이산 정규형 자연관측변환에 대한 불확정성의 원리에 관한 연구

정회원 김 태 수*

On study of Uncertainty Principle of Natural Observation Transform of Discrete Normal Type

Tae-soo Kim* *Regular Member*

요 약

자연관측법 이론에서는 자연관측변환에 의하여 입력신호의 파형에 대한 관측을 행하고 있다. 근접형 이산 자연관측변환에 대하여는 이산 등가시정수를 도입함으로서 불확정성의 원리를 밝힌바 있다. 본 논문에서는 새로운 형태인 이산 정규형 자연관측변환에 의한 파형 관측의 특징을 불확정성의 원리란 관점에서 명확히 밝히고자 한다. 또한, 이산 등가시정수 뿐만 아니라 이산 평균차수지표를 수단으로 이들 관계를 유도한다.

ABSTRACT

In the natural observation theorem, the observation of the waveform of input signals is achieved by using the natural observation transform. Uncertainty principle is proved by using the discrete equivalent time constant for the natural observation transform of discrete neighboring type. In this paper, the properties of observation of waveform using natural observation transform of discrete normal type are specified with the point of view of uncertainty principle. Furthermore, these relationship is induced by means of the index of mean dimension number as well as the discrete equivalent time constant.

I. 서 론

푸리에변환은 전 시간 구간에 걸쳐서 파형을 평등하게 간주하여 한번에 변환하는 방식중의 하나로, 시간영역에서 주파수 영역으로 변환하였을 때, 변환된 결과에는 시각 성분은 포함되지 않는다. 즉, 파형을 주파수 축 상의 분포로 해서 등가 적으로 표현하는 방식을 취한다. 그러나, 인식문제 등을 다루는 신호처리 분야에서는 현재의 시점에서 갖는 문제의 의미는 대단히 중요하게 다루어진다. 즉, 현재의 입력 파형의 양상을 파악하는 문제에 있어서, 과거와 미래의 양상을 아는 것 보다 현재의 양상을 정확하게 파악하는 것이 중요하게 인식된다. 이러한 점에 있어서 푸리에변환의 비합리성이 지적되었으며, 이러한 점에 대처하기 위한 방식으로 자연관측법 이론이 제안되었다.

자연관측법 이론[1]-[6]은 자연관측 조건에 따라 파형을 관측하는 기본 조건을 근간으로 하여 합리적인 파형 해석법에 관한 새로운 이론 체계를 구축하여 왔다. 최초로 근접형 이론이 전개되었고, 그 다음으로 평형형이 제시되었다. 그 후로 이들 이론과는 다른 새로운 정규형 이론이 제안되어, 유한개의 관측치 계열에 의하여 파형 관측이 가능하게 되었다. 자연관측변환의 파형 관측의 분해능이 우수하다는 것을 입증하기 위하여 연속시간에 대한 근접형,

* 위덕대학교 정보통신공학과 (tskim@mail.uiduk.ac.kr)
논문번호 : 99162-0424, 접수일자 : 1999년 4월 24일

정규형 자연관측변환에 있어서 불확정성의 원리가 제안되었다.[4][6]

디지탈 기술의 발달과 함께 이산 신호에 대한 중요성에 맞추어 이산 근접형 자연관측변환에 대한 불확정성의 원리를 제안하였다.[10] 여기에서는 이산 시간 영역에서의 등가시정수 개념을 도입하여 관측 차수의 분산과 등가시정수 사이의 불확정성의 관계를 표현하였다. 본 논문에서는 이산 정규형 자연관측변환에 의한 파형 관측의 특징을 불확정성의 원리의 관점에서 명확히 밝히고자 한다. 여기에서도, 이산 근접형의 경우와 같이 등가시정수를 매개로 한 방식을 이용하나, 이산 정규형의 경우에 있어서는 특히, 이산 평균차수지표란 새로운 개념을 도입하여 불확정성의 관계가 성립함을 보이고, 또한 이산 신호 파형에 대한 이들의 관계를 정리한다.

Ⅱ. 연속시간 자연관측변환

무한구간($-\infty < t < \infty$)에서 정의된 적분 가능한 실함수의 집합을 H라하고, 임의의 파형 $x(t) \in H$의 푸리에변환을

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \qquad (1)$$

라 하자. 그러면 이에 대한 역변환은

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \qquad (2)$$

로 주어진다. 또한, H는 선형공간을 이루며, 그 내적은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}(x_1, x_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\Omega) \overline{X_2(j\Omega)} d\Omega\end{aligned} \qquad (3)$$

Norm $\|x\|$를

$$\|x\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\Omega)|^2 d\Omega \qquad (4)$$

로 정의하면, H는 그 위상에 있어서 Hilbert공간으로 된다. 여기서, 원시함수를 $p(\tau) = \frac{1}{s} e^{-\tau/s}$라고 하면, 이 $p(\tau)$를 이용한 원시작용소 Γ 및 수반 원시작용소 A 를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}(\Gamma x)(t) &= \int_0^{\infty} p(\tau) x(t-\tau) d\tau \\ A &= I - \Gamma \ (I\text{는 단위 작용소})\end{aligned} \qquad (5)$$

