

# Laplacian 분포 함수를 이용한 양자화 잡음 모델링

최지은\*, 정회원 이병욱\*

## Modeling Quantization Error using Laplacian Probability Density Function

Ji-Eun Choi\*, Byung-Uk Lee\* *Regular Members*

요약

영상 압축 또는 영상 부호화에서 후처리, 복원, transcoding을 하는 경우, DCT 계수의 양자화 잡음 모델이 필요하다. 양자화 된 계수만 알고 있는 경우에는 양자화 되기 전의 분포를 구할 수 없다. 본 논문에서는 양자화 되기 전의 DCT 계수의 확률 분포함수를 Laplacian으로 가정하고, 양자화된 계수로부터 분산을 구하고 이를 사용하여 양자화 이전의 분산을 추정하는 방법을 제시하였다. 여러 영상을 사용한 실험을 통하여 제안된 방법의 결과가 기존의 방법에서는 분산이 작게 나오는 단점을 보완하는 것을 확인하였다.

ABSTRACT

Image and video compression requires quantization error model of DCT coefficients for post processing, restoration or transcoding. Once DCT coefficients are quantized, it is impossible to recover the original distribution. We assume that the original probability density function (pdf) is the Laplacian function. We calculate the variance of the quantized variable, and estimate the variance of the DCT coefficients. We can confirm that the proposed method enhances the accuracy of the quantization error estimation.

### 1. 서론

MPEG (Moving Picture Expert Group)의 동영상 압축 방식과 Joint Photographic Expert Group (JPEG) 정지 영상 압축 방식은 인터넷이나 멀티미디어 환경에서 영상의 저장, 통신에 널리 사용되고 있다. MPEG이나 JPEG 방식으로 압축된 영상을 복원하면, 원본 영상과 차이가 난다. 이것은 영상 압축시의 양자화 과정에서 양자화 오류가 발생하기 때문이다. 따라서 이는 손실 압축 방식 (lossy compression) 에 속한다. JPEG으로 압축되었던 영상을 복원 (image restoration) 하는 경우 Wiener filter 등을 적용하려면 양자화 잡음의 주파수 스펙트럼이 필요하다<sup>[1][2]</sup>. 색상기반 영상 검색에서도 JPEG 영상을 검색하는 경우 양자화 잡음을 고려한

색상거리를 사용하는 것이 효과적이다<sup>[3]</sup>. 그 외에도 영상처리의 알고리즘을 연구하고 정량적으로 평가하는 경우, 입력영상이나 잡음의 주파수 대역폭이나 power 스펙트럼 등의 model이 필요하다<sup>[4][5]</sup>. 또한 한편 MPEG으로 압축된 영상을 다른 bitrate로 변환하는 경우, 즉 transcoding을 하는 경우에는 이미 양자화 되어 있는 DCT 계수들을 다시 양자화 하여야 한다. 이 경우에는 양자화되어 있는 계수의 분포로부터 양자화 잡음을 modeling하여야 한다<sup>[6]</sup>. 그러나 양자화된 계수들로부터 양자화 잡음을 추정하는 연구는 발표된 것이 거의 없다. 대부분의 연구는 신호의 확률 분포가 알려져 있을 때, 잡음을 최소화 하는 양자화 방법에 국한되었다<sup>[1][6]</sup>. 본 논문에서는 원래의 DCT 계수의 분포가 Laplacian 분포를 따른다고 가정하고, 이것이 양자화 되었을 때의 분포

\* 이화여자대학교 정보통신학과(bulee@ewha.ac.kr)

논문번호 : 00137-0424, 접수일자 : 2000년 4월 24일

를 사용하여 양자화되기 전의 분포 함수를 예측하는 방법을 제시하고, 실험을 통하여 제시한 방법이 기존의 방법보다 양자화 오차를 정확하게 모델링할 수 있음을 보였다.

## II. DCT 계수의 양자화

MPEG이나 JPEG 영상 압축 표준에서는 영상을 블록 단위로 나누어서 Discrete Cosine Transform<sup>[8]</sup> (DCT) 하고, 각 계수를 양자화한 후 줄길이 부호화 (run length coding)와 엔트로피 부호화 (entropy coding)를 한다. 여기에서는 양자화 (quantization) 부분에서 발생하는 양자화 오차에 대하여 분석한다. 손실의 대부분은 양자화 과정에서 일어난다.

