

Aliasing 에너지를 최소화하는 quincunx 웨이브렛 필터의 설계

정희원 정연식*, 이임건**, 이수종*, 박규태*

Design of Quincunx Wavelet Filter Banks Minimizing Aliasing Energy

Yeonsik Jeong*, Imgeun Lee**, Soo Jong Lee*, Kyu Tae Park* *Regular Member*

요 약

본 논문에서는 quincunx 표본화 구조를 바탕으로 하는 2차원 비가분(nonseparable) 웨이브렛 필터의 설계를 위한 알고리즘을 제안한다. 비가분 필터를 이용한 웨이브렛 변환은 가분(separable) 필터에서 나타나는 수직, 수평 방향성의 제한을 받지 않는다. 또한 영상 신호가 비가분 신호임을 감안할 때 2차원 비가분 필터를 이용한 웨이브렛 변환은 신호의 분석 및 변환에 있어서 매우 적합하다. 비가분 필터를 이용한 변환에서는 비가분 표본화가 필요하며 이는 표본화 격자라는 기하학적인 구조하에서 수행된다. 본 논문에서는 2:1의 표본화 대응 관계를 가지는 quincunx 구조를 사용하였다. 제안한 quincunx 웨이브렛 필터는 완전 복원의 조건을 만족시키는 동시에 aliasing 에너지를 최소화하는 최적화 과정에 의해 설계되었으므로 영상 신호의 고압축시 발생하는 양자화 오차를 줄일 수 있으며 따라서 저전송률 영상 신호의 압축에 유리하다.

ABSTRACT

In this paper, novel two-dimensional nonseparable filter banks using the quincunx sampling lattice are designed and implemented for 2D wavelet transform. 2D nonseparable wavelet transform possesses more freedom in design, can provide better frequency characteristics and may have directional properties which are not limited to the vertical and horizontal directions of separable filters. For the nonseparable sampling, the quincunx lattice that has the diamond-shaped region in the frequency domain is used. The proposed nonseparable filter banks based on the quincunx sampling lattice minimize the aliasing energy which causes annoying patterns in encoded images at low bit-rates as well as satisfy the condition of perfect reconstruction.

I. 서 론

영상 신호 시스템에서는 처리, 저장 및 전송되어야 할 데이터의 양이 많기 때문에 데이터의 압축 및 복원을 바탕으로 하는 부호화에 관한 기술이 필수적이다. 영상 부호화는 원 영상에 대해 손실을 주지 않는 무손실 부호화 방법과 압축을 위해 원 영상에 손실을 가하지만 인간의 시각 체계에 그다지 손상을 주지 않는 손실 부호화 방법으로 분류할 수

있다. 일반적인 영상 부호화는 손실 부호화 방법을 이용하며 변환 부호화, 대역 분할 부호화 등의 방법들이 존재한다.

대역 분할 부호화는 필터 뱅크를 통해 입력 신호의 주파수를 일련의 상관성이 제거된 주파수 부대역으로 나누어 각각의 부대역 신호에 적합한 부호화를 수행하는 방법으로 변환 부호화에서 발생하는 블록 현상이 나타나지 않는다. 이러한 대역 분할 부호화는 다해상도 해석 및 웨이브렛 변환과 그 이론

* 연세대학교 전자공학과 (ysjeong@eve.yonsei.ac.kr)
논문번호: 98059-0211, 접수일자: 1998년 2월 11일

** 대우전자 디지털 TV 연구소

을 같이 한다^{[1][3][4]}.

웨이브렛 변환은 대역 통과 함수(기저 함수)의 이동, 확장, 수축된 형태를 이용하여 신호를 해석한다. 웨이브렛 변환은 원 영상을 동일 방향으로의 기하학적인 유사성을 가지는 부대역으로 분리하게 되므로 대역별 특성을 고려한 부호화와 전송시 대역별 영상의 우선 순위를 고려할 수 있다. 특히 웨이브렛 변환은 시간과 주파수에 대해 국부적으로 신호를 해석할 수 있으므로 비정상 과정으로 표현된 영상 신호의 해석에 유리하며 또한 이를 이용하여 표현된 영상은 인간의 시각 체계와 비슷하여 영상 처리 분야에서 많은 적용 가능성을 가지고 있다^{[2][5]}.

영상 신호에 대한 웨이브렛 변환은 2차원 필터뱅크 시스템을 이용하여 구현되며 이 때 필터의 가분성(separability)에 대한 고려가 필요하다. 즉 가분 필터를 이용하여 영상의 각 차원에 대해 독립적으로 변환을 수행하는 방법과 비가분 필터링과 표본화를 바탕으로 변환을 수행하는 방법으로 분류할 수 있다. 비가분 변환은 가분 변환에 비해 구조가 복잡하고 2차원 필터를 설계해야 한다는 단점이 있지만, 주파수 특성이 우수할 뿐 아니라 가분 필터의 주파수 방향성의 제한을 받지 않는다는 점에서 영상 신호의 처리에 매우 유리하다^{[2][9][10]}.

