

Newton 방법을 적용한 시간영역 MMSE 등화 알고리즘의 연구

정희원 이영진*, 박일근**, 서종수*

A Study on the Algorithm of Time Domain MMSE Equalization Using Newton Method

Young-jin Lee*, Il-keun Park**, Jong-soo Seo* *Regular Members*

요 약

다중 반송파 전송시스템에서 수신신호의 지연 확산에 따른 인접 심볼간섭 (ISI)과 인접 채널간섭 (ICI)을 제거하기 위하여 전송프레임에 삽입한 Cyclic Prefix (CP)는 시스템의 전송 효율을 저하한다. 시간영역 등화기는 채널 임펄스 응답 시간을 줄임으로써, 채널의 상태에 상관없이 CP 길이를 최소로 유지하여 시스템의 전송 효율을 개선한다. 본 논문에서는 MMSE (Minimum Mean Square Error) 방식 시간영역 등화기에 Newton 방법을 적용함으로써, 최적의 등화기 탭 계수를 추정하는 연산 시간을 단축할 수 있는 알고리즘을 제안하고 그 성능을 분석하였다.

ABSTRACT

In a Multi-carrier modulation system, CP (Cyclic prefix) is inserted in the transmit frame in order to eliminate the ISI (Intersymbol Interference) and ICI (Interchannel Interference) caused by delay spread of a received signal, which in turn degrades the throughput of the system. TEQ (Time-domain equalizer) improves the system throughput by shortening the CIR (Channel Impulse Response) time and maintaining the CP length to the minimum regardless of the channel condition. In this paper, a new MMSE (Minimum Mean Square Error) TEQ algorithm is proposed and its performance is analyzed in order to speed up computing the optimum tap coefficients of the equalizer by employing Newton method.

1. 서론

ADSL (Asymmetric Digital Subscriber Line)은 기존의 전화망을 이용하여 6Mbps급 이상의 고속 데이터를 CSA (Carrier Service Area) 범위 내에 있는 가입자들에게 전송하는 기술이다. ADSL의 표준으로 채택된 DMT (Discrete Multi-tone)는 고속 광대역의 데이터를 여러 개의 부채널에 나누어 전송하는 MCM (Multicarrier Modulation) 방식이다. ADSL의 송수신단에 Impedance mismatching이 있을 때 수신 신호간에 지연확산이 발생하며 이에 따

라 인접채널에서 ICI (Interchannel Interference)가 발생하며, 동일 채널의 인접 심볼간에 ISI (Intersymbol Interference)가 발생한다. 이러한 ISI나 ICI를 제거하기 위해서는 수신 신호의 지연 확산과 유사한 크기의 CP(Cyclic Prefix)를 전송신호 앞에 더하게 된다. 그러나 CP는 송신정보에 대해 Overhead로 작용하여 시스템의 전송효율을 떨어뜨리므로, CP의 크기를 최소로 유지하면서 지연확산의 영향을 줄이기 위해 시간 영역 등화기를 사용한다.

시간 영역 등화기에 사용되는 알고리즘 중에서 MMSE (Minimum Mean Square Error) 방식은 연

* 연세대학교 전기전자공학과 디지털 전송연구실 (jsseo@yonsei.ac.kr),
논문번호: 010018-0305, 접수일자: 2001년 3월 5일

**퍼스널 텔레콤

※ 본 연구는 한국과학재단 목지기초 (1999-2-303-005-3) 지원으로 수행되었습니다.

산 시간을 줄이기 위해서 등화기 탭 계수 즉, 채널 특성 행렬들의 최소 고유치에 해당하는 고유벡터를 구하는 연산시간을 줄여야 한다. 이를 위해서는 최적의 등화기 탭 계수 값에 대한 수렴이 보장되면서 보다 적은 연산량을 갖는 등화 알고리즘의 적용이 필요하다. Power 방법^[1]은 역행렬 연산을 사용하므로 많은 연산량을 요구하며, LU (Lower and Upper) 인수분해를 이용한 수정된 Power 방법^[2]은 역행렬 연산 대신 반복 연산에 의해 최적의 등화기 탭 계수를 구한다.

본 논문에서는 MMSE 방식의 시간영역 등화기에서 MSE (Mean Square Error)가 2차 행렬식 (Quadratic Form)이고 채널 특성 행렬이 SPDT (Symmetric Positive Definite Toeplitz)라는 점을 이용해서^[3], Toeplitz 행렬의 특성 다항식을 적용한 Yule-Walker 시스템의 Levinson-Durbin의 수정된 알고리즘 즉, Newton 방법^[4]을 사용함으로써 역행렬 연산 없이 채널 특성 행렬의 고유벡터를 구할 수 있고, 따라서 최적의 등화기 탭 계수 값으로 수렴하는 시간을 단축할 수 있는 알고리즘을 제안하고 그 성능을 분석하였다.