그리고, Γ및 A의 작용소의 기능을 부여하는 필터에 대한 전달함수를 구하면 각각 다음과 같이 표현된다.

$$P(j\Omega) = \int_0^{\infty} p(\tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau \qquad (6)$$

$$Q(j\Omega) = 1 - P(j\Omega) \qquad (7)$$

자연관측법 이론은 관측자가 시시각각 변하는 파형을 유동적으로 관측한다는 점에 착안하여 구성된 이론이다. 즉, 이것은 파형 관측, 패턴인식이란 점에서 고찰하면 파형은 시간의 경과에 따라 계속 존재하지만, 현재에서 일어나는 현상은 과거에 보내져 결국 망각되어져 버리고, 관측자는 현 시각의 시점에서 주목하지만, 미래는 그 때가 도래할 때까지는 결코 인식될 수 없다는 측면에서 관측을 행한다. 이러한 파형 관측의 특징을 부여하는 것이 $p(\tau)$이고, 특히, 유한 차수(M차)의 자연관측법을 M위의 자연관측법이라 부르고, 기본 관측작용소 $Z_m^{(M)}$은 다음과 같이 정의한다.

$$Z_m^{(M)} = A^m \Gamma^{M-m} \quad (m = 0, 1, \cdots, M) \qquad (8)$$

이러한 기본관측작용소에 대한 기능을 부여하는 필터를 기본관측필터라 하고 다음과 같이 그 전달함수를 구할 수 있다.

$$Z_m^{(M)} = \frac{(j\Omega s)^m}{(1 + j\Omega s)^M} \quad (m = 0, 1, \cdots, M) \qquad (9)$$

다음은 입력 $x(t) \in H$에 대한 기본관측필터의 출력을

$$n_m^{(M)}(t) = (Z_m^{(M)} x)(t) \ (m = 0, 1, \cdots, M) \qquad (10)$$

로 정의하고, 이를 기본관측치계열이라 칭한다. 그러면, 이 정의식에 대한 푸리에변환은

$$N_m^{(M)}(j\Omega) = Z_m^{(M)}(j\Omega) X(j\Omega) \quad (m = 0, 1, \cdots, M) \qquad (11)$$

로 주어진다. 따라서, 임의의 파형 $x(t)$와 기본관측치계열에 대하여 다음의 두 등식이 성립한다.

$$\begin{aligned}x(t) &= \sum_{m=0}^{M} \binom{M}{m} n_m^{(M)}(t) \\ \|x(t)\|^2 &= \sum_{m=0}^{M} \binom{M}{m} \|n_m^{(M)}\|^2\end{aligned} \qquad (12)$$

Ⅲ. 이산형 자연관측변환

관측 계의 임펄스응답을 각각 $u(k)$, $v(k)$라고 가

정하면, 파형 $f(n)$에 대한 관측 계의 출력 $a(n)$, $b(n)$은 다음과 같이 나타낼 수 있다.[5]

$$a(n) = \sum_{k=0}^{\infty} u(k)\, f(n-k)$$
$$b(n) = \sum_{k=0}^{\infty} v(k)\, f(n-k) \tag{13}$$

이 경우에 있어서 위 식의 조건은 다음과 같다.

$$U(z)+V(z)=1$$
$$|U(e^{j\omega})|^2+|V(e^{j\omega})|^2=1 \tag{14}$$

여기서, 전달함수 $U(z)$, $V(z)$는 각각 임펄스응답 $u(k)$, $v(k)$의 z변환이다. 그리고, $\omega=\Omega T$이고, T는 샘플링 간격이다. 각 관측 계의 전달함수는 [5]에 의하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$U(z)=\frac{1}{1+W(z)},\ V(z)=\frac{W(z)}{1+W(z)} \tag{15}$$

여기서, W(z)는 단위원 상에서 임의의 순허수치를 갖는 복소함수이다. 실제로 이러한 함수는 무수히 존재한다. 그러나, 전달함수 $U(z)$, $V(z)$에 관한 (14)식의 두 조건을 만족하는 W(z)는

$$W(z)=\frac{C(z-1)}{z+1} \tag{16}$$

의 경우로 한정된다. 위 식에서 계수 C를 제외한 분모 분자 항이 바뀌어도 성립하나 본 논문에서는 (16)식의 경우만을 취급한다. (16)식을 (15)식에 대입하여 얻어지는 전달함수 U(z), V(z)는 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$U(z) = \frac{z+1}{(C+1)z-(C-1)} \tag{17}$$

$$V(z) = \frac{Cz-C}{(C+1)z-(C-1)} \tag{18}$$

연속형 자연관측법의 원시관측계($\int_0^{\infty} u(t)dt=1$)에 대응되는 이산형 자연관측법의 초기관측계 ($\sum_{k=0}^{\infty} u(k)=1$)에 대하여, 원시관측계의 연속시간 $t=kT$에서 샘플 파형을 정하여 관측 계의 임펄스응답 $u(k)$의 지수부와 비교하여 계수 C를 구하면 다음과 같다.[5]

$$C=\frac{1+e^{-T/s}}{1-e^{-T/s}} \tag{19}$$

여기서, s는 임의의 정수이다.