본 논문에서 제안한 비가분 웨이브렛 필터는 2차원 표본화 격자 구조상에서 완전 복원의 조건을 만족하며, 각 대역별 aliasing 에너지를 최소화하는 최적화 과정을 통해 설계된다. 이 과정은 제한 최적화 방법으로 모델링될 수 있으며 본 논문에서는 각 대역별 웨이브렛 필터의 aliasing 에너지를 목적 함수로, 완전 복원을 위해 각 필터 계수들이 만족해야 하는 방정식을 제한 조건으로 정의하여 최적화를 수행한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 제 2장에서는 비가분 필터링과 표본화를 바탕으로 하는 2차원 웨이브렛 변환과 quincunx 구조에 대해 설명한다. 제 3장에서는 필터 뱅크의 설계를 위한 제안한 방법에 대해 서술하고, 최적화 과정을 통해 2차원 필터 뱅크를 설계한다. 그리고 마지막으로 제 4장에서 결론을 맺는다.

II. 비가분 필터 뱅크를 이용한 웨이브렛 변환

영상 신호에 대한 웨이브렛 변환은 2차원 필터뱅크 시스템을 이용하여 구현되며 가분 필터를 이용하여 영상의 각 차원에 대해 독립적으로 변환을

수행하는 방법과 비가분 필터링과 표본화를 바탕으로 변환을 수행하는 방법으로 분류할 수 있다. 가분 웨이브렛 변환은 1차원 변환을 단순히 2차원으로 확장한 것으로 영상의 행과 열에 대해 각기 1차원 필터링과 표본화를 적용함으로써 변환을 수행한다. 반면에 비가분 웨이브렛 변환은 비가분 필터링과 비가분 표본화를 이용하여 수행된다. 비가분 표본화는 1차원 표본화와 달리 표본화 격자라는 기하학적인 구조를 통해 구현되며 일반적으로 quincunx 구조와 hexagonal 구조가 많이 사용된다. 비가분 변환은 가분 변환에 비해서 구조가 복잡하고 2차원 필터를 설계해야 한다는 단점이 있지만, 주파수 특성이 우수할 뿐 아니라 가분 필터의 방향성에 영향을 받지 않는다는 장점 때문에 영상 신호의 처리에 유리하다.

2차원 신호 $x(\mathbf{n})$ 의 Z-변환은 다음과 같이 정의할 수 있으며

$$X(z) = \sum_{\mathbf{n}=\mathbf{1}} x(\mathbf{n})z^{-\mathbf{n}} \quad (1)$$

여기서 $(z_1, z_2)^T$ 로 정의된 벡터 \mathbf{z} 에 대하여 $\mathbf{z}^{\mathbf{n}}$ 은 다음과 같이 표현되어진다.

$$\mathbf{z}^{\mathbf{n}} = \prod_{i=1}^2 z_i^{n_i} \quad (2)$$

$\mathbf{n} = (n_1, n_2)^T$ 의 집합으로 정의된 정수 격자 Λ 에 대해 표본화 행렬 D 에 의해 $\mathbf{m} = D\mathbf{n}$ 으로 생성된 \mathbf{m} 의 집합을 표본화 부격자 Λ_D 라 한다. 이 때 표본화 행렬 D 는 정수의 원소를 가지며 역행렬이 존재해야 한다. 정수 벡터 \mathbf{k} 에 의해 표본화 부격자 Λ_D 를 이동시킴으로써 얻어진 부격자를 원 표본화 부격자에 대한 coset이라 하며, 하나의 표본화 행렬 D 에 대해 $D = |\det D|$ 개의 coset 이 존재하게 된다. 이들의 합집합은 정수 격자 Λ 를 형성하며 이 때 벡터 \mathbf{k} 를 coset 벡터라 한다^[9].

1. 2차원 다표본화율 시스템(2-Dimensional Multirate Systems)

1차원 신호에 적용된 다표본화율 시스템이란 시스템의 각 부분에서 신호에 대한 표본화율이 다른 경우를 의미하며, 2차원 신호인 경우에는 신호가 정의되어 있는 격자 구조가 시스템 내에서 각기 다른 경우를 의미한다^[9].

