DBpia

논문 00-25-2B-22 한국통신학회논문지 '00-2 Vol.25 No.2B

동일 수렴속도 조건에서 점근상대효율을 이용한 LMS와 Hybrid I 알고리즘의 성능 분석

정회원 손 원*

Performance Analysis of LMS and Hybrid I Algorithms using ARE under Same Convergence Speed Condition

Won Sohn* *Regular Member*

요 약

이 논문은 최소평균제곱 (LMS) 알고리즘과 Hybrid I 알고리즘이 동일한 수렴속도를 가질 때의 상대적인 성능을 기울기 추정기의 점근상대효율을 이용하여 정량적으로 분석하는 방안에 관하여 논하였다. 최소평균제곱 알고리즘은 최대하강법의 기울기벡터에 대한 순시값을 이용하고, Hybrid I 알고리즘은 최소평균제곱 알고리즘의 순시값을 단순화한 것을 이용하기 때문에 각 알고리즘을 기울기 벡터에 대한 추정기를 사용하고 있다는 관점으로 정의하였으며, 이들이 기울기 벡터에 대한 일치추정기의 형태를 가진다는 것을 보였다. 일치 추정기를 이용한다는 성질을 기본으로 하여, 동일 수렴속도 조건에서 최소평균제곱 알고리즘의 기울기 추정기에 대한 Hybrid I 알고리즘의 기울기 추정기의 점근상대효율 구하였다. 분석한 점근상대효율값과 기존의 방식을 비교하고 이론의 정확성을 검증하기 위하여, 등화기와 시스템 식별기를 이용하여 모의실험을 수행하였다.

ABSTRACT

This paper examines the performance of LMS and Hybrid I adaptive filtering algorithms by the asymptotic relative efficiency (ARE) of estimators. The LMS algorithm exploits the instantaneous value of the gradient vector of the steepest descent method, and the Hybrid I algorithm exploits a simplified form of the gradient estimator in the LMS algorithm. We defined the two algorithms with respect to the gradient estimator, and showed that the estimators were consistent to the gradient vector. The ARE of the two estimators is analyzed, and computer simulations for adaptive equalization and system identification are performed to check the validity of the theory.

Ⅰ. 서 론

이 논문의 목적은 최소평균제곱 알고리즘과 Hybrid I 알고리즘[1]의 성능을 기울기 추정기의 점근상대효율[2,3]을 이용하여 분석하는 것이다. 많은 저자들이 최소평균제곱 알고리즘과 단순화된 최소평균제곱알고리즘의 관계를 분석하였다. Duttweiler [1]는 반향제거기에서 비선형 승수기를 가지는 적응대역기 성능을 분석하여, 최소평균제곱 알고리즘이 가장 뛰어난 성능을 가진다는 것을 보였다. Claasen과 Mecklenbrauker[4]는 적응 FIR 디지털 여파기에서, Gersho[6]는 적응등화기에서 Hybrid I 알고리즘의 수렴을 분석하여, Hybrid I 알고리즘의 수렴이 보장되며 최소평균제곱 알고리즘보다 훨씬 느리다는 결론을 지었다. 많은 저자들이 위 알고리즘의 성능을 여파기 출력값과 기대 결과값에 대한 평균제곱오차[6,7], 첨두 찌그러짐[8], 또는 가중치 함수에 대한 기

* 경희대학교 산학협력연구원(wsohn@nms.kyunghee.ac.kr)
논문번호 : 99345-0830, 접수일자 : 1999년 8월 30일
※ 본 연구는 1999년도 경희대학교 지원에 의한 결과임.

www.dbpia.co.kr

대 기준[1] 등을 이용하여 추상적으로 비교하였다. Masry와 Bullo[9]는 입력신호가 무상관이고 정규분포를 가질 때, Sign 알고리즘의 수렴분석에 대한 연구를 하여, 편향오차의 공분산 행렬에 대한 순환공식을 만들었다. Eweda[10]는 여러 가지 적응알고리즘에 대하여 경과적 성능저하를 연구하여, 시스템 식별기를 모형으로 평균수렴시간에 대한 닫힌 형식의 표현을 유도하였다. 여기서는 기울기 벡터에 대한 추정기 통계량을 이용하여 두 적응여파기 성능을 정량적으로 분석하고자 한다.