정규형 이산자연관측변환을 전달함수 $U(z)$, $V(z)$를 이용하여 나타내면 다음과 같다.

$$N_m^{(M)} = V(z)^m U(z)^{M-m} X(z),$$
$$(m=0,1,2,\cdots,M) \tag{20}$$

여기서, $X(z)$는 임의의 입력파형 x_n의 z변환이다. 또한, (20)식에 나타낸 이산자연관측변환에 대한 역 변환인 이산형 기본관측치 $n_{m,n}^{(M)}$은 다음 관계로 구해진다.

$$\sum_{m=0}^{M}\binom{M}{m} n_{m,n}^{(M)} = x_n \tag{21}$$

다음 장에서는 평균이산시간, 분산, 이산푸리에변환에 대한 불확정성의 원리를 검토한다.

Ⅳ. 이산 등가시정수를 이용한 푸리에변환에 있어서 불확정성의 원리

4.1 이산 푸리에변환에 있어서 불확정성 원리

임의의 파형 $f(n)$에 대하여, 평균이산시간 $\bar{n}$을

$$\bar{n}=\frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} n f^2(n)}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} f^2(n)} \tag{22}$$

으로 정의하면, 이산신호 $f(n)$에 대한 분산 $(\Delta n)^2$은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$(\Delta n)^2 = \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty}(n-\bar{n})^2 f^2(n)}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} f^2(n)}$$
$$= \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 f^2(n)}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} f^2(n)} - (\bar{n})^2 \tag{23}$$

이산신호에 대한 불확정성의 원리를 표현하기 위하여 Schwarz의 부등식으로부터 다음과 같은 관계의 식을 이용한다. 즉, 일반적으로 신호 $f_1(t)$, $f_2(t)$에 대하여

$$\left|\int_{c_1}^{c_2} f_1(t) f_2(t)\,dt\right|^2 \le \int_{c_1}^{c_2} |f_1(t)|^2 dt \int_{c_1}^{c_2} |f_2(t)|^2 dt \tag{24}$$

로 표현된다. 여기서, $f_1(t)=\omega F(e^{j\omega})$이고, $f_2(t)=F'(e^{j\omega})$ 그리고, $c_1=-\pi$, $c_2=\pi$로 두면 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}\omega F(e^{j\omega})F'(e^{j\omega})\,d\omega\right|^2 \le \int_{-\pi}^{\pi}|\,\omega F(e^{j\omega})|^2 d\omega \cdot \int_{-\pi}^{\pi}|\,F'(e^{j\omega})|^2 d\omega \tag{25}$$

위 식의 좌변을 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\omega F(e^{j\omega})\,F'(e^{j\omega})\,d\omega &= \left[\frac{1}{2}\,\omega F^2(e^{j\omega})\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}F^2(e^{j\omega})d\omega \\ &= \pi F^2(e^{j\pi}) - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}F^2(e^{j\omega})d\omega\end{aligned} \tag{26}$$

또한, $F(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}F_a(j\Omega)$, $|\omega| \le \pi$ 임으로 (26)식 우변의 첫 항도 다음과 같이 구해진다.

$$\left[\omega\frac{F^2(e^{j\omega})}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi F^2(e^{j\pi}) \tag{27}$$

여기서, $nf(n) \leftrightarrow jF'(e^{j\omega})$임으로, Parseval의 등식에 의하여 다음 식과 같이 표현된다.

$$\int_{-\pi}^{\pi}|F'(e^{j\omega})|^2 d\omega = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}n^2|f(n)|^2 \tag{28}$$

그리고, (25)식은 Schwarz부등식에 의하여

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\left|\pi F^2(e^{j\pi}) - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}F^2(e^{j\omega})d\omega\right|^2 \\ &\le \int_{-\pi}^{\pi}|\omega F(e^{j\omega})|^2 d\omega \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty}n^2|f(n)|^2\end{aligned} \tag{29}$$

로 나타낼 수 있다. (23)식에서 $(\bar{n})^2$은 일반성을 잃지 않게 평행 이동시켜서 0으로 놓을 수 있다. 따라서, 분산은 (29)식으로부터 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$(\Delta n)^2 \ge \frac{\frac{1}{2\pi}\left|\pi F^2(e^{j\pi}) - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}F^2(e^{j\omega})d\omega\right|^2}{\int_{-\pi}^{\pi}|\omega F(e^{j\omega})|^2 d\omega\int_{-\pi}^{\pi}|F(e^{j\omega})|^2 d\omega} \tag{30}$$

신호 $f(t)$가 $|\Omega| = \sigma$에 대하여 $F_a(j\Omega) = 0$ 이라고 가정하면, $|\omega| = \pi$에서 $F(e^{j\omega}) = 0$이다. 또한, $F(e^{j\omega})$가 실수라고 가정하면, $\int_{-\pi}^{\pi}F^2(e^{j\omega})d\omega = \int_{-\pi}^{\pi}|F(e^{j\omega})|^2 d\omega$ 이다. 그러므로, 분산은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$(\Delta n)^2 \ge \frac{\frac{1}{8\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F^2(e^{j\omega})d\omega}{\int_{-\pi}^{\pi}|\omega F(e^{j\omega})|^2 d\omega} \tag{31}$$

한편, $|F(e^{j\omega})|^2$은 ω의 우함수이다. 따라서, ω의 분산은 다음과 같이 정의된다.

$$(\Delta\omega)^2 = \frac{\int_{-\pi}^{\pi}\omega^2|F(e^{j\omega})|^2 d\omega}{\int_{-\pi}^{\pi}|F(e^{j\omega})|^2 d\omega} \tag{32}$$

이들의 관계를 알아보기 위하여 이산시간에 대한 분산과 주파수에 대한 분산의 곱으로 나타내면

$$\begin{aligned}(\Delta n)^2(\Delta\omega)^2 &\ge 1/8\pi \\ \Delta n\ \Delta\omega &\ge 1/2\sqrt{2\pi}\end{aligned} \tag{33}$$

과 같이 불확정성의 관계가 얻어진다.