그림 1에 보인 바와 같이 M x M의 영상 블록 x(m, n)이 DCT 된 값을 X(u, v)로 나타내고 이를 양자화하였다가 역양자화한 값을 Y(u, v)라고 하자. 대부분의 경우 블록의 크기 M = 8 이다. Y를 역 DCT한 것을 y(m, n)이라고 하자.

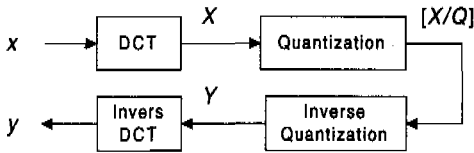


그림 1. JPEG 에서 양자화와 역양자화

여기에서 2D DCT와 역 DCT는 맨 아래와 같이 정의되었다.

또한 영상의 DCT 계수인 X가 양자화 및 역양자화 과정을 거친 값 Y는 다음 식과 같다.

$$Y(u, v) = Q(u, v) \left[ \frac{X(u, v)}{Q(u, v)} \right]$$

$$X(u, v) = \frac{2}{M} \alpha(u)\alpha(v) \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{M-1} x(m, n) \cos[\pi(2m+1)u/2M] \cos[\pi(2n+1)v/2M]$$

$$x(m, n) = \frac{2}{M} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{M-1} \alpha(u)\alpha(v) X(u, v) \cos[\pi(2m+1)u/2M] \cos[\pi(2n+1)v/2M]$$

$$\alpha(u) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & \text{for } u=0 \\ 1, & \text{for } u=1 \dots M-1 \end{cases}$$

$$\sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{M-1} (y(m, n) - x(m, n))^2 = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{M-1} (Y(u, v) - X(u, v))^2 = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{M-1} N^2(u, v)$$

위의 식에서 Q(u, v)는 (u, v) 위치의 DCT 계수의 양자화 크기를 나타내고, [ · ] 기호는 가장 가까운 정수 값을 취하는 기호를 나타낸다. JPEG 표준에서 예로서 보인 양자화 행렬은 표 1에 보이고 있다. 영상의 압축율을 조절하기 위하여 이 행렬에 scale factor를 곱하여 사용한다. 이때 발생하는 양자화 잡음 N(u, v)는

$$N(u, v) = Y(u, v) - X(u, v) \tag{1}$$

로 나타낼 수 있다.

Parseval theorem을 적용하면 JPEG 압축 과정에서 발생하는 양자화 잡음은 아래의 식과 같이 영상 영역에서 구할 수도 있고, DCT된 주파수 영역에서도 구할 수 있다.

많은 경우 양자화 잡음 N이 -Q/2 에서 Q/2 사이에 균일하게 분포되어 있다고 가정할 수 있다. 이러한 경우 잡음의 평균은 E[N] = 0 이 되고, 잡음의 분산은 E[N<sup>2</sup>] = Q<sup>2</sup>/12이 된다. 그러나 대부분의 자연영상에서는 DCT 계수의 분포가 균일하지 않다. 또한 공간 주파수가 높아질수록 계수의 분포가 0 부근에 집중되며, 양자화 크기 Q(u, v)는 표 1에서 보는 바와 같이 고주파가 될수록 더 커진다. 이것은 사람의 고주파 성분의 잡음에 민감하지 않은 사람의 시각특성을 고려한 결과이다. 특히 |X(u, v)| ≪ Q/2인 경우에는 양자화 잡음의 분포가 -Q/2 에서 Q/2 사이에서 균일하지 않으므로 분산값도 균일 분포의 경우보다 더 작아진다.

## III. DCT 계수 분포의 Laplacian 모델링

DCT 계수의 분포함수의 모델로서 Laplacian 분포함수를 많이 사용한다<sup>[4][6][7]</sup>. 본 논문의 실험에서

도 Laplacian 모델이 양자화 잡음을 모델링하는 경우에 상당히 정확하다는 것을 확인하였다.