최소평균제곱오차 기준에 대한 최적여파기인 위너 여파기에 대한 해법은 기울기 벡터를 요구하는 최대하강법을 통하여 구할 수 있으며, 기울기 벡터는 탭 입력의 상관행렬과 탭 입력과 기대 결과치 사이의 교차상관벡터를 포함하는 두 가지 요소에 좌우한다. 우리가 분석하고자 하는 적응여파 알고리즘은 기울기벡터의 두 가지 요소를 어떻게 추정하느냐에 따라 최소평균제곱 알고리즘, 또는 Hybrid I 알고리즘으로 구분된다. 최소평균제곱 알고리즘은 두 가지 요소의 순시치를 추정기로 사용하는 것이며, Hybrid I 알고리즘은 입력 신호와 오차신호극성을 이용한 것이다. 최소평균제곱 알고리즘과 Hybrid I 알고리즘의 차이점은 각 알고리즘이 최대하강법 알고리즘의 기울기벡터에 대하여 다른 추정기를 사용한다는데 있다. 우리는 각 알고리즘의 추정기를 기울기 벡터에 대한 무편향추정기로 변형하고, 이들에 대한 점근상대효율을 찾은 다음, 각 알고리즘의 평균제곱오류와 비교한다.

Ⅱ. Hybrid I 알고리즘, 및 ARE의 정의

최소평균제곱 알고리즘은 최대하강법을 단순화한 형태를 이루며, 기울기 벡터, $\nabla(n)$를 대신하여, 기울기 추정값, $\widehat{\nabla}_1(n)$를 사용하며, 순환식은 (식 1)과 같다.

$$\widehat{w}(n+1) = \widehat{w}(n) + \frac{1}{2}\mu[-\widehat{\nabla}_1(n)] \tag{1}$$

최소평균제곱 알고리즘에 사용된 기울기 추정값은 기울기 벡터, $\nabla(n)$의 순시값이며, (식 2)와 같이 표현될 수 있다.

$$\widehat{\nabla}_1 = -2\,u(n)d(n) + 2\,u(n)\,u^H(n)\,\widehat{w}(n) \tag{2}$$

따라서 최소평균제곱 알고리즘은 (식 3)과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} \widehat{w}(n+1) &= \widehat{w}(n) + \mu_1\,u(n)\,e^*(n) \\ e(n) &= d(n) - \widehat{w}(n)\,u(n) \end{aligned} \tag{3}$$

Hybrid I 알고리즘은 최소평균제곱 알고리즘의 추정기에서 오차신호극성만을 사용하는 추정기를 사용하며, 추정기, $\widehat{\nabla}_2(n)$는 (식 4)와 같이 표현할 수 있다.

$$\widehat{\nabla}_2(n) = -2\,u(n)\,\mathrm{sgn}[e(n)]. \tag{4}$$

동일한 수렴속도를 갖는 경우에 대한 점근상대효율에 대한 정의[2,3]는 다음과 같다.

$\sqrt{n}[\,\delta_{in} - g(\theta)] \xrightarrow{L} N(0, \tau_i^2)$, $i=1,2$일 때, $\{\delta_{1n}\}$에 대한 $\{\delta_{2n}\}$의 점근상대효율은 (식 5)와 같다.

$$e_{2,1} = \frac{\tau_1^2}{\tau_2^2} \tag{5}$$

여기서 δ_{in}은 추정기의 열을, $g(\theta)$는 모수를, $N(0, \tau_i^2)$은 평균값 0이고 분산값 τ_i^2를 가지는 정규분포를, $\xrightarrow{L}$는 수렴한다는 것을 의미한다.

Ⅲ. LMS 및 Hybrid I 알고리즘의 분석

각 알고리즘을 비교할 때, 특정 시간에서 각 알고리즘의 입력신호와 기대출력 신호값은 동일하나 가중벡터값은 각 알고리즘의 수렴속도와 정상상태의 평균제곱오류가 다르기 때문에 다른 것으로 간주되었다. 따라서 각 오차신호는 일반적으로 서로 다른 값을 가지게 된다. 최소평균제곱 알고리즘과 Hybrid I 알고리즘의 추정기를 아래와 같이 정의하였다.

$$\begin{aligned} LMS: \quad & T_1 = u_i(n)\,e_1(n) \\ Hybrid\ I: \quad & T_2 = u_i(n)\,\mathrm{sgn}[e_2(n)] \end{aligned} \tag{6}$$