4.2 이산 등가시정수를 이용한 푸리에변환에 있어서 불확정성의 원리

시간폭 τ를 갖는 임의의 연속시간 파형 $f_a(t)$를 고려하자. 그러면, 미분과 기울기의 관계에서 $f_a'(t) = -f_a(t)/\tau$로 표현할 수 있다.[4] 여기서, τ가 의미하는 것은 현시점에서 파형의 기울기가 감소하는 방향으로 계속 나아가서 그 크기가 없어 질 때까지의 시간폭이다. 위의 관계식으로부터 $\tau = -f_a(t)/f_a'(t)$로 된다. 따라서, τ는 시간에 관계없는 일정한 값으로 된다. 여기서, 전 시간구간($-\infty \sim \infty$)에서 그 적분이 1이 되는 무게함수를 정의하고, 일반 파형 $f(t)$에 대한 τ의 자승에 대한 무게평균치를 구하면 다음 식과 같다.

$$(\delta t)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}f(t)^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty}\{f'(t)\}^2 dt} \tag{34}$$

또한, 위 식에서 $f(t)$의 푸리에변환을 $F(j\Omega)$로 두면, Parseval등식을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$(\delta t)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}|F(j\Omega)|^2 d\Omega}{\int_{-\infty}^{\infty}\Omega^2|F(j\Omega)|^2 d\Omega} \tag{35}$$

신호 $f(t)$의 도함수 $y_a(t) = f'(t)$의 이산치 $y[n] = y_a(nT)$이고, $f_a(t)$의 이산치 $f_a(nT)$를 $f(n)$라고 하

자. 만일, T가 충분히 작다고 가정하면, 기본주기 $(-\pi \sim \pi)$내에서 $F(e^{j\omega})=F_a(j\Omega)/T$과 $\omega=\Omega T$임으로 이산 동가시정수 $(\delta n)^2$은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$(\delta n)^2 = T^2 \frac{\int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{j\omega})|^2 d\omega}{\int_{-\pi}^{\pi} \omega^2 |F(e^{j\omega})|^2 d\omega} \tag{36}$$

다음 장에서는 이산 자연관측변환에 있어서 불확정성의 원리가 성립함을 보인다.

V. 이산 정규형 자연관측변환의 불확정성

5.1 관측차수의 평균과 분산

계산의 준비로서 다음과 같은 함수를 고려한다.

$$c(x) = \sum_{m=0}^{M} \binom{M}{m} x^m = (1+x)^M \tag{37}$$

이러한 함수에 대한 도함수를 구하면

$$\begin{aligned} x c'(x) &= \sum_{m=0}^{M} m \binom{M}{m} x^m \\ &= Mx(1+x)^{M-1} \end{aligned} \tag{38}$$

로 되고, 이렇게 해서 구한 도함수에 도함수를 더 취하면 위 식에서 m대신에 m^2에 대한 관계식을 축차적으로 구할 수 있다. 여기서는 $x(n)$에 대한 이산 정규형 자연관측변환에 있어서 기본관측치 $n_m^{(M)}$의 무게함수의 합으로 나타내지 않고, 그 Norm의 자승값에 대해서도 동등한 관계가 성립하는 것에 착안한다. 기본관측치계열을 근거로 하여 m의 평균치를

$$\overline{m} = \frac{\sum_{m=0}^{M} m \binom{M}{m} \|n_m^{(M)}\|^2}{\sum_{m=0}^{M} \binom{M}{m} \|n_m^{(M)}\|^2} \tag{39}$$

로 정의하고, 평균차수라고 칭한다. 또한, $\overline{m}$의 주위에 m의 퍼지는 정도를 관측하기 위해

$$(\triangle m)^2 = \frac{\sum_{m=0}^{M} (m-\overline{m})^2 \binom{M}{m} \|n_m^{(M)}\|^2}{\sum_{m=0}^{M} \binom{M}{m} \|n_m^{(M)}\|^2} \tag{40}$$

과 같이 분산을 정의한다. 즉,

$$\overline{m^2} = \frac{\sum_{m=0}^{M} m^2 \binom{M}{m} \|n_m^{(M)}\|^2}{\sum_{m=0}^{M} \binom{M}{m} \|n_m^{(M)}\|^2} \tag{41}$$

