필요로 하지 않게 된다. 또한 ARMA모델이 단위원 근처에 극점을 가졌더라도 단위원 근처에 영점을 가지고 있지 않으면, 역모델에 대하여 Xiao와 Zhang의 방법을 적용하면, 단위원 근처의 극점 추정과정을 필요로 하지 않고 ARMA차수를 결정할 수 있는데, 이 방법이 역모델을 이용한 ARMA차수 결정방법이다. 이 두 방식의 적용시기와 알고리즘상의 차이점을 그림 4.1에 나타내었다.

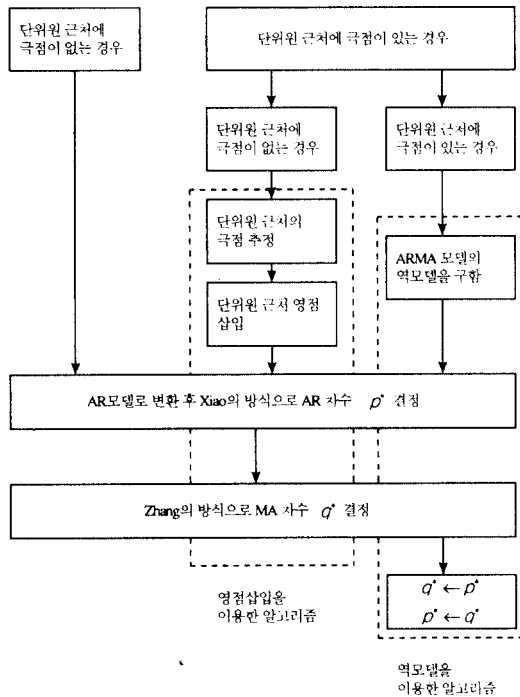


그림 4.1 영점삽입과 역모델 방식의 비교

V. 모의 실험 결과 및 분석

5.1 영점 삽입을 이용한 AR차수 결정 알고리즘에 대한 결과 및 분석

이 절에서는 III장에서 제안한 극점-영점 상쇄에 의한 AR차수 결정 알고리즘에 관한 모의 실험 결과를 살펴보겠다. 모의 실험 과정은 다음과 같다. 극점이 단위원 근처에 존재하는 ARMA(p, q)모델에 대해 (전달함수가 실제수를 갖기위해 극점과 영점은 모두 켈레복소쌍으로 존재하도록 정했다.) 입력에 총격과 δ_i 를 넣고 (실제로 완벽한 백색잡음을 생성하기가 어려우므로) 출력을 구한다. 출력의 표본수를 $N = 500, 1000, 2000$ 개로 바꾸어 가며 AR차수 p 를 Xiao의 방법과 III장에서 제안된 방법으로 각각 구한 후 실차수 p^* 와 비교해 두 알고리즘의 성능을 비교해 보았다. 결과로 제시한 값은 II장에서 정의한 γ_p 값이며 이 값이 최대가 되는 p 값이 추정된 AR차수이다. γ_p 값은 Xiao[4]가 정의한 것으로 식 (2.5)에 나타난 MDL 기준으로부터 나온 척도 $J(p)$ 값의 비 ($= J(p)/J(p-1)$)로 정의된다. $p < p^*$ 일 때 $J(p) \ll 0$ 이고, $p \geq p^*$ 이면 $J(p) \approx 0$ 임을 이용해 p 값을 변화시켜 가며, $J(p)$ 가 급격히 변화하는 p 값이 실차수 p^* 가 된다. 그러나 p^* 를 찾기 위해 $J(p)$ 값 변화를 측정하는 것보다, p^* 에서 큰 임펄스 값을 갖게 되어 p^* 값을 손쉽게 찾을 수 있으므로 γ_p 값을 실차수 추정의 척도로 사용하였다. 각 알고리즘에 대해 추정된 차수와 실차수를 비교함으로써 두 알고리즘의 성능을 비교하였다.