하향 표본화는 표본화 부격자 Λ_D 상의 점은 Λ

에 대응시키고 나머지 점들은 버리는 과정을 통해 입력 신호 $x(n)$ 을 표본화하는 과정이며 이는 다음의 식으로 표현된다.

$$y(n) = x(Dn) \tag{3}$$

입력 $x(n)$ 에 대한 푸리에 변환을 $X_F(\omega)$ 로 표현할 때 출력 $y(n)$ 에 대한 푸리에 변환식은 다음과 같다.

$$Y_F(\omega) = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} X_F(D^{-T}\omega - 2\pi D^{-T}k) \tag{4}$$

식 (4)에서 $Y_F(\omega)$ 는 D 개의 aliasing 주파수 $D^{-T}\omega - 2\pi D^{-T}k$ 에서의 입력 신호의 합으로 이루어져 있음을 알 수 있으며 이 D 개의 주파수 영역 중에서 하나만 통과시키기 위한 전처리 필터 $H(z)$ 와 연결된 하향 표본화기를 decimator라 한다. 다음의 quincunx 표본화 행렬 D 에 대해 하향 표본화기와 decimator에 대한 예가 그림 1에 나타나 있다.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

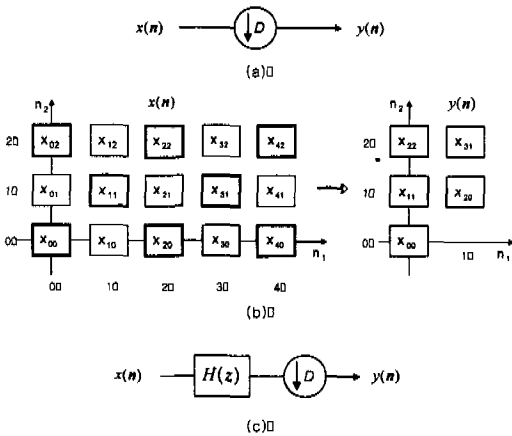


그림 1. (a) 하향 표본화기, (b) 하향 표본화의 예, (c) Decimator.
Fig. 1. (a) Downsampler, (b) Example of downsampling, (c) Decimator.

상향 표본화의 과정은 정수 격자 L 에서 정의된 신호를 표본화 부격자 L_D 에서 0이 아닌 다른 신호로 대응시키는 과정이다. 입력 신호와 출력 신호와의 관계는 다음으로 정의되며

$$y(n) = \begin{cases} x(D^{-1}n) & \text{if } D^{-1}n \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{6}$$

위의 식의 주파수 영역의 표현은 다음과 같다.

$$Y_F(\omega) = X_F(D^T\omega) \tag{7}$$

상향 표본화의 결과로 주파수 영역상의 통과 대역의 크기는 줄어들게 되며 일반적으로 $Y_F(\omega)$ 에는 $X_F(\omega)$ 의 한 주기에 대한 D 개의 이미지(images)들이 존재하게 된다. 이 이미지들 중 하나만 통과시키는 후처리 필터 $G(z)$ 와 연결된 상향 표본화기를 interpolator라 하며, 식 (5)의 표본화 행렬을 이용한 상향 표본화 과정이 그림 2에 나타나 있다.

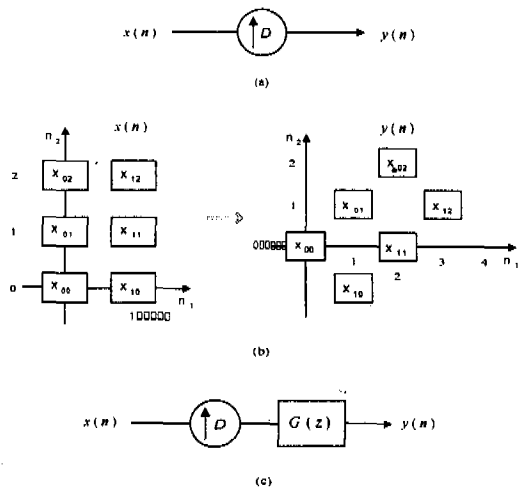


그림 2. (a) 상향 표본화기, (b) 상향 표본화의 예, (c) Interpolator.
Fig. 2. (a) Upsampler, (b) Example of upsampling, (c) Interpolator.

2. Quincunx 구조를 이용한 2 대역 필터 뱅크

식 (5)의 quincunx 표본화 행렬을 이용한 2대역 필터 뱅크가 그림 3에 나와 있다. 분해단의 필터들 사이에 QM(quadrature mirror) 대칭의 조건을 부여하면 그림 4와 같은 주파수 특성을 살펴 볼 수 있다. 그림 3의 필터 뱅크 시스템을 Z-변환식으로 전개하면 다음과 같은 관계식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{X}(z) &= \frac{1}{2} [H_0(z)G_0(z) + H_1(z)G_1(z)]X(z) \\ &+ \frac{1}{2} [H_0(-z)G_0(z) + H_1(-z)G_1(z)]X(-z) \tag{8} \\ &= T(z)X(z) + A(z)X(-z) \end{aligned}$$