M위의 정규형 자연관측법에 있어서 기본관측작용소는 (8)식으로부터 $X_m^{(M)} = A^m \Gamma^{M-m}$ 과 같이 정의되고, 이산신호에 대하여 이러한 기능을 하는 필터를 기본관측필터라고 부르며, 이들 필터의 전달함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} X_m^{(M)}(e^{j\omega}) &= V^m(e^{j\omega}) U^{M-m}(e^{j\omega}) \\ &= \{1 - \frac{e^{j\omega}+1}{(C+1)e^{j\omega}-(C-1)}\}^m \\ &\quad \cdot \{\frac{e^{j\omega}+1}{(C+1)e^{j\omega}-(C-1)}\}^{M-m} \\ &= \{\frac{e^{j\omega}+1}{(C+1)e^{j\omega}-(C-1)}\}^M \\ &\quad \cdot \{\frac{C(e^{j\omega}-1)}{e^{j\omega}+1}\}^m \end{aligned} \tag{42}$$

또한, (42)식의 Norm은

$$\begin{aligned} |X_m^{(M)}(e^{j\omega})|^2 &= |V^m(e^{j\omega}) U^{M-m}(e^{j\omega})|^2 \\ &= |\{\frac{e^{j\omega}+1}{(C+1)e^{j\omega}-(C-1)}\}^M \\ &\quad \cdot \{\frac{C(e^{j\omega}-1)}{e^{j\omega}+1}\}^m|^2 \\ &= \{\frac{1+\cos\omega}{(C^2+1)-(C^2-1)\cos\omega}\}^M \\ &\quad \cdot \{\frac{C^2(1-\cos\omega)}{1+\cos\omega}\}^m \end{aligned} \tag{43}$$

로 된다. 그리고, 기본관측치에 대해서도 Norm을 구하면

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{M} \binom{M}{m} \|n_m^{(M)}\|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m=0}^{M} \binom{M}{m} \{\frac{1+\cos\omega}{(C^2+1)-(C^2-1)\cos\omega}\}^M \\ &\quad \cdot \{\frac{C^2(1-\cos\omega)}{1+\cos\omega}\}^m |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \end{aligned} \tag{44}$$

과 같이 되며, 평균을 구하기 위하여 위 식에 m을 곱한 값을 구하면

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{M} m \binom{M}{m} \|n_m^{(M)}\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m=0}^{M} m \binom{M}{m} \\ &\{\frac{1+\cos\omega}{(C^2+1)-(C^2-1)\cos\omega}\}^M \\ &\cdot \{\frac{C^2(1-\cos\omega)}{1+\cos\omega}\}^m |X(e^{j\omega})|^2 d\omega = \frac{M}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \\ &\frac{C^2(1-\cos\omega)}{(C^2+1)-(C^2-1)\cos\omega} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \end{aligned} \tag{45}$$

과 같이 된다. 동일하게 m^2에 대해서도 그 값을 구하면

$$\sum_{m=0}^{M} m^2 \binom{M}{m} \|n_m^{(M)}\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{m=0}^{M} m^2 \binom{M}{m} \left\{\frac{1+\cos\omega}{(C^2+1)-(C^2-1)\cos\omega}\right\}^M \cdot \left\{\frac{C^2(1-\cos\omega)}{1+\cos\omega}\right\}^m |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

$$= \frac{M}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{C^2\sin^2\omega}{\{(C^2+1)-(C^2-1)\cos\omega\}^2}|X(e^{j\omega})|^2 d\omega + \frac{M^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{C^4(1-\cos\omega)^2}{\{(C^2+1)-(C^2-1)\cos\omega\}^2}|F(e^{j\omega})|^2 d\omega \qquad (46)$$

로 된다. 따라서, 구하는 평균 $\overline{m}$은

$$\overline{m} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{MC^2(1-\cos\omega)|X(e^{j\omega})|^2}{(C^2+1)-(C^2-1)\cos\omega}d\omega}{\int_{-\pi}^{\pi}|X(e^{j\omega})|^2 d\omega} \qquad (47)$$

로 되고, m^2에 대한 평균은 다음 식으로 구할 수 있다.

$$\overline{m^2} = \frac{M\int_{-\pi}^{\pi}\frac{C^2\sin^2\omega|X(e^{j\omega})|^2}{\{(C^2+1)-(C^2-1)\cos\omega\}^2}d\omega}{\int_{-\pi}^{\pi}|X(e^{j\omega})|^2 d\omega} + \frac{M^2\int_{-\pi}^{\pi}\frac{C^4(1-\cos\omega)^2|X(e^{j\omega})|^2}{\{(C^2+1)-(C^2-1)\cos\omega\}^2}d\omega}{\int_{-\pi}^{\pi}|X(e^{j\omega})|^2 d\omega} \qquad (48)$$

따라서, 분산 $(\Delta m)^2$은

$$(\Delta m)^2 = \overline{m^2} - (\overline{m})^2$$

$$= \frac{M^2\int_{-\pi}^{\pi}\frac{C^4(1-\cos\omega)^2}{\{(C^2+1)-(C^2-1)\cos\omega\}^2}}{\{\int_{-\pi}^{\pi}|X(e^{j\omega})|^2 d\omega\}^2} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega\int_{-\pi}^{\pi}|X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

$$-\{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{C^2(1-\cos\omega)}{(C^2+1)-(C^2-1)\cos\omega}|X(e^{j\omega})|^2 d\omega\}^2]$$

$$+\frac{M\int_{-\pi}^{\pi}\frac{C^2\sin^2\omega}{\{(C^2+1)-(C^2-1)\cos\omega\}^2}}{\{\int_{-\pi}^{\pi}|X(e^{j\omega})|^2 d\omega\}^2} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega\int_{-\pi}^{\pi}|X(e^{j\omega})|^2 d\omega \qquad (49)$$