여기서, $u_i(n)$은 $u(n)$의 i번째 요소이다. 기울기 추정기의 통계적 분석을 수학적으로 다루기 용이하도록 하기 위해서, $u_i(n)$와 $e(n)$이 평균값이 0 인 결합정규분포를 가지고 $u_i(n)$는 통계적으로 시불변이라고 가정한다. 이러한 가정은 V장에서 모의실험을 통하여 검증한다. 이 때, T_1, T_2의 기대값은 아래와 같다.

www.dbpia.co.kr

$$E[T_1]=\sigma_u\sigma_{e_1}\rho_1(n),\quad E[T_2]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma_u\rho_2(n)$$

여기서 $\rho_i(n)$는 T_i의 입력신호와 오차신호간의 상관계수이다. n값이 증가함에 따라 각 추정기는 수렴하기 때문에 $\sigma^2_{e_i}(n)$과 $\rho_i(n)$이 시불변값인 σ_i^2과 ρ_i가 된다. 따라서 n이 무한대로 갈 때, 기울기 추정기의 기대값은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} E[\,T_1] &= \sigma_u\sigma_{e_1}\rho_1\\ \lim_{n\to\infty} E[\,T_2] &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma_u\rho_2\end{aligned}\qquad (7)$$

(식 7)에 의하면 T_1은 기울기 벡터의 비편향 추정기임을 알 수 있다. T_2는 기울기 벡터에 대한 비편향 추정기가 아니라는 것이 명백하나, 그들이 동일한 입력과 기대값을 사용하기 때문에 무편향 추정기, T_1의 함수라고 할 수 있다.

최소평균제곱 알고리즘 계열에 대한 탭 가중치 벡터는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{w}}(n+1) &= \hat{\boldsymbol{w}}(0)+\mu_1\sum_{i=0}^{n}\boldsymbol{u}(i)\,e_1(i)\\ \hat{\boldsymbol{w}}(n+1) &= \hat{\boldsymbol{w}}(0)+\mu_2\sum_{i=0}^{n}\boldsymbol{u}(i)\,\mathrm{sgn}[e_2(i)]\end{aligned}$$

$\hat{\boldsymbol{w}}(0)=0$의 가정 아래, 각 알고리즘의 오차신호는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}e_1(n) &= d(n)-\left(\mu_1\sum_{i=0}^{n-1}\boldsymbol{u}(i)\,e_1(i)\right)^H\boldsymbol{u}(n)\\ e_2(n) &= d(n)-\left(\mu_2\sum_{i=0}^{n-1}\boldsymbol{u}(i)\,\mathrm{sgn}[e_2(i)]\right)^H\mathbf{u}(n)\end{aligned}\qquad (8)$$

(식 8)은 $e_i(n)$가 $d(j)$와 $u(j)$의 함수인 것을 알 수 있다. 따라서, T_1, T_2는 $e_i(n)$값이 다르지만 동일한 통계량을 사용한다. 우리는 편향 추정기를 다음과 같이 점근적으로 비편향 추정기로 변환할 수 있다.

$$W_1=T_1,\quad W_2=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\rho_1}{\rho_2}\sigma_{e_1}T_2$$

T_2가 W_2로 상수값의 배수만큼 변형되었기 때문에, 스텝크기 계수는 각 알고리즘이 원래의 형태를 가지도록 하기 위해서는 같은 양만큼 변경되어야 한다. Hybrid I 알고리즘은 아래와 같이 표현될 수 있다.

$$\hat{\boldsymbol{w}}(n+1)=\hat{\boldsymbol{w}}(n)+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\rho_1}{\rho_2}\sigma_{e_1}\mu_2\cdot\boldsymbol{T}_2$$

각 기울기추정기의 분산값을 구하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned}\mathrm{var}[\,W_1] &= (1+\rho_1^2)\sigma_u^2\,{\sigma_{e_1}}^2\\ \mathrm{var}[\,W_2] &= \left(\frac{\pi}{2\rho_2^2}-1\right)\rho_1^2\sigma_u^2\,{\sigma_{e_1}}^2\end{aligned}\qquad (9)$$

$n\to\infty$일 때, $\sigma^2_{e_i(n)}\to 0$가 되므로, 변형된 기울기 추정기, W_i, $i=1,2$는 기울기 벡터에 대하여 일치추정기가 된다. 추정기, W_i, $i=1,2$가 점근적으로 정규분포를 가진다고 하였을 때, (식 6)을 이용하면 추정기의 점근상대효율에 대한 충분 조건이 (식 10)과 같이 존재한다.