모의실험 1) 다음의 극점과 영점을 갖는 ARMA(4,3) 모델을 생각해 보자.

$$P = [0.97 e^{+j\frac{1}{4}\pi}, 0.7 e^{+j\frac{3}{5}\pi}]$$

$$Z = [0.73 e^{+j\frac{2}{5}\pi}, 0.55]$$

이 경우는 단위원 근처에 한 쌍의 극점이 존재하는 경우이다. 표 5.1은 출력의 표본수를 변화시켜가며 γ_p 값을 구한 것이다. 'Xiao'는 2장에서 설명한 Xiao의 방법[4]으로 구한 γ_p 값이며 '제안'은 III장에서 설명한 제안된 방법으로 구한 γ_p 값이다. 표 5.1에서 알 수 있듯이 Xiao의 방법으로 구한 AR차수는 $p = 2$ 이다. 이는 $0.97 e^{+j\frac{1}{4}\pi}$ 에 위치한 극점의 영향이 너무 커서 $0.7 e^{+j\frac{3}{5}\pi}$ 에 위치한 극점이 무시되었기 때문이다[3장 참조]. 이를 보완하기 위해 IV장에서 제안한 방식

으로 AR차수를 구해본 결과 실차수인 4와 일치하는 결과가 나올 수 있다. 제안된 알고리즘에서 영점 삽입에 의한 보상은 $0.97e^{+j\frac{1}{4}\pi}$ 에 대해 한번 일어났다. 또한 $N = 500, 1000, 2000$ 모든 경우에 대해 같은 결과가 나오는 것으로 보아 제안된 알고리즘은 표본수에 상관없이 성립함을 알 수 있다.

모의실험 2) 다음의 극점과 영점을 갖는 ARMA(8,2) 모델을 생각해보자.

$$P = [0.9e^{+j\frac{1}{4}\pi}, 0.95e^{+j\frac{3}{5}\pi}, 0.7e^{+j\frac{1}{3}\pi}, 0.65e^{+j\frac{5}{6}\pi}]$$

$$Z = [0.5e^{+j\frac{1}{2}\pi}]$$

이 경우는 극점이 단위원 근처에 두 쌍, 단위원보다 안 쪽에 두 쌍 존재하는 경우이다. 표 5.2를 살펴보면 Xiao의 방법을 적용한 경우, 단위원 근처 극점의 영향으로 안쪽의 두쌍의 극점이 무시되어 AR차수는 $p = 4$ 가 나오지만, 제안된 방법은 $p = 8$ 로 올바른 차수를 찾는다.

5.2 역모델을 이용한 ARMA차수 결정 알고리즘

이 장에서는 IV장에서 제안한 역모델을 이용한 ARMA차수 결정 알고리즘을 몇가지 예제를 통해 기존의 알고리즘과 비교해보겠다. 기존의 알고리즘과 제안된 알고리즘은 II, IV장에서 각각 설명한 내용이며 결과로는 γ_p 값과 γ_q 값을 보였다. 추정된 차수는 γ_p 값이 최대값을 갖는 p 값과 γ_q 값이 최대값을 갖는 q 값이 된다. γ_q 값은 Zhang[6]이 정의한 값으로, 2.2절에 정의된 공분산 행렬 $R_{\delta\delta}$ 에 대해 $q \geq q^*$ 이면 $R_{\delta\delta}$ 의 rank가 p 이고, $q < q^*$ 이면 $R_{\delta\delta}$ 의 rank가 $p+1$ 임을 이용하여 γ_q 값을 정의하였다. q 값을 감소시켜가며 $R_{\delta\delta}$ 의 최소고유값 λ_{\min} 이 급격히 변화하는 q 에서 γ_q 가 최대가 되므로 실차수 q^* 를 손쉽게 찾을 수 있어 γ_q 를 실차수 추정의 척도로 사용하였다. 각 알고리즘에 대해 추정된 차수와 실차수를 비교함으로써 두 알고리즘의 성능을 비교하였다. 한편 출력 y_t 는 충격응답을 구해서 사용했으며 출력의 표본수는 $N = 500, 1000, 2000$ 으로 잡았다.