로 된다. 여기서 이산 정규형 자연관측변환의 불확정성을 알아보기 위하여 다음과 같이

$$D = \frac{\overline{m}}{M-\overline{m}} \qquad (50)$$

정의하고, 이산평균차수지표라고 칭한다. 그러면 D는

$$D = \frac{\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(\omega)|X(e^{j\omega})|^2 d\omega}{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos\omega}{(C^2+1)-(C^2-1)\cos\omega}|X(e^{j\omega})|^2 d\omega} \qquad (51)$$

로 된다. 여기서, $\Phi(\omega) = \frac{C^2(1-\cos\omega)}{(C^2+1)-(C^2-1)\cos\omega}$ 이다.

위 식에서 T가 충분히 적을 경우, 다음식으로 나타낼 수 있다.

$$D = \frac{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{C^2\{1-(1-\frac{\omega^2}{2!}+\frac{\omega^4}{4!}-\cdots)|X(e^{j\omega})|^2\}}{(C^2+1)-(C^2-1)(1-\frac{\omega^2}{2!}+\frac{\omega^4}{4!}-\cdots)}d\omega}{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+(1-\frac{\omega^2}{2!}+\frac{\omega^4}{4!}-\cdots)|X(e^{j\omega})|^2}{(C^2+1)-(C^2-1)(1-\frac{\omega^2}{2!}+\frac{\omega^4}{4!}-\cdots)}d\omega}$$

$$\doteqdot \frac{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\omega^2C^2/4}{1+\omega^2C^2/4}|X(e^{j\omega})|^2 d\omega}{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{1+\omega^2C^2/4}|X(e^{j\omega})|^2 d\omega} \qquad (52)$$

이산 평균차수지표 D와 관측차수의 분산 $(\Delta m)^2$과의 관계를 밝히기 위하여 준비로서 다음과 같은 량을 고려한다.

$$\frac{(\Delta m)^2}{\overline{m}(M-\overline{m})} = \alpha + \frac{\beta}{M} \qquad (53)$$

여기서, $\alpha =$

$$\frac{\int_{-\pi}^{\pi}C^{-2}\Phi^2(\omega)|X(e^{j\omega})|^2 d\omega\int_{-\pi}^{\pi}|X(e^{j\omega})|^2 d\omega}{\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(\omega)|X(e^{j\omega})|^2 d\omega\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\omega)|X(e^{j\omega})|^2 d\omega} - \frac{\{\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(\omega)|X(e^{j\omega})|^2 d\omega\}^2}{\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(\omega)|X(e^{j\omega})|^2 d\omega\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\omega)|X(e^{j\omega})|^2 d\omega} \qquad (54)$$

단, $\varphi(\omega) = \frac{(1+\cos\omega)}{(C^2+1)-(C^2-1)\cos\omega}$ 이다.

그리고,

$$\beta = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \gamma^2(\omega)|X(e^{j\omega})|^2 d\omega \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega}{\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\omega)|X(e^{j\omega})|^2 d\omega \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\omega)|X(e^{j\omega})|^2 d\omega} \quad (55)$$

이다. 단, $\gamma(\omega) = \frac{C\sin\omega}{(C^2+1)-(C^2-1)\cos\omega}$.

5.2. 이산 정규형 자연관측변환의 불확정성

본 절에서는 이산 정규형 자연관측변환에 존재하는 불확정성의 관계를 밝힌다.
원시함수 $p(k)$를 다음과 같이 가정하자.

$$p(k) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{C+1}\right)\left\{\left(\frac{C-1}{C+1}\right)^k + \left(\frac{C-1}{C+1}\right)^{k-1} u(k-1)\right\} \quad (56)$$

여기서, $\sum_{n=0}^{\infty} p(k) = 1$이다.
그러면, 위의 원시함수를 이용하여 임의의 파형 $f(n)$을 관측해서 얻어진 파형을 $g(n)$이라 하면,

$$g(n) = \sum_{m=0}^{\infty} p(m) f(n-m) \quad (57)$$

으로 된다. $g(n)$의 이산 등가시정수를 $\delta' n$으로 나타내면 다음의 정리가 성립한다.
[정리1] $f(n)$의 이산 등가시정수와의 사이에