$$\begin{aligned}W_1-\nabla(n) &\xrightarrow{L} N\left(0,(1+\rho_1^2)\sigma_u^2\sigma_w^2\right)\\ W_2-\nabla(n) &\xrightarrow{L} N\left(0,\left(\frac{\pi}{2}-\rho_2^2\right)\sigma_u^2\sigma_w^2\right)\end{aligned}\qquad (10)$$

(식 5)에 따라 W_1에 대한 W_2의 점근상대효율은 다음과 같다.

$$e_{21}=\left(\frac{1+{\rho_1}^2}{\frac{\pi}{2}-{\rho_2}^2}\right){\rho_2}^2\qquad (11)$$

(식 11)에 따르면 최소평균제곱 알고리즘에 대한 Hybrid I 알고리즘의 점근 상대효율은 각 알고리즘의 입력신호와 오차신호간의 상관계수값에 좌우한다는 것을 알 수 있다. 최소평균제곱 알고리즘의 상관계수값이 증가할수록 점근 상대효율은 낮아지며, Hybrid I 알고리즘의 상관계수값이 증가할수록 점근상대효율도 좋아진다는 것을 알 수 있다.

Ⅳ. 모의실험

적응여파기 알고리즘을 분석하기 위하여 근사값과 일부 가정이 사용되어 기울기 추정기의 점근상대효율을 구하였다. 우리는 이론의 명확성을 컴퓨터 모의실험에 의한 결과값을 비교함으로써 검정하고자 한다.

1. 실험 모델

(그림 1)은 적응등화기 모의실험을 위하여 사용된 시스템 블록도이다. 불규칙 잡음 발생기 I은 송신기의 출력신호, $a(n)$을 제공하고, 불규칙 잡음발생기

www.dbpia.co.kr

II는 채널출력신호를 손상시키는 부가잡음, $v(n)$을 제공한다.

적응등화기는 부가잡음이 존재할 때, 채널에 의하여 발생하는 찌그러짐을 정정한다. 기대출력신호는 지연된 송신신호를 사용한다. 송신신호, $a(n)$과 부가잡음, $v(n)$은 평균값이 영이고 각 분산값이 σ_a^2와 σ_v^2인 백색 정규수열로 모형화하였으며, 부가잡음 신호는 송신신호와 무상관한 것으로 가정하였다. 채널의 임펄스반응은 올림코사인에 의해 다음과 같이 정의하였다.

$$h_n=\begin{cases}\frac{1}{2}\left[1+\cos\left(\frac{2\pi}{W}(n-2)\right)\right], & n=1,2,3\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

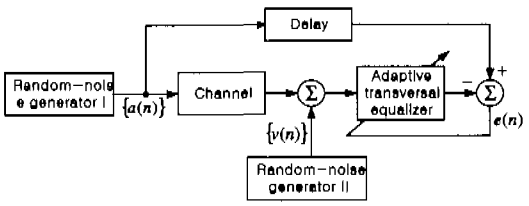

그림 1. 적응등화기 모의실험을 위한 시스템 구성도

여기서, 매개변수 W 는 채널에 의하여 발생하는 진폭 찌그러짐 양을 조정한다. 시간, n에서 등화기의 첫 번째 탭 입력은 다음과 같다.

$$u(n)=\sum_{k=1}^{3} h_k a(n-k)+v(n)$$

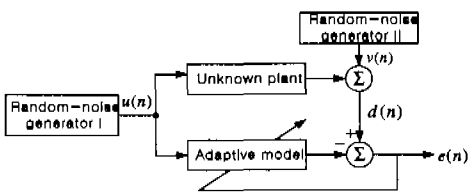

그림 2. 시스템식별기 모의실험을 위한 시스템 구성도

(그림 2)는 한 개의 입력을 가진 시스템 식별기의 모의실험을 위한 시스템이다. 시스템 식별기는 알려지지 않은 시스템을 모형화하기 위하여 사용된다. 알려지지 않은 시스템의 전달함수는 (식 12)로 가정하였다.

$$H(z)=1+1.8\,z^{-1}+0.9\,z^{-2} \qquad (12)$$

기대 출력신호는 아래와 같다.

$$d(n)=u(n)+1.8u(n-1)+0.9u(n-2)+v(n)$$

2. 점근 상대효율에 대한 모의실험

우리는 분석된 기울기 추정기의 비편향성과 점근 상대효율 값을 적응등화기와 시스템 식별기 분야에서 최소평균제곱 계열 알고리즘을 이용한 모의실험을 하여 살펴보았다. 각 기울기 추정기의 비편향성을 평가하기 위하여 각 추정기의 비편향성을 다음과 같이 정의하였다.