Laplacian 분포는 다음과 같다.

$$f(X) = \frac{a}{2} e^{-a|X|} \quad (2)$$

이때의 평균과 분산값은 다음과 같다.

$$E[X] = 0, \text{VAR}[X] = \frac{2}{a^2} \quad (3)$$

위의 식 (3)을 사용하여 분산으로부터 Laplacian 분포 함수의 변수인  $a$  값을 구할 수 있다. 식 (2)의 분포 함수를 사용하여 양자화 잡음의 분산  $\sigma_q^2$ 을 구하면,

$$\begin{aligned} \sigma_q^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} N^2(X) f(X) dX \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} N^2(X) \frac{a}{2} e^{-a|X|} dX \end{aligned}$$

가 된다. 여기에서

$nQ - \frac{Q}{2} < X < nQ + \frac{Q}{2}$ 의 구간에서 양자화 값은  $nQ$ 이므로, 양자화 잡음  $N(X) = X - nQ$ 가 된다. 따라서 위의 식은

$$\begin{aligned} \sigma_q^2 &= a \int_0^{\frac{Q}{2}} X^2 e^{-aX} dX \\ &+ a \sum_{n=1}^{\infty} \int_{nQ-\frac{Q}{2}}^{nQ+\frac{Q}{2}} (X-nQ)^2 e^{-aX} dX \text{로 쓸 수 있다.} \end{aligned}$$

위의 식에서  $t = X - nQ$ 로 치환하여 계산하면,

$$\begin{aligned} a \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\frac{Q}{2}}^{\frac{Q}{2}} t^2 e^{-a(t+nQ)} dt &= a \int_{-\frac{Q}{2}}^{\frac{Q}{2}} t^2 e^{-at} dt \sum_{n=1}^{\infty} e^{-naQ} \\ &= a \frac{e^{-aQ}}{1-e^{-aQ}} \int_{-\frac{Q}{2}}^{\frac{Q}{2}} t^2 e^{-at} dt \end{aligned}$$

이고,

$$\int t^2 e^{-at} dt = -\left(t^2 + \frac{2t}{a} + \frac{2}{a^2}\right) \frac{e^{-at}}{a} \text{를 이용하여}$$

식을 정리하면

$$\sigma_q^2 = \frac{2}{a^2} \left(1 - \frac{aQ}{e^{aQ/2} - e^{-aQ/2}}\right) \quad (4)$$

로 된다. 즉 위의 식은 Laplacian 분포를 갖는 random variable을 양자화 크기  $Q$ 로 균일 양자화하는 경우의 양자화 잡음을 보이고 있다. Laplacian 분포에서  $a$ 가 0으로 다가가면 uniform distribution이 된다. 이 경우 위의 식은  $\sigma_q^2 = Q^2/12$ 가 되어

uniform distribution에서의 양자화 잡음과 동일하게 되는 것을 확인할 수 있다.

그러나 압축된 영상에서는 원래의 DCT 계수의 분포를 알 수 없고 양자화된 계수만 알 수 있다. 이와 같이 Laplacian 분포를 따르는 random variable  $X$ 의 원래 분포를 알 수 없고, 양자화된 값을 가지고 있는 경우를 생각하여 보자. 이 random variable  $X$ 가  $nQ$ 로 양자화될 확률을  $p_n$ 이라고 하면,

$$p_n = \text{prob}\left\{nQ - \frac{Q}{2} < X < nQ + \frac{Q}{2}\right\} \text{이고}$$

여기에 Laplacian 분포 모델을 적용하여 계산하면,

$$p_0 = 1 - e^{-aQ/2}$$

$$p_n = \frac{1}{2} e^{-|n|aQ} (e^{aQ/2} - e^{-aQ/2})$$

로 된다. 이 양자화된 분포로부터 분산  $v$ 를 구하면

$$\begin{aligned} v &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (nQ)^2 p_n = 2Q^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 p_n \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} (nQ)^2 p_n = Q^2 \frac{e^{aQ/2} + e^{-aQ/2}}{(e^{aQ/2} - e^{-aQ/2})^2} \quad (5) \end{aligned}$$

가 된다. 위의 식을 유도하는데  $|x| < 1$ 인 경우,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} \text{인 것을 사용하였다.}$$

양자화 되지 않은 Laplacian 분포에서 분산을 구하면  $2/a^2$ 인데 비하여, 양자화 크기  $Q$ 로 양자화 된 값으로 분산을 구하면 식 (5)와 같이 된다. 식 (5)의 결과를 그림 2에 보이고 있다.