$$(\delta n)^2 \le (\delta' n)^2 \quad (58)$$

의 관계가 있다. 또한 $(\delta' n)^2$과 D는 서로 반비례한다. 즉,

$$\frac{(\delta' n)^2}{C^2/4} D = 1 \quad (59)$$

(증명) Schwarz부등식에 의하면, 일반적으로

$$\begin{aligned} \left\{\int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{j\omega})|^2\right\}^2 &= \left\{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|F(e^{j\omega})|}{\sqrt{1+(C\omega)^2/4}} \cdot \sqrt{1+(C\omega)^2/4}\,|F(e^{j\omega})|\right\}^2 d\omega \\ &\le \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1+C^2\omega^2/4} |F(e^{j\omega})|^2 d\omega \cdot \int_{-\pi}^{\pi} (1+C^2\omega^2/4)|F(e^{j\omega})|^2 d\omega \end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{j\omega})|^2 d\omega \left\{\int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{j\omega})|^2 d\omega - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{(1+C^2\omega^2/4)} |F(e^{j\omega})|^2 d\omega\right\} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{j\omega})|^2 d\omega \int_{-\pi}^{\pi} \frac{C^2\omega^2/4}{(1+C^2\omega^2/4)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &|F(e^{j\omega})|^2 d\omega \le \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{(1+C^2\omega^2/4)} \\ &|F(e^{j\omega})|^2 d\omega \int_{-\pi}^{\pi} \frac{C^2\omega^2}{4} |F(e^{j\omega})|^2 d\omega \end{aligned} \quad (61)$$

우변의 값으로 좌변을 나누면,

$$1 \ge \frac{\int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{j\omega})|^2 d\omega}{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{C^2\omega^2}{4} |F(e^{j\omega})|^2 d\omega} \cdot \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{C^2\omega^2/4}{(1+C^2\omega^2/4)} |F(e^{j\omega})|^2 d\omega}{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{(1+C^2\omega^2/4)} |F(e^{j\omega})|^2 d\omega} \quad (62)$$

과 같이 된다. 여기서, $g(n)$의 푸리에변환을 $G(e^{j\omega})$로 두면,

$$|G(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{1+C^2\omega^2/4} |F(e^{j\omega})|^2 \quad (63)$$

로 되므로 $g(n)$의 이산 등가시정수를 $\delta' n$으로 나타내면 다음식을 얻는다.

$$\frac{(\delta' n)^2}{C^2/4} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{(1+C^2\omega^2/4)} |F(e^{j\omega})|^2 d\omega}{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{C^2\omega^2/4}{(1+C^2\omega^2/4)} |F(e^{j\omega})|^2 d\omega} \quad (64)$$

따라서, $\frac{(\delta n)^2}{C^2/4} \cdot \frac{C^2/4}{(\delta' n)^2} \le 1$로 표현된다. 따라서, 양변을 정리하면 (58)식이 얻어진다. 또한, (64)식과 (52)식을 비교하면 (59)식이 얻어지는 것을 알 수 있다.

[정리2] 이산 등가시정수와 평균차수지표, 평균과의 관계는 다음과 같이 정리할 수 있다.

1) $\delta' n/(C^2/4) \to \infty$, $D \to 0$ ($\overline{m} \to 0$)의 관계가 있다.
2) $\delta' n/(C^2/4) \to 0$, $D \to \infty$ ($\overline{m} \to M$)의 관계가 있다.
3) $\delta' n/(C^2/4) \to 1$, $D \to 1$ ($\overline{m} \to M/2$)의 관계가 있다.

[정리3] 이산 등가시정수와 분산과의 관계는 다음과 같이 정리할 수 있다.

1) $\delta' n/(C^2/4) \to \infty$ 이면 $(\Delta m)^2 \to 0$이다.
2) $\delta' n/(C^2/4) \to 0$ 이면 $(\Delta m)^2 \to 0$이다.
3) $\frac{\delta' n}{C^2/4} \to 1$ 이면 $(\Delta m)^2 \to \frac{M^2}{4}$이다.

위의 정리로부터 이산 정규형 자연관측변환에 대하여 불확정성의 관계가 성립됨을 알 수 있다. 다음은 간단한 계산 예를 보인다.

5.3. 계산 예

본 절에서는 간단한 예를 사용하여 이산 정규형 자연관측변환에 있어서 불확정성의 원리를 만족하며, (53)식의 관계가 성립함을 보이고자 한다.

예제1) 연속신호 $f_a(t)$가 다음과 같을 때,

$$f_a(t) = E\frac{\sin^2(2\pi Wt)}{(2\pi Wt)^2} \tag{65}$$

이 신호에 대한 푸리에변환은 다음과 같이 표현된다.

$$F_a(j\Omega) = \begin{cases} \frac{E}{2W}\left(1 - \frac{|\Omega|}{4\pi W}\right), & |\Omega| \le 4\pi W \\ 0, & |\Omega| > 4\pi W \end{cases} \tag{66}$$

$f(n)$이 $f_a(t)$의 샘플치 $f_a(nT)$라고 하자. 또한 주기 $T = W/4$로 정한다.

그러면, 신호 $f(n)$을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$f(n) = E\frac{\sin^2(n\pi/2)}{(n\pi/2)^2} \tag{67}$$

$f(n)$의 푸리에변환은 다음과 같이 유도된다.

$$F(e^{j\omega}) = F_a(j\Omega)/T = 2E\left(1 - \frac{|\omega|}{\pi}\right), \quad \text{for} \quad |\omega| \le \pi \tag{68}$$

이산형 정규형 자연관측변환을 적용하면, $\overline{n} = 0$, $(\Delta n)^2 = \frac{3}{\pi^2}$ 이고, $(\delta n)^2 = \frac{10T^2}{\pi^2}$ 이다.