$$\xi_i=\frac{\|\,\mathrm{E}[\,W_i]\,\|-\|\,\mathrm{E}[\,W_2]\,\|}{\|\,\mathrm{E}[\,W_{1\infty}]\,\|} \qquad (13)$$

여기서, $W_{1\infty}$는 정상상태 영역에서의 W_1을 의미한다. 각 알고리즘에 대한 비편향성과 분산벡터의 노름을 다음과 같이 구하였다.

$$\xi_1=0$$

$$\|\,\mathrm{var}[\,\mathbf{W}_1]\,\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{M}(\,\mathrm{var}[\,u(n-i+1)e_1(i)])^2}$$

$$\xi_2=\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{M}\mathrm{E}^2[\,W_{1,i}]}-\sqrt{\sum_{i=1}^{M}\mathrm{E}^2[\,W_{2,i}]}\right)E_0^{-1}$$

$$\|\,\mathrm{var}[\,\mathbf{W}_2]\,\|=\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{\sigma_{e_1}\rho_1}{\rho_2}\right)^2\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{M}(\,\mathrm{var}[\,u(n-i+1)\,\mathrm{sgn}[\,e_2(i)]])^2}$$

여기서, $E_0=\sqrt{\sum_{i=1}^{M}(\,\mathrm{E}[\,W_{1\infty}])^2}$. (식 11)로부터 이론적인 점근상대 효율값을 알기 위하여, ρ_1, ρ_2를 찾아야만 한다. 정상상태 영역에서의 입력벡터, $u(n)$과 오차신호, $e(n)$사이의 상관계수벡터, ρ는 다음과 같이 표현된다.

$$\rho=\frac{\mathrm{E}[\,u(n)e(n)]}{\sigma_u\sigma_e}$$

상관계수벡터에 대한 대표적인 스칼라 값으로 상관계수벡터의 평균 노름을 다음과 같이 구하였다.

$$\rho=\sqrt{\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\left(\frac{\mathrm{E}[\,u(n-i+1)e(n)]}{\sigma_u\sigma_e}\right)^2}$$

최소평균제곱 및 Hybrid I 알고리즘의 기울기 추정기의 비편향성에 대한 모의실험 결과는 (그림 3)와 같다. (그림 3)에 의하면 각 기울기 추정기는 시간이 지남에 따라 비편향화 된다는 것을 알 수 있기 때문에 3장에서의 가정은 적절함을 알 수 있다.

각 기울기 추정기의 분산벡터노름에 대한 모의실

www.dbpia.co.kr

험결과는 (그림 4) 및 (그림 5)와 같다. (그림 4)의 결과로부터 모의실험 점근상대효율값을 정상 영역에서 분산 노름을 평균함으로서 구하였다. 이론 및 모의실험 점근상대 효율값은 (표 1)에 있다.

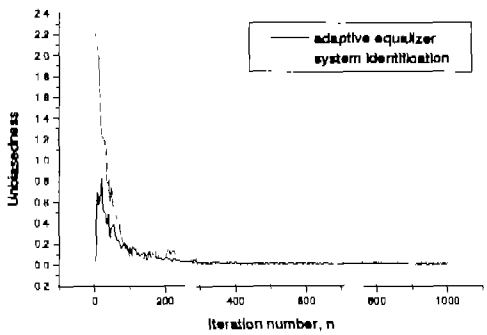

그림 3. Hybrid I 알고리즘의 기울기 추정기에 대한 비편향성.

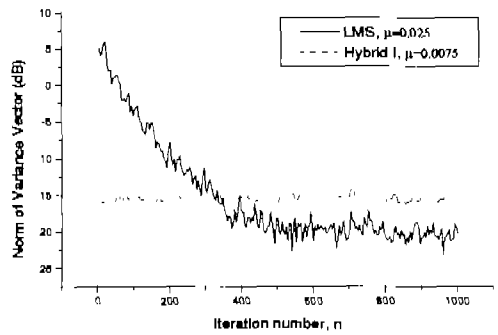

그림 4. 적응등화기에 대한 LMS 및 Hybrid I 알고리즘의 기울기 추정기에 대한 분산벡터노름.