이 때 식 (8)은 2대역 1차원 신호에 대한 필터뱅크 시스템과 매우 유사함을 알 수 있다. 이는 quincunx 구조가 2:1의 표본화 과정을 수행하기 때문에 quincunx 구조를 사용하게 되면 전체 시스템이 1차원 시스템과 유사하게 표현되며 필터 설계 과정 역시 단순화된다. 식 (8) 시스템의 완전 복원의 조건은 aliasing $A(z)$ 를 제거하고 $T(z)$ 를 $T(z) = z^k$ 와 같은 순수 지연의 형태로 설정함으로써 얻어질 수 있다. 또한 aliasing 부분은 분해단과 합성단의 필터들 간에 다음의 조건을 부과함으로써 제거될 수 있다.

$$G_0(z) = H_1(-z), \quad G_1(z) = -H_0(-z) \quad (9)$$

여기서 $-z$ 는 공간 영역에서 $(-1)^{n_1+n_2}$ 으로 변조시킨 것과 같다.

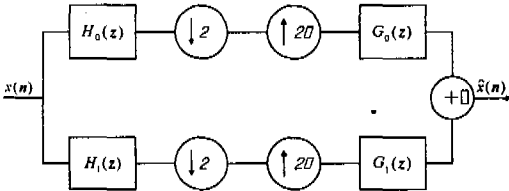


그림 3. 2대역 2차원 필터뱅크 시스템.
Fig. 3. 2 band 2D filter bank system.

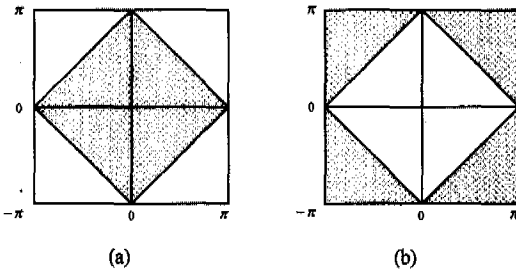


그림 4. 식 (5)의 주파수 특성: (a) 저주파 영역, (b) 고주파 영역.
Fig. 4. Frequency characteristics of Eq.(9): (a) Low frequency, (b) High frequency.

III. 제안한 필터뱅크의 설계

본 장에서는 영상 신호에 대한 웨이브렛 변환을 위해 비가분 웨이브렛 필터뱅크를 설계한다. 비가분 변환은 비가분 필터링과 표본화를 기반으로 구현되며 이를 위해서는 표본화 격자가 정의되어야 한다. 일반적으로 2:1의 표본화를 수행하는 quincunx 구조와 4:1의 표본화를 수행하는

hexagonal 구조가 많이 사용된다. 본 논문에서 사용하는 quincunx 구조는 2:1의 표본화를 수행하므로 가분 변환의 4개의 부대역이 아닌 2개의 부대역으로 분할이 가능하므로 전체 시스템이 1차원 시스템과 유사하게 구현될 수 있다. 또한 필터 설계 과정 역시 1차원 필터의 설계 과정 정도로 단순화되며, quincunx 구조를 사용하여 설계된 필터들은 인간의 시각 체계에 적합한 마름모 형태의 주파수 특성을 나타낸다^[2].

영상 처리에서는 시스템 응답의 선형 위상이 매우 중요하다. FIR 시스템에서 필터뱅크가 선형 위상을 만족하기 위해서는 직교성을 포기해야 한다. 즉 선형 위상을 보장하는 필터뱅크의 설계를 위해서는 필터 간에 쌍직교성을 갖도록 설계하여야 하며 이의 구현을 위해서는 분해단과 합성단의 필터들이 특정한 형태를 가져야 한다[7]. 그리고 위와 같은 사실은 2대역 2차원 필터뱅크에도 그대로 적용된다. 본 논문에서는 선형 위상의 성질을 만족하면서 동시에 필터링 연산의 속도 향상을 얻기 위해 $H_0(z)$ 와 $G_0(z)$ 사이에서 다음의 조건을 부과한다.

조건 1. 두 필터는 홀수의 길이 구조를 가지며 필터 중심에 대해 완전 대칭이다.

또한 두 필터의 길이 사이의 관계는 2의 홀수승의 차이를 나타낸다.

예로 $(5 \times 5) - (3 \times 3)$, $(9 \times 9) - (3 \times 3)$ 과 같은 구조는 가능하나 $(7 \times 7) - (3 \times 3)$ 의 구조는 성립하지 않는다. 조건 1을 만족하는 필터뱅크에 대해 유효 다항식 $P(z) \triangleq H_0(z)G_0(z)$ 을 정의할 때 전체 시스템의 전달 함수는 다음과 같이 정의된다.

$$T(z) = P(z) - P(-z) = z^k \quad (10)$$

즉 quincunx 표본화에 의한 상향 표본화와 하향 표본화 각각은 비선형 시스템이지만 이들을 포함한 전체 시스템은 선형 시스템이 되도록 설계한다. k 는 표본화 행렬에 대한 coset 벡터이고, 이 때 $P(z)$ 는 공간 영역 상에서 다음으로 표현되며 A_c 는 표본화 부격자 A_D 의 중심을 가리킨다.