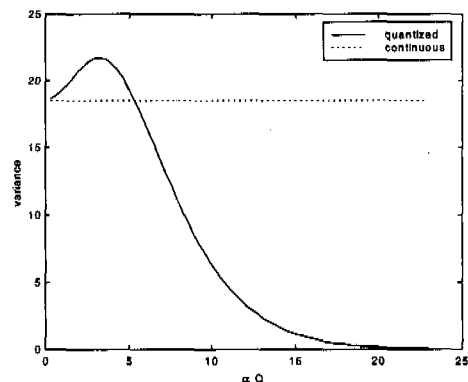


그림 2. 분산의 계산

이 그래프에서  $a=0.3218$ 를 사용하였고, 점선 수평축은 원래의 분산값인  $2/a^2$ 를 나타내고 있다. 이 식에서  $Q$ 가 0으로 다가가면  $v$ 는  $2/a^2$ 가 되는 것을 확인할 수 있다. 만일  $Q$ 가  $X$ 의 표본값의 최대치보

다 2 배 이상으로 커지면, 모두 0 으로 양자화되어서  $v$  값은 0 이 된다. 이러한 경우에는  $\alpha$ 는 무한대가 되고, 양자화 잡음의 계산이 불가능하다. 식 (4)와 식 (5)의 결과는 Laplacian 분포를 갖는 의사난수 (pseudo random variable)을 사용하는 모의 실험을 통하여 확인하였다.

기존의 방법은 양자화된 분포로부터 구한 분산  $v$ 를 아래의 식에 대입하여  $\alpha$ 를 구한다.

$$\alpha = \sqrt{\frac{2}{v}} \quad (6)$$

Q가 커지면 양자화된 계수로부터 구한 분산  $v$ 가  $2/\alpha^2$ 보다 작아지므로, 위의 식을 적용하여 구한  $\alpha$ 는 참값보다 커지게 된다.

본 논문에서는 식 (5)를 아래와 같은 방법으로 풀어서  $\alpha$ 를 구하는 방법을 제안한다. 즉,

$$e^{\alpha Q/2} = t, \quad t + t^{-1} = u, \quad v/Q^2 = h \text{로 치환하면}$$

식 (5)는

$$h = \frac{u}{u^2 - 4}$$

가 되어, 이를  $u$ 에 대하여 풀고 양수의 해를 취하면

$$u = \frac{1 + \sqrt{1 + 16h^2}}{2h} \quad (7)$$

가 된다. 여기에  $t + t^{-1} = u$ 를 대입하고  $t$ 를 구한 후에 1보다 큰 해를 취하면

$$t = \frac{u + \sqrt{u^2 - 4}}{2} \quad (8)$$

가 된다.

여기에서

$$\alpha = \frac{2}{Q} \log t \quad (9)$$

로  $\alpha$ 를 구할 수 있다.

그림 3에서는  $\alpha$ 를 식 (6)을 사용한 종래의 방법으로 구한 경우 참값과의 비율을 보이고 있다. 앞에서 예측한 바와 같이 Q가 커질수록  $\alpha$ 가 큰 값을 갖게 된다. 제안한 방법에서는 식 (7), (8), (9)로 구한  $\alpha$  값은 참값과 동일하여 그 비가 1이 된다. 기존의 방법으로 계산한  $\alpha$  값을 사용하여 양자화 잡음을 구하면 그림 4와 같이 실제의 값보다 작게되는 오류가 발생한다.

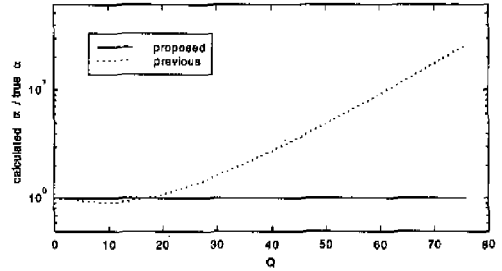


그림 3. 계산된  $\alpha$  값과 참  $\alpha$  값의 비.