II. MMSE 방식 시간영역 등화

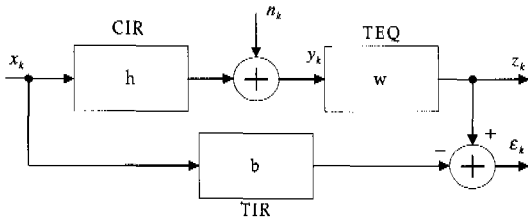


그림 1. MMSE 방식 시간영역 등화기의 동작구성도

그림 1은 MMSE 방식 시간영역 등화기 (Time-Domain Equalizer)의 동작 구성도를 보여주고 있다. 벡터로 표현하면 c개의 채널 Spread를 가지는 채널 임펄스 응답 (Channel Impulse Response)은 $h^T = [h_0, h_1, \dots, h_{c-1}]$, 시간영역 등화기는 l개의 탭을 갖는 FIR (Finite Impulse Response) 필터로서 $w^T = [w_0, w_1, \dots, w_{l-1}]$, 그리고 목표 임펄스 응답 (Target Impulse Response)은 v+1개의 탭을 가지는 $b^T = [b_0, b_1, \dots, b_v]$ 로 각각 나타낼 수 있다.

입력 시퀀스 x_k 가 uncorrelate할 때 MSE를 구하면 다음과 같다^[3].

$$\overline{e^2} = \overline{e^2} = \mathbf{w}^T \mathbf{A} \mathbf{w} + \mathbf{b}^T \mathbf{b} - 2\mathbf{w}^T \mathbf{H} \mathbf{b} \quad (1)$$

여기서, \mathbf{A} 는 크기가 $t \times t$ 이고 $a_{ij} = \overline{y_i y_j}$ 를 원소로 하는 채널 covariance 행렬이고 \mathbf{H} 는 식 (2)로 나타내는 $t \times (v+1)$ 행렬이다.

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_0 & \dots & h_\nu \\ \vdots & & \vdots \\ h_n & \dots & h_{n+\nu} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{t-1} & \dots & h_{t-1+\nu} \end{pmatrix} \quad (2)$$

최소 MSE를 구하기 위해 식 (1)을 \mathbf{w} 에 대해 편미분한 식의 값이 0이 되는 \mathbf{w} 를 계산해서 탭 계수를 구하면 다음과 같다.

$$\mathbf{w}_{opt} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{b} \quad (3)$$

행렬 \mathbf{A} 와 \mathbf{H} 는 이미 알고 있는 행렬이므로 목표 임펄스 응답 \mathbf{b} 를 구하고, 이 결과를 식 (1)에 대입하면 최소 MSE 값은 다음과 같다.

$$\overline{e^2} = \mathbf{b}^T [\mathbf{I} - \mathbf{H}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{H}] \mathbf{b} \quad (4)$$

여기서, \mathbf{I} 는 단위행렬이다.

MSE $\overline{e^2} \geq 0$ 이므로 식 (4)는 목표 임펄스 응답의 계수 \mathbf{b} 에 대해 positive definite 이차 형식 (quadratic form)이다. 따라서 목표 임펄스 응답 \mathbf{b} 를 구하기 위해서는 식 (4)에서 채널 특성 행렬 $\mathbf{R} = [\mathbf{I} - \mathbf{H}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{H}]$ 의 최소 고유치에 해당하는 고유벡터를 구하면 된다. 여기서, MSE의 값이 존재하기 위해 $\mathbf{b}^T \mathbf{b} = 1$ 의 조건을 만족해야 한다^[3].

III. 채널 특성 행렬의 고유벡터를 구하는 알고리즘

등화기 탭 계수는 채널 특성 행렬 $\mathbf{R} = [\mathbf{I} - \mathbf{H}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{H}]$ 의 고유벡터 즉, 목표 임펄스 응답 \mathbf{b} 를 구한 뒤 식 (3)에 의해 추정한다. 등화기 탭 계수를 추정하기 위한 알고리즘으로 역행렬 연산은 많은 연산량을 요구하기 때문에 역행렬 연산을 하지 않는 수정된 Power 방법이나 Newton 방법과 같은 반복 연산법이 주로 사용된다.

1. 수정된 Power 방법

Power 방법^[1]은 직접적인 역행렬 연산을 이용해서 최대의 고유치의 고유벡터를 구하는 방법이다.