$$p(n) = \begin{cases} 0 & \text{if } n \in A_D \text{ and } n \neq A_c \\ 1/2 & \text{if } n = A_c \\ \text{any value} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (11)$$

유효 다항식 $P(z)$ 의 어떠한 분해쌍 $H_0(z)$ 와 $G_0(z)$ 도 완전 복원 필터뱅크 시스템을 형성할 수 있다는 명백한 사실로부터 두 가지의 필터 설계 방법을 생각할 수 있다. 즉 첫 번째 방법은 주파수 분해 방법(spectral factorization)으로 설계 기준을 만족시키는 유효 다항식 $P(z)$ 를 구한 후 이를 $H_0(z)$ 와 $G_0(z)$ 의 두 다항식으로 분해하는 방법이며 두 번째 방법은 $H_0(z)$ 를 먼저 구한 후 선형 방정식의 풀이를 통해 $P(z)$ 를 만족시키는 $H_0(z)$ 의 쌍을 찾는 방법이다. 일반적으로 주파수 분해 방법이 많이 이용되나 필터의 길이가 길어지거나 2차원 필터와 같은 경우에는 인수 분해가 어렵게 되므로 그 이용에 한계가 있다. 이와 같은 단점을 극복하기 위해 제안한 설계 방법은 두 번째 방법과 같이 공간 영역에서 $h_0(n)$ 과 $g_0(n)$ 의 형태를 조건 1에 의해 미리 결정하고 이 두 필터의 컨볼루션으로부터 얻어진 유효 다항식 $p(n)$ 이 식 (11)을 만족하도록 설계한다. 또한 $g_0(n)$ 의 변조로부터 얻어지는 $h_1(n)$ 의 계수의 합이 0이 되게 하는 제한 조건을 부과한다. 이는 분해단의 고주파 대역 통과 필터에 Daubechies^[12]의 1차 정규성 조건을 부과한 것과 같은 의미로 다음의 식으로 표현된다.

$$\sum_n (-1)^n g_0(n) = 0 \quad (12)$$

위와 같은 설계 조건을 사용할 때 생기는 미지 계수의 수는 $(M \times M)$ 구조에 대해 다음의 식으로 표현된다.

$$A(M) = T \cdot (T+1) - \frac{(1+(-1)^{\frac{M-1}{2}})}{2} \cdot T \quad (13)$$

홀수 M 에 대해 $T = \lceil (M+1)/4 \rceil$ 이며 $\lceil x \rceil$ 은 x 보다 작지 않은 최소의 정수를 나타낸다. 또한 $(M \times M) - (N \times N)$ 구조에 대해 제한 조건을 표현하는 방정식의 수는 다음으로 표현되며

$$g(n) = \frac{n(n+2)}{8} + 1 \quad (14)$$

이 때 $n = (M+N)/2$ 이다.

위의 방법을 이용하여 본 장에서는 $(5 \times 5) - (3 \times 3)$, $(7 \times 7) - (5 \times 5)$, $(9 \times 9) - (3 \times 3)$ 의 필터 구조를 갖는 쌍직교 quincunx 필터의 설계를 보인다. 제안한 방법은 조건 1에서와 같이 완전 복원을 위한 필터들간

의 길이 관계를 만족시키기는 구조[7][8]이지만 하 면 임의의 필터 구조에 대해서도 확장이 가능하다. 제안한 구조에 대한 미정 계수의 수와 제한 조건의 방정식의 수, 그리고 자유도를 표 1에 나타내었다. 제안한 방법은 표 1에서 볼 수 있듯이 미정 계수의 수보다 방정식의 수가 적은 부정 방정식의 형태로 나타나게 되므로 미정 계수의 결정을 위해 최적화 과정을 통한 수치 해석적인 방법을 이용하여 필터의 계수를 결정한다.

표 1. 각 필터 구조에 대한 설계 방법의 파라미터.
Table 1. Parameters of the proposed method for the respective structure.

구조	미정 계수의 수	방정식의 수	자유도
$(5 \times 5) - (3 \times 3)$	6	4	2
$(7 \times 7) - (5 \times 5)$	10	7	3
$(9 \times 9) - (3 \times 3)$	11	7	4