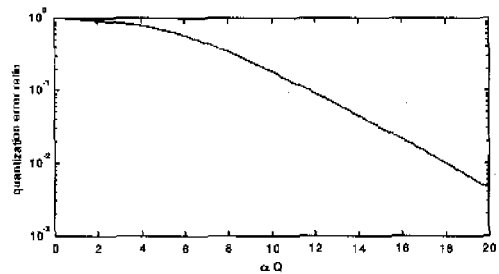


그림 4.  $\alpha$ 의 변화에 따른 양자화 잡음의 비율

#### IV. 실험 결과

여기에서는 Lena 영상을 사용하여 실험한 예를 보인다. 시험 영상을 8x8 블록 단위로 DCT 변환한 후 표 1의 양자화 값으로 양자화 하여 양자화 잡음을 계산한다. 표 2 (a)에서는 양자화 잡음 데이터를 나타내고, 표 2 (b)는 DCT계수를 양자화하기 전의 값으로부터 분산을 구하여 식 (3)에서  $\alpha$ 를 구하고 이를 식 (4)에 대입하여 구한 양자화 잡음을 보이고 있다. 이 값과 참값과의 상대오차는 9% 이내이다. 이것으로부터 Laplacian 분포 모델이 상당히 정확한 것을 알 수 있다. 본 실험에서  $\alpha$ 값은 저주파 계수인 경우 약 0.01, 고주파 계수인 경우에는 0.4 정도이다. 각 계수의 에너지는 식 (3)과 같이  $\alpha$ 의 제곱에 반비례하므로, 고주파 성분의 에너지는 저주파보다 작아진다. 자연영상에서는 고주파 성분의 에너지가 작다는 것은 일반적으로 알려진 사실이다.

표 1. JPEG 양자화 행렬의 예

16	11	10	16	24	40	51	61
12	12	14	19	26	58	60	55
14	13	16	24	40	57	69	56
14	17	22	29	51	87	80	62
18	22	37	56	68	109	103	77
24	35	55	64	81	104	113	92
49	64	78	87	103	121	120	101
72	92	95	98	112	100	103	99

양자화 된 계수에서 분산  $v$ 를 구하면 그림 2에 보인 것과 같이 그 값이 원래의 분산 값보다 작아지는 경향이 있다. 이것을 식 (6)에 대입하여  $\alpha$ 를 구하고 나서 식 (4)를 사용하여 양자화 잡음을 구하면 그 값이 작게 나온다. 그러나 본 논문에서 제안한 것처럼  $\alpha$ 를 식 (7)~(9)를 사용하여 구하면 참값에 가까워진다. 그림 5에 Lena 영상의 계수 X(5,5)에서 양자화 크기 Q를 변화시키면서 계산한 분산  $v$ 를 보이고 있다. 또한 이때 계산한  $\alpha$ 값 0.3218를 사용하여 발생시킨 Laplacian 분포의 의사 난수를 사용한 모의실험결과도 보이고 있다. 실제 실험 데이터 X(5,5)가 정확하게 Laplacian 분포를 따르지 않으므로, 모의 실험결과보다 이론치에서 더 벗어나는 것을 볼 수 있다.

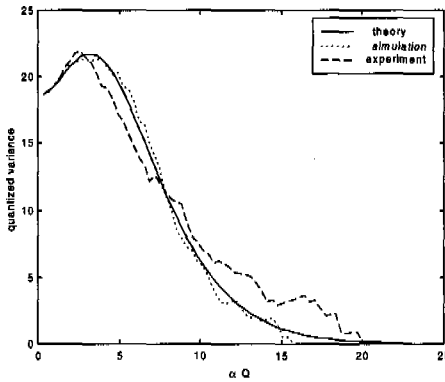


그림 5. 양자화 잡음

기존의 방법에서는 식 (5)에 보인바와 같이 양자화에 따라 분산이 변하는 것을 고려하지 않고 식 (6)을 사용한다. 따라서 그림 4에 보인 바와 같이 양자화 잡음을 기존의 방법으로 계산하면  $\alpha Q$ 에 따라서 변한다. 그 차이를 보이기 위하여 양자화 scale factor를 64로 한 경우 여러 가지의 실험 영상을 사용하여 양자화 잡음의 비를 표 3에 보인다. 앞에서 예측한 바와 같이 종전의 방법을 사용하면 양자화

잡음의 크기가 작게 계산되는 것을 확인할 수 있다. 본 논문에서 제안한 방법을 사용하여도 양자화잡음을 완벽하게 추정할 수 없다. 그 원인은 원래 분포가 Laplacian 분포를 정확히 따르지 않고, 또한 양자화 크기가 커지면 모든 계수가 0이 되는 경우가 발생하여, 양자화 잡음의 유추가 불가능해지는 경우가 발생하기 때문이다.

표 3. 여러 가지 영상에서의 양자화 잡음 계산. ( )안은 참값에 대한 비율을 나타낸다.