모의실험 3) 다음의 극점과 영점을 갖는 ARMA(4,2) 모델을 생각해보자.

$$P = [0.9894 e^{+j\frac{7}{10}\pi}, 0.6 e^{+j\frac{17}{100}\pi}]$$

$$Z = [0.7293 e^{+j\frac{3}{4}\pi}]$$

이 실험에 대한 결과는 표 5.3와 표 5.4에 보였다. 이 예제는 단위원 근처에 한 쌍의 극점이 존재하는 경우이다. 이 극점의 영향으로 인해 기존의 방법은 AR차수를 $p = 2$ 로 찾게되며 이를 이용해서 MA차수를 찾으므로 MA차수 또한 $q = 4$ 로 찾게되어 실차수와 다른 값을 추정하였다. 그러나 제안된 방법으로 구한 차수는 $p = 4, q = 2$ 로 실차수와 일치함을 알 수 있다.

모의실험 4) 다음의 극점과 영점을 갖는 ARMA(8,2) 모델을 생각해보자.

$$P = [0.99e^{+j\frac{1}{4}\pi}, 0.95e^{+j\frac{3}{5}\pi}, 0.7e^{+j\frac{1}{3}\pi}, 0.65e^{+j\frac{5}{6}\pi}]$$

$$Z = [0.5e^{+j\frac{1}{2}\pi}]$$

이 실험에 대한 결과는 표 5.5와 표 5.6에 보였다. 이 예제는 단위원 근처에 두 쌍의 극점이 존재하고 있다. 따라서 기존의 방법은 이 두 쌍의 극점만을 찾아내어 $p = 4$ 의 값을 추정하고 있다. MA차수 또한 AR차수를 이용해 구하므로 $q = 3$ 이라는 잘못된 값을 추정하고 있다. 그러나 제안된 방법으로 구한 차수는 $p = 8, q = 2$ 로 실차수와 일치함을 알 수 있다.

표 5.1 (모의실험 1)에 대한 γ_p 값

p		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N = 500	Xiao	0	1.4856	0	0	0	0	0	0	0	0
	제안	0	0	0	8.5517	0	0	0	0	0	0
N = 1000	Xiao	0	1.5097	0	0	0	0	0	0	0	0
	제안	0	0	0	2.7738	0	0	0	0	0	0
N = 2000	Xiao	0	1.5100	0	0	0	0	0	0	0	0
	제안	0	0	0	6.8943	0	0	0	0	0	0

표 5.2 (모의실험 2)에 대한 γ_p 값

p		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N = 500	Xiao	0	0.0001	0	1.4890	0	0	0	0	0	0.0003
	제안	0	0	0	0	0	0	0	7.3908	0	0
N = 1000	Xiao	0	0.0001	0	1.7348	0	0	0	0.0004	0	0
	제안	0	0	0	0	0	0	0	2.9063	0	0
N = 2000	Xiao	0	0.0001	0	1.7348	0	0	0	0	0	0
	제안	0	0	0	0	0	0	0	8.2246	0	0

표 5.3 (모의실험 3)에 대한 γ_p 값

p		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N = 500	기준	0	4.5638	0	0	0	0	0	0	0	0
	제안	0	0	0.0001	1.1092	0.0001	0	0.0001	0	0	0.0001
N = 1000	기준	0	4.5708	0	0.0140	0	0	0	0	0	0
	제안	0	0	0	4.7104	0	0	0	0	0	0
N = 2000	기준	0	4.5708	0	0.006	0	0	0	0	0	0
	제안	0	0	0	1.9298	0	0	0	0	0	0

표 5.4 (모의실험 3)에 대한 γ_q 값

q		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N = 500	기준	0.4526	0.6512	1.4849	1.6158	0.1260	0.1177	0.4713	0.8829	1.4573	1.4958
	제안	0	3.3973	0	0	0	0	0	0	0	0
N = 1000	기준	0.4526	0.6512	1.4849	1.6158	0.1260	0.1177	0.4713	0.8829	1.4573	1.4958
	제안	0	9.1096	0	0	0	0	0	0	0	0
N = 2000	기준	0.4526	0.6512	1.4849	1.6158	0.1260	0.1177	0.4713	0.8829	1.4573	1.4958
	제안	0	7.8496	0	0	0	0	0	0	0	0