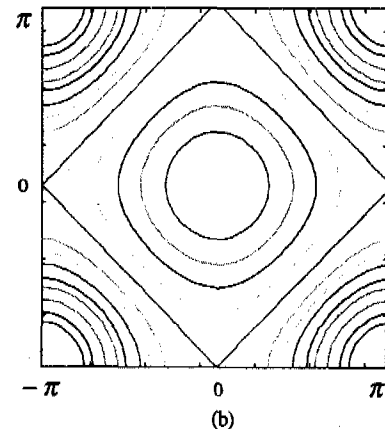
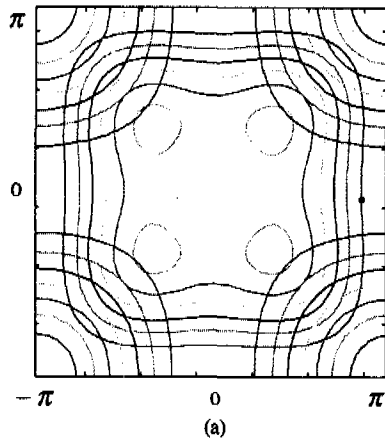


그림 5. 2차원 필터뱅크 시스템의 aliasing: (a) 가분 필터, (b) 비가분 필터.
Fig. 5. Aliasing of 2D filter bank system: (a) Separable filter, (b) Nonseparable filter.

본 논문에서는 필터 계수의 최적화를 위한 목적 함수로 aliasing 에너지를 이용하였다. 일반적으로 웨이브렛 필터 뱅크는 분해단의 저주파 통과 대역 필터와 고주파 통과 대역 필터의 주파수 응답 사이에 aliasing 에너지가 존재하지만 이 aliasing 에너지는 완전 복원 조건에 의해 설계된 합성단의 필터들을 거치면서 제거된다. 그러나 웨이브렛 변환이 영상 압축 시스템에 적용될 경우 양자화 과정을 통과하게 되므로 완전 복원의 조건은 더 이상 만족되지 않는다. 그 결과 aliasing 에너지가 제거되지 않고 남게 되어 복호화된 영상에서 신호의 왜곡으로 나타나게 된다. 따라서 분해단에 존재하는 aliasing 에너지를 가능한 한 최소화함으로써 압축시 나타나는 영상의 왜곡을 막을 수 있다. 필터 뱅크 시스템의 분해단에 존재하는 aliasing 에너지를 그림 5에 도시하였다. 이 때 그림 5(a)는 가분 필터의 경우이고 그림 5(b)는 비가분 필터의 경우이다. 비가분 필터는 2대역으로 구현이 가능하므로 4대역으로 구현된 가분 필터에 비해 aliasing이 발생할 수 있는 영역이 줄어드는 장점이 있다.

필터 계수의 최적화 과정은 제한 최적화 방법으로 모델링될 수 있으며 각 대역별 웨이브렛 필터의 aliasing 에너지를 목적 함수로, 완전 복원을 위해 각 필터 계수들이 만족해야 하는 방정식을 제한 조건으로 정의하여 수행된다. 2대역 필터 뱅크 시스템에서 분해단의 저역 통과 필터의 출력단에 존재하는 aliasing 에너지는 다음의 식으로 표현될 수 있다¹¹⁾.

$$E_A = \sum_k [\rho(n) * (-1)^n \rho(n)] R_{xx}(k) \quad (15)$$

이 때 $\rho(n) = h_0(n) * h_0(-n)$ 은 필터 계수들의 자기 상관 행렬이며, $R_{xx}(k)$ 는 입력 신호의 자기 상관 행렬이다. 입력 신호에 대한 통계적 특성인 $R_{xx}(k)$ 를 위해 평균이 0이고 분산이 1인 AR-1 모델을 사용하였으며 자기 상관 계수 $\rho_k = \rho_v = 0.95$ 로 설정하였다. 비가분 입력 신호에 대한 $R_{xx}(m, n)$ 모델은 다음과 같이 표현된다¹¹⁾.

$$R_{xx}(m, n) = \exp[-(a^2 m^2 + \beta^2 n^2)^{1/2}] \quad (16)$$

$$a = -\ln \rho_h, \quad \beta = -\ln \rho_v.$$

우리가 원하는 최적화된 필터 계수는 식 (15)의 목적 함수를 최소화함으로써 구할 수 있으며 이를

위해 Shor¹¹⁾의 알고리즘을 사용하였다. Shor의 알고리즘은 기울기 검색 알고리즘의 일종으로 미분은 가능하지만 함수가 완만하지 않은 경우에 우수한 결과를 나타내는 최적화 알고리즘이다.

제한한 방법에 의해 설계된 (5×5)-(3×3), (7×7)-(5×5), (9×9)-(3×3) 구조의 오른쪽 윗부분의 필터 계수가 표 2~4에 제시되어 있으며, (5×5)-(3×3) 구조에 대한 주파수 응답이 그림 6에 나타나 있다. 또한 제안한 (5×5)-(3×3) 필터 뱅크를 이용한 LENA 영상의 웨이브렛 변환이 그림 7에 나와 있다.