사용 영상	참값	종래의 방법	제안된 방법
Lena	18.2	11.3 (0.62)	19.0 (1.04)
Carnival	16.7	5.24 (0.33)	11.5 (0.72)
Boat	20.6	4.95 (0.24)	14.0 (0.68)
Goldhill	16.2	4.29 (0.26)	13.4 (0.83)
Barbara	22.4	7.60 (0.34)	22.5 (0.71)

## V. 결론

이상에서 JPEG 영상 압축, 또는 MPEG의 intra coding 방식에서 발생하는 양자화 잡음을 양자화된 계수들로부터 예측하는 방법을 제안하였다. 여기에서 유도된 결과는 JPEG으로 압축된 영상의 post processing, 복원 등에 적용할 수 있다. 또한 영상의 주파수 스펙트럼 모델과 인간의 시각특성 모델이 주어지면 주어진 비트율을 만족하는 최적의 양자화 행렬을 생성하는 데에도 응용될 수도 있다.

본 논문에서는 DCT 계수가 Laplacian 분포를 따른다고 가정하였다. 따라서, DCT 계수가 Laplacian 분포를 따르지 않는 경우, 본 논문에서 예측한 결과가 틀리게 된다. 앞으로 generalized gaussian 분포 등의 모델을 사용하여 정확도를 향상시키는 노력이 필요하다.

표 2. 양자화 잡음의 참값과 모델 값

(a) 양자화 잡음 참값

22.2	10.0	8.1	19.5	30.5	42.3	39.6	32.8
12.0	11.8	14.7	22.9	30.2	50.6	37.5	27.0
15.1	12.5	16.4	27.3	40.2	44.8	31.9	22.2
13.8	17.5	24.5	30.5	45.2	41.7	26.1	18.4
18.4	21.1	37.3	49.0	39.6	29.0	18.5	15.6
21.1	25.6	31.6	33.1	26.4	18.6	15.5	13.9
20.0	19.7	18.9	19.9	18.2	14.6	12.4	11.4
15.5	15.4	14.0	13.6	13.8	12.7	11.1	10.2

(b) Laplacian model로 부터의 양자화 잡음

21.3	10.1	8.3	20.8	42.8	73.4	53.8	35.4
12.0	11.9	16.1	28.6	44.5	73.2	44.8	28.4
16.0	13.9	20.7	41.9	71.7	60.8	32.5	22.9
15.3	22.0	34.6	49.7	67.3	42.1	26.7	18.4
20.9	28.1	50.3	63.7	45.0	29.2	18.5	15.6
23.0	29.4	35.3	33.4	26.4	18.6	15.5	13.9
20.2	20.1	18.9	20.0	18.2	14.6	12.4	11.4
15.5	15.4	14.0	13.6	13.8	12.6	11.1	10.2

참 고 문 헌

- [1] William K. Pratt, *Digital Image Processing*, Second Edition, John Wiley and Sons, 1991.
- [2] Remy Prost, Yi Ding, and Atilla Bakurt, "JPEG Dequantization Array for Regularized Decompression," *IEEE Transactions on Image Processing*, Vol. 6, No. 6, pp. 883-888, June 1997.
- [3] 최지은, 이병욱, "영상 검색을 위한 JPEG 색상 오차 분석," 제11회 *신호처리합동학술대회*, Vol. 11, No. 1, pp.239-242, 1998.10.10. 서울대학교
- [4] Anil K. Jain, "Advances in Mathematical Models for Image Processing," *Proceedings of IEEE*, Vol. 69, No. 5, pp. 502-528, May 1981.
- [5] John W. Woods, "Markov Image Modeling," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-22, No. 10, pp. 846-850, October 1978.
- [6] O. Werner, "Requantization for Transcoding of MPEG-2 Intraframes," *IEEE Transactions on Image Processing*, Vol. IP-8, No. 2, pp. 179-191, February 1999.
- [7] W. C. Adams, and C. E. Giesler, "Quantizing Characteristics for Signals Having Laplacian Amplitude Probability Density Function," *IEEE Transactions on Communications*, Vol. COM-26, No. 8, pp. 1295-1297, August 1978.
- [8] K. R. Rao, and P. Yip, *Discrete Cosine Transform*, Academic Press, 1990.
- [9] B.U. Lee, "Modeling quantisation error from quantised Laplacian distributions," *Electronic Letters*, Vol. 36, No. 15, pp.1270-1271, July 2000.

최 지 은(Ji-eun Choi)

1998년 2월 : 이화여자대학교 물리/전자공학과졸업

2000년 2월 : 이화여자대학교 정보통신학과 석사

~현재 : 이화여자대학교 색채디자인연구소 연구원

<주관심 분야> 영상인식, 가상현실, 컴퓨터 그래픽스

이 병 욱(Byung-Uk Lee)

이화여자대학교 정보통신학과 부교수, 정회원,

한국통신학회논문지 제22권6호 참조