표 5.5 (모의실험 4)에 대한 γ_p 값

p		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N = 500	기준	0	0.0001	0	1.4890	0	0	0	0	0	0.0003
	제안	0	0	0	0.0001	0	0	0	1.7509	0	0.0003
N = 1000	기준	0	0.0001	0	1.7348	0	0	0	0	0	0
	제안	0	0	0	0	0	0	0	4.0571	0	0
N = 2000	기준	0	0.0001	0	1.7348	0	0	0	0	0	0
	제안	0	0	0	0	0	0	0	7.3362	0	0

표 5.6 (모의실험 4)에 대한 γ_q 값

q		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N = 500	기준	0.2067	0.0526	2.8934	0.0128	0.2243	0.1643	0.4051	1.5022	0.1406	0.3186
	제안	0.0010	8.2013	0.0012	0.0023	0.937	0.0009	0.0029	0.0009	0.0214	0.0040
N = 1000	기준	0.2067	0.0526	2.8931	0.0128	0.2244	0.1643	0.4048	1.5016	0.1406	0.3182
	제안	0	4.4222	0	0	0	0	0	0	0	0
N = 2000	기준	0.2067	0.0526	2.8931	0.0128	0.2244	0.1643	0.4048	1.5016	0.1406	0.3182
	제안	0	4.6684	0	0	0	0	0	0	0	0

VI. 결 론

본 논문에서는 관측된 데이터를 ARMA 모델로 정하고자 할 때 첫 단계로 수행되는 차수 결정 문제에 대해 살펴보았다. 기존의 차수 결정 방법이 극점의 위치에 의해 어떠한 영향을 받게 되는지 분석하고 그 영향으로 발생하는 문제를 해결하기 위해 두가지 방

법을 제안하였다.

기존의 방법은 공분산 행렬의 rank 특성을 이용해 차수를 구한다. 그런데 한 극점의 절대값이 다른 극점의 절대값에 비해 일정값 이상 작아지게 되면 공분산에서 절대값이 작은 극점에 관한 항이 상대적으로 무시되어 기존의 알고리즘은 그 극점을 찾지 못하고 실제 차수보다 작은 값을 추정한다. 본 논문에서는 일반적인 경우에 대해 이러한 사실을 밝히고 AR(2) 모델을 통해 한 극점의 값이 정해졌을 때 찾을 수 없는 다른 극점의 절대값의 범위를 구했다. 그 결과 단위 근치에 극점이 존재할 경우 찾을 수 있는 다른 극점의 영역이 매우 작음을 알 수 있었다. 이러한 문제를 해결하기 위해 두가지 방법을 제시하였다.

첫번째 방법은 영점 삽입을 이용한 것이다. 출력에 대한 공분산 값의 세틀링 시간을 구해 단위 근치에 극점이 존재하는가를 판별한다. 단위 근치에 극점이 존재할 경우 역시 세틀링 시간을 이용해 그 극점의 절대값을 추정하고 전력밀도 함수의 피크치를 이용해 위상을 추정한 뒤 추정된 위치에 영점을 삽입함으로써 그 극점으로 인한 영향을 감소시켰다. 이러한 과정을 반복 수행해 단위 근치 극점들의 영향을 모두 감소시킨 뒤 기존의 알고리즘을 적용하면 단위 근치보다 훨씬 안 쪽에 있는 극점도 무시되지 않게 되어 올바른 차수를 찾을 수 있었다. 두 번째 방법은 역모델을 이용한 것이다. 공분산은 단위 근치의 극점에 의해서는 많은 영향을 받지만 단위 근치의 영점에 의해서는 별다른 영향을 받지 않는다. 또한 구하고자 하는 모델이 단위 근치에 극점만이 존재하는 모델일 때, 그것의 역모델은 단위 근치에 영점만이 존재하게 되므로 역모델을 이용해 차수를 구하면 올바른 차수를 구할 수 있었다. 역모델의 공분산은 두 모델의 전력 밀도 함수가 역수 관계에 있음을 이용해 관측된 데이터로부터 구했다. 이 방법은 첫번째 방법에 비해 적용될 수 있는 조건이 까다롭지만 더 간단하다는 장점이 있다.