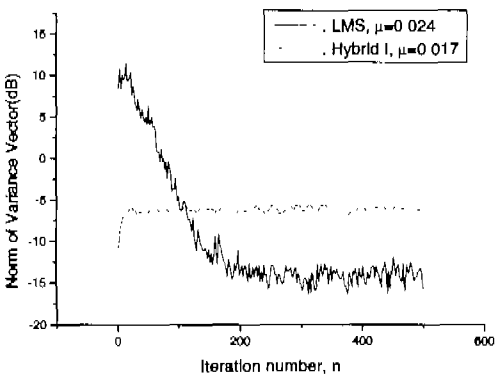

그림 5. 시스템식별기에 대한 LMS 및 Hybrid I 알고리즘의 기울기 추정기에 대한 분산벡터노름.

표 1. 동일수렴속도 조건하에서의 이론 및 모의실험 점근상대효율값.

	Adaptive Equalizer		System Identification	
	LMS	Hybrid I	LMS	Hybrid I
이론값	1.0	0.321	1.0	0.424
모의실험 결과값	1.0	0.349	1.0	0.419

V. 결 론

우리는 최소평균제곱 알고리즘과 Hybrid I 알고리즘의 성능을 각 알고리즘의 기울기 추정기에 대한 점근상대효율을 통하여 분석하였다. 점근상대효율의 분석결과인 (식 11)에 따르면 점근상대효율값은 각 알고리즘의 입력신호와 오차신호간의 상관계수의 함수라는 결론이 나왔다. 따라서 각 알고리즘의 상대적인 성능은 절대적이지 않고 응용분야에 따른 주위환경에 좌우됨을 알 수 있다.

점근상대효율 분석결과의 정확성을 동일 수렴속도 조건에서 등화기와 시스템 식별기를 이용한 모의실험을 한 결과, 실험 값과 이론 값이 거의 동일하다는 것이 밝혀졌으며, 이 논문에서 사용한 등화기와 시스템 식별기 응용에서는 최소평균제곱 알고리즘에 대한 Hybrid I 알고리즘의 점근 상대효율값이 각각 정량된 값인 0.321과 0.424의 값을 얻을 수 있었다.

앞으로 점근상대효율과 각 알고리즘의 상관계수에 대한 관계와 상관계수와 주위환경의 관계에 대한 연구가 더욱 진행되어야 할 것이다.

참 고 문 헌

[1] D. L. Duttweiler, "Adaptive filter performance with nonlinearities in the correlation multiplier," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-30, pp. 578-586, August 1982.

[2] E. L. Lehmann, *Theory of Point Estimation.* New York: Wiley, 1983.

[3] J. D. Gibson and J. L. Melsa, *Introduction to Nonparametric Detection with Applications.* New York: Academic Press, 1975, and IEEE Press Classic Reissue, 1995.

[4] T. A. C. M. Claasen and W. F. G. Mecklenbrauker, "Comparisons of the convergenve of

www.dbpia.co.kr

two algorithms for adaptive FIR digital filters," *IEEE Trans. Circuits Syst,*. vol. CAS-28, pp. 510-518, June 1981.

[5] A. Gersho, "Adaptive filtering with binary reinforcement," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-30, pp. 191-197, March 1984.

[6] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*. New York: Prentice Hall, 1991.

[7] B. Widrow and S.D. Stearns, *Adaptive Signal Processing*. New York: Prentice Hall, 1985.

[8] R. Lucky, "Automatic equalization for digital communication," *Bell Syst. J.*, vol. 44, pp. 547-588, April 1965.

[9] E. Masry and F. Bullo, "Convergence analysis of the sign algorithm for adaptive filtering," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-41, pp. 489-495, March 1995.

[10] E. Eweda, "Transient performance degradation of the LMS, RLS, sign, signed regressor, and sign-sign algorithms with data correlation," *IEEE Trans. Circuits Syst,*. vol. CAS-46, pp. 1055-1063, August 1999.

손 원(Won Sohn) 정회원

1982년 2월 : 경북대학교 공학사 (전자공학과)
1990년 5월 : 텍사스 A&M 대 공학석사(EE)
1993년 8월:텍사스 A&M 대 공학박사(EE)

1982년 1월~1987년 6월 : 국방과학연구소(진해)
1993년 9월~1999년 2월 : 한국전자통신연구원
1999년 3월~현재 : 경희대학교 전자정보학부 조교수
<주관심 분야> 디지털방송, 위성통신, 신호처리

www.dbpia.co.kr