식 (15)를 이용하여 가분 필터와 비가분 필터에 존재하는 aliasing 에너지를 수치적으로 계산하여 그 결과를 표 5에 나타내었다. 표 5로부터 제안한 최적화 과정에 의해 설계된 필터 뱅크가 기존의 가분 필터에 비해 aliasing 에너지가 많이 줄어들었음을 알 수 있다. 또한 필터의 길이가 길수록 aliasing에 에너지가 줄어든다는 사실 역시 확인할 수 있었다.

표 2. 제안한 (5×5)-(3×3) 구조의 필터 뱅크
Table 2. The proposed (5×5)-(3×3) filter bank.

$h_0(0,0)$	0.81878482378327	$h_1(0,0)$	-0.50080654325290
$h_0(0,1) = h_0(1,0)$	0.17960466423186	$h_1(0,1) = h_1(1,0)$	0.12520163831184
$h_0(0,2) = h_0(2,0)$	-0.04490114726529	Other points	0
$h_0(1,1)$	-0.08980231403375		
Other points	0		

표 3. 제안한 (7×7)-(5×5) 구조의 필터 뱅크
Table 3. The proposed (7×7)-(5×5) filter bank.

$h_0(0,0)$	0.63391989606654	$h_1(0,0)$	0.65968230324764
$h_0(0,1) = h_0(1,0)$	0.11524550584283	$h_1(0,1) = h_1(1,0)$	0.20184039843371
$h_0(0,2) = h_0(2,0)$	-0.04716834823644	$h_1(0,2) = h_1(2,0)$	0.01296626368751
$h_0(1,1)$	-0.09169082872388	$h_1(1,1)$	0.02395329762913
$h_0(0,3) = h_0(3,0)$	0.00302491406994	Other points	0
$h_0(1,2) = h_0(2,1)$	0.00846818785231		
Other points	0		

표 4. 제안한 (9×9)-(3×3) 구조의 필터 뱅크
Table 4. The proposed (9×9)-(3×3) filter bank.

$h_0(0,0)$	2.40979356462161	$h_1(0,0)$	-0.16586024221996
$h_0(0,1) = h_0(1,0)$	0.60479255488420	$h_1(0,1) = h_1(1,0)$	0.04146506305485
$h_0(0,2) = h_0(2,0)$	-0.08261544817448	Other points	0
$h_0(1,1)$	-0.23357354781975		
$h_0(0,3) = h_0(3,0)$	0.00096021766819		
$h_0(1,2) = h_0(2,1)$	-0.13764537950191		
$h_0(0,4) = h_0(4,0)$	-0.00024007892198		
$h_0(1,3) = h_0(3,1)$	0.03417123277609		
$h_0(2,2)$	0.06882263545615		
Other points	0		

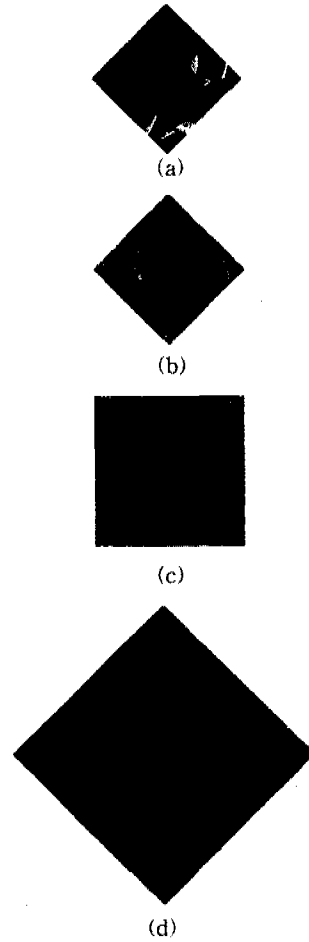


그림 7. 3회 분할 웨이블릿 변환된 LENA 영상: (a) 저주파 부대역, (b) 두 번째 부대역, (c) 세 번째 부대역, (d) 고주파 부대역.

Fig. 7. Wavelet-transformed LENA image: (a) Lowest subband, (b) Second subband, (c) Third subband, (d) Highest subband.

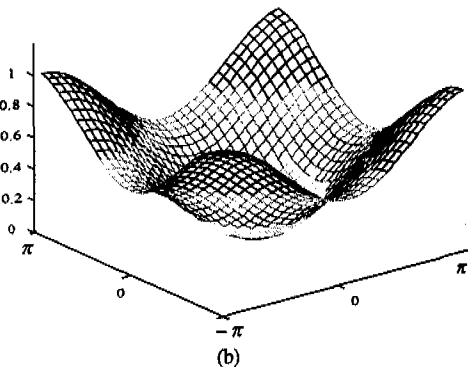
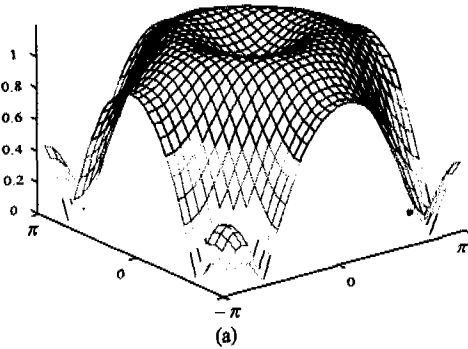


그림 6. 제안한 (5×5)-(3×3) 구조의 필터 뱅크의 주파수 응답: (a) 저주파 통과 대역 필터, (b) 고주파 통과 대역 필터.