모의 실험에서는 ARMA 모델의 차수와 극점, 영점의 위치를 다양하게 바꾸어가며 기존의 방법과 제안된 방법을 각각 적용시켜 두 방법의 성능을 비교하였다. 그 결과 대부분의 경우, 단위 근치에 극점이 있으면 기존의 방법은 잘못된 차수를 찾게되지만 제안된 방법은 올바른 차수를 찾음을 확인할 수 있었다.

참 고 문 헌

1. T. Soderstrom, "On model structure testing in system identification," Int. J. Cont., vol. 26, pp 1-18,

1977.

2. J. Rissanen, "Modeling by shortest data description," *Automatica*, vol. 14, pp. 465-471, 1978.
3. G. Liang, D. M. Wilkes, and J. A. Cadzow, "ARMA order model estimation based on the eigenvalues of the covariance matrix," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 41, pp. 3003-3009, 1993.
4. Chung-Bai Xiao, Xian-Da Zhang, and Yan-Da Li, "A new method for AR order determination of an ARMA process," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 44, pp. 2900-2903, 1996.
5. J. C. Chow, "On estimating the orders of an autoregressive moving-average process with uncertain observations," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-19, pp. 723-730, 1974.
6. X. D. Zhang and Y. S. Zhang, "Determination of the MA order of an ARMA process using sample correlations," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 41, pp. 2277-2280, 1993.
7. T. Soderstrom and P. Stoica, "Comparison of some instrumental variable method-consistency and accuracy aspects," *Automatica*, vol. 17, pp. 101-115, 1981.
8. J. A. Cadzow and O. M. Solomon, "Algebraic approach to system identification," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-34, pp. 462-469, 1986.
9. M. H. A. Davis and P.G. Fotopoulos, "On the Approximate Stochastic Realisation Problem," *Proc. of the 30th Conf. on Decision and Control*, vol. 2, pp. 1698-1699, 1991.
10. G.Schwarz, "Estimation of the dimension of a model," *Ann. Stat.*, vol. 14, pp. 461-464, 1978.
11. E. J. Hannan, and J. Rissanen, "Recursive estimation of mixed autoregressive-moving average order," *Biometrika*, vol. 69, pp. 81-94, 1982.
12. R. S. Tsay and G. C. Tiao, "Use of canonical analysis in time series model identification," *Biometrika*, vol.72, pp. 299-315, 1985.
13. J. A. Cadzow, "Spectral estimation: An overdetermined rational model estimation approach," *Proc. IEEE*, vol. 70, pp. 707-739, 1982.
14. J. Rissanen, and T. Kaliath, "Partial Realization of Random Systems", *Automatica*, vol. 8, pp. 389-396, 1972.
15. W. Gersch, "Estimation of the autoregressive par-

- ameters of a mixed autoregressive moving average time series," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-15, pp. 583-585, 1970.
16. S. M. Kay and S. L. Marple, "Spectrum analysis-A modern perspective", *Proc. IEEE*, vol. 69, pp.1380-1419, 1981.
17. Benjamin C. Kuo, "Automatic control system", Prentice Hall, Sixth Edition, pp. 500-508, 1991.
18. John G. Proakis and Dimitris G. Manolakis, "Digital signal processing", Prentice Hall, Third Edition, pp. 355-368, 1996.



李定惠(Jung-Hye Lee) 정회원
1973년 9월 20일생
1995년 2월: 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 학사
1998년 2월: 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 졸업 석사
1998년 2월~현재: LG전자 DTV 연구소 연구원

<연구분야> 디지털 신호처리, 디지털 TV



郭智慧(Ji-Hye Gwak) 정회원
1976년 2월 15일생
1997년 2월: 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 학사
1997년 2월~현재: 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 석사과정
<연구분야> 채널코딩, 디지털 신호처리



金炯明(Hyung-Myung Kim) 정회원
1952년 10월 24일생
1974년 2월: 서울대학교 공학사
1982년 4월: 미국 Pittsburgh 대학 전기공학과 석사
1985년 12월: 미국 Pittsburgh 대학 전기공학과 공학박사

1986년 4월~1992년 8월: 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 조교수
1992년 9월~현재: 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 부교수

<연구분야> 디지털 신호와 영상처리, 다차원시스템 이론, 비디오신호 전송통신 이론, 이동 통신 기술 분야