또한, 평균 $\overline{m}$은 $\overline{m} = \frac{MC^2(7-\pi^2)}{(1+C^2)\pi^2}$ 이며, 이산 차수지표 $D = C^2(7/\pi^2 - 1)$이다. 따라서, M과 분산과의 관계는 다음 식으로 나타내 진다.

$$\frac{(\Delta m)^2}{\overline{m}(M-\overline{m})} = \frac{1}{M} + \frac{16\left(7 - \pi^2 + 14C^2 - C^2\pi^4 + \frac{40C^2}{\pi^2}\right)}{(7-\pi^2)} \tag{69}$$

예제2) 이산신호 $f(n)$이 다음과 같을 때, 즉, $f(n) = \delta(n-3)/2 + \delta(n-4) + \delta(n-5)/2$ 인 경우에 이산 푸리에변환은

$$\begin{aligned} F(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2}\delta(n-3) + \delta(n-4) + \frac{1}{2}\delta(n-5)\right]e^{j\omega n} \\ &= e^{j4\omega}\left[\frac{e^{j\omega}+e^{-j\omega}}{2} + 1\right] \\ &= e^{j4\omega}(\cos\omega + 1) \end{aligned} \tag{70}$$

이다. 이산형 자연관측변환의 경우 $\overline{n} = 10/3$, $(\Delta n)^2 = 5.2$이고, (36)으로부터 이산 등가시정수는

$$\begin{aligned} (\delta n)^2 &= \frac{T^2\int_{\pi}^{\pi}|e^{j4\omega}(\cos\omega+1)|^2 d\omega}{\int_{\pi}^{\pi}\omega^2|e^{j4\omega}(\cos\omega+1)|^2 d\omega} \\ &= T^2/2 \end{aligned} \tag{71}$$

로 된다. 또한, (47)식으로부터

$\overline{m} = \frac{2MC^2(3C^4 - 8C^3 + 6C^2 - 1)}{3(C^2-1)^3}$ 으로 된다.

$D = \frac{C^2A}{B}$ 이다. 여기서,

$A = 3C^4 - 8C^3 + 6C^2 - 1$이고,

$B = 8C^5 - 15C^4 + 10C^2 - 3$이다.

그리고, (53)식의 관계는

$$\begin{aligned} \frac{(\Delta m)^2}{\overline{m}(M-\overline{m})} &= \frac{3(C-1)^5}{AB}\{(B - 20C^2) \\ &+ (4C^5 - 15C^4 - 10C^2 + 1)/M\} - C^2/B \end{aligned} \tag{72}$$

으로 된다.

VI. 결 론

본 논문에서는 정규형 자연관측변환에 있어서 이산 평균차수와 등가시정수와의 관계를 나타냈다. 그리고, 등가시정수와 관측차수의 분산과의 사이에 불확정성의 관계가 성립함을 명확히 하였고 이산 정규형 자연관측변환에 의한 파형의 기본적 양상을 명확히 하였다. 또한, 평균차수지표와 관측차수의 분산과의 관계를 도출하여, 시간 축 상의 파형의 퍼짐과 관측차수상의 퍼짐의 관계를 명확히 밝혔다. 따라서, 이산 정규형 자연관측변환에 있어서 불확정성의 원리가 성립함이 입증되었다.

참 고 문 헌

[1] 飯島泰藏, "波形の自然觀測に關する基礎理論", 信學論(A), Vol. J67-A, no. 10, pp. 951-958, Oct. 1984

[2] 飯島泰藏, "自然觀測法に基づく波形解析の基礎理論", 信學論(A), Vol. J68-A, no. 3, pp. 302-309, March 1985

[3] 飯島泰藏, "自然觀測變換の基礎理論", 信學論(A), Vol. J76-A, no. 11, pp. 1020-1026, Nov. 1993

[4] 飯島泰藏, " 近接型自然觀測變換における不確定性原理について "、信學論 (A), Vol. J79-A, no. 11, pp. 1886-1893, Nov. 1996

[5] 岩城 護, 飯島泰藏, " 離散時間波形に對する自然觀測法について ", 信學論 (A), Vol. J79-A, no. 3, pp. 728-735, March. 1996

[6] 飯島泰藏, 岩城 護," 正規型自然觀測變換における不確定性原理について", 信學論 (A), Vol. J80-A, no. 1, pp. 228-236, Jan. 1997

[7] A. Papoulis, " The Fourier Integral and its Applications ", New York : McGraw-Hill, 1962

[8] A. Papoulis, "Signal Analysis", New York: Mcgraw-Hill, 1977

[9] A. V. Oppenheim and R. W. Schafer, "Digital Signal Processing", Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1975

[10] 김태수,"이산형 자연관측변환에 있어서 불확정성의 원리에 관한 연구", 한국통신학회논문지, Vol. 24, No. 2A, pp. 321-327, Feb. 1999

김 태 수(Tae-soo Kim) 정회원

1987년 8월 : 경북대학교 전자공학과 졸업(공학사)

1991년 3월 : 일본 요코하마국립대학교 전자정보공학과 공학석사

1995년 3월 : 일본 요코하마국립대학교 전자정보공학과 공학박사

1996년 3월~현재 : 위덕대학교 조교수

<주관심 분야> 디지탈신호처리, 영상처리, 회로이론