Fig. 6. Frequency response of the proposed (5×5)-(3×3) filter bank system: (a) Low-pass filter, (b) High-pass filter.

표 5. 가분 필터와 비가분 필터에서의 aliasing 에너지 비교

Table 5. Comparison of aliasing energy between separable and nonseparable filter.

	기존의 가분 필터	제안한 비가분 필터
5-3 구조	0.0148	0.0049
7-5 구조	0.0142	0.0048
9-3 구조	0.0115	0.0043

IV. 결론

본 논문에서는 영상 신호에 대한 웨이블릿 변환을 위해 기존에 사용하던 가분 필터링과 표본화 대

신에 비가분 필터링과 표본화를 이용하여 변환을 구현하였다. 비가분 표본화를 위해서는 2:1의 대응 관계를 가지는 quincunx 구조를 사용하였으며 이를 바탕으로 새로운 비가분 필터를 설계하였다.

제안한 필터들은 2차원 quincunx 표본화 격자 구조상에서 완전 복원의 조건을 만족시키며 동시에 분해단의 aliasing 에너지를 최소화시킨다. 이를 위해 각 대역별 웨이브렛 필터의 aliasing 에너지를 목적 함수로, 완전 복원을 위해 각 필터 계수들이 만족해야 하는 방정식을 제한 조건으로 정의한 제한 최적화 방법으로 모델링한 후 Shor의 알고리즘을 이용하여 최적화 계수를 구하였다. 제안한 필터뱅크는 압축단 이전의 분해단에 존재하는 aliasing 에너지를 최소화시켰으므로 영상 신호의 고압축시 발생하는 양자화 오차를 줄일 수 있으며 따라서 저전송률 영상 신호의 압축에 유리하다.

참고 문헌

[1] A. N. Akansu and R. A. Haddad, *Multi-resolution Signal Decomposition*, Academic Press, 1992.

[2] P. P. Vaidyanathan, *Multirate Systems and Filter Banks*, Prentice-Hall, New Jersey, 1993.

[3] Y. T. Chan, *Wavelet Basics*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 1995.

[4] M. Vetterli and J. Kovačević, *Wavelets and Subband Coding*, Prentice-Hall, New Jersey, 1995.

[5] O. Rioul and M. Vetterli, "Wavelets and signal processing," *IEEE SP Mag.*, vol. 8, pp. 14-38, Oct. 1991.

[6] J. Katto and Y. Yasuda, "Performance evaluation of subband coding and optimization of its filter coefficients," *VCIP '91: Visual Communication*, vol. SPIE-1605, pp. 95-106, 1991.

[7] M. Vetterli and C. Herley, "Wavelets and filter banks: Theory and design," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 40, no. 9, pp. 2207-2232, Sep. 1992.

[8] O. Egger and W. Li, "Subband coding of images using asymmetrical filter banks," *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 4, no. 4,

pp. 478-485, Apr. 1995.

[9] E. Viscito and J. P. Allebach, "The analysis and design of multidimensional FIR perfect reconstruction filter banks for arbitrary sampling lattices", *IEEE Trans. Circuits and Systems*, vol. 38, no. 1, pp. 29-41, Jan. 1991.

[10] G. Karlsson and M. Vetterli, "Theory of two-dimensional multirate filter banks," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 38, no. 6, pp. 925-937, Jun. 1990.

[11] N. Z. Shor, *Minimization Methods for Non-Differentiable Functions*, Springer Series in Computational Mathematics, vol. 3, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[12] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pennsylvania, 1992.

정연식(Yeonsik Jeong)

정회원

현재: 연세대학교 대학원 전자공학과 박사과정
한국통신학회 논문지 제 23권 제 9호 참조

이임건(Imgeun Lee)

정회원

현재: 대우전자 디지털 TV 연구소 선임연구원
한국통신학회 논문지 제 23권 제 9호 참조

이수종(Soo Jong Lee)

정회원

1989년: 국민대학교 공과대학 전자공학과 졸업(공학사)
1992년: 연세대학교 대학원 전자공학과 졸업(공학석사)
현재: 연세대학교 전자공학과 박사과정 재학중
<주관심분야> 영상처리, 영상통신, 컴퓨터비전, 웨이브렛

박규태(Kyu Tae Park)

정회원

현재: 연세대학교 전자공학과 명예교수
한국통신학회 논문지 제 23권 제 9호 참조