Power방법을 개선한 수정된 Power 방법(Modified Power Method)^[2]은 역행렬 연산을 하지 않고 LU 인수분해를 통해 식 (5)와 같은 채널 특성 행렬의 최소 고유치의 고유벡터를 구한다.

$$V = R_{xx}^{-1} (R_{xx} - R_{yx}^T R_{yy}^{-1} R_{yx}) \quad (5)$$

여기서, R_{xx} 와 R_{yy} 그리고 R_{yx} 는 각각 입력 시퀀스와 출력 시퀀스의 자기상관 행렬, 역상관 행렬이다.

행렬 V 의 최소 고유치의 고유벡터는 행렬 V^{-1} 의 최대 고유치 고유벡터이므로, 역행렬 연산을 하지 않기 위해서 식 (6)과 LU 인수 분해에 의한 반복연산을 한다.

$$(R_{xx} - R_{yx}^T R_{yy}^{-1} R_{yx})v_{k+1} = R_{xx}v_k \quad (6)$$

2. Newton 방법

Newton 방법은 Yule-Walker 시스템의 Levinson-Durbin 해법과 Toeplitz 행렬의 특성 다항식을 적용해서 SPDT 행렬의 최소 고유치의 고유벡터를 매우 간단하게 구할 수 있는 방법이다^{[4][5]}.

SPDT 행렬 T_i 는 다음 식과 같이 정의한다.

$$T_i = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & \dots & t_{i-1} \\ t_1 & t_0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & t_1 \\ t_{i-1} & \dots & t_1 & t_0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$E_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{i \times i} \quad (8)$$

여기서, $i=1,2,\dots,n$ 이며 E_i 는 교환 행렬이다.

행렬 T_i 의 특성 다항식과 고유치는 각각 다음 식과 같다.

$$p_i(\lambda) = \det(T_i - \lambda I_i) \quad (9)$$

$$\lambda_1(T_i) \leq \lambda_{i-1}(T_i) \leq \dots \leq \lambda_1(T_i) \quad (10)$$

여기서, I_i 는 $i \times i$ 단위행렬이다.

SPDT 행렬의 최소 고유치를 가지는 고유벡터를 Newton 방법으로 구하기 위해 아래와 같은 수정된 Yule-Walker 시스템을 구성한다.

$$(T_i - \lambda I_i)y^{(i)} = -E_i t^{(i)} \quad (11)$$

여기서, $t^{(i)} = [t_1, t_2, \dots, t_{i-1}, t_i]^T$ 는 $(i+1)$ 차 행렬 T_{i+1} 에서 대각선상의 값 t_0 들을 생략한 열벡터이다. 식(11)을 식 (12)로 바꾸면 Levinson-Durbin 알고리즘^[5]을 사용해서 SPDT 행렬의 고유 벡터를 구할 수 있다.

$$(T_i - \lambda I_i)z^{(i)} = -t^{(i)} \quad (12)$$

본 논문에서 채널 특성 행렬 R 이 시간영역 등화기의 제한된 탭 길이를 가지는 MMSE 조건에서는 SPDT(Symmetric Positive Definite Toeplitz)임을 이용하여^[3], LU 인수분해를 사용하는 수정된 Power 방법보다 연산량이 적은 Newton 방법을 이용해서 채널 특성행렬의 고유벡터를 구했다.

IV. Newton 방법을 적용한 MMSE 방식 등화 알고리즘

다음은 본 논문에서 제안하는 Newton 방법^[4]을 적용한 MMSE 방식 등화 알고리즘의 연산 과정으로 최소 고유치의 고유벡터 즉, 최적의 목표 임펄스 응답 b_{opt} 와 등화기 탭 계수 w_{opt} 를 구하는 과정을 보인다.

Newton 방법에서 $i=1,2,\dots,n-1$ 일 때 다음 반복연산을 수행한다.

$$a_i = -\frac{t_i + t^{(i-1)T} y^{(i-1)}}{t_0 - \lambda + t^{(i-1)T} E_{i-1} y^{(i-1)}} \quad (13)$$

$$z^{(i)} = a_i E_{i-1} y^{(i-1)} + y^{(i-1)} \quad (14)$$

$$y(1) = a_i, \quad y(2:i) = z(1:i-1) \quad (15)$$

$$\beta_{i+1} = \beta_i \times (1 - a_i^2) \quad (16)$$

$$\phi_{i+1}(\lambda^{[0]}) = \frac{\beta_{i+1}}{\phi_i(\lambda^{[0]}) - 1 - \|y(1:i-1)\|_2^2} \quad (17)$$

반복연산 후 식 (18)와 식 (19)에 의해 각각 최소 고유치 λ 와 이에 해당하는 고유벡터 즉, 목표 임펄스 응답 b_{opt} 를 구한다.

$$\lambda^{[k+1]} = \lambda^{[k]} - \phi_n(\lambda^{[k]}) \quad (18)$$

$$y^{(n)} = \begin{bmatrix} [\mu + t^{(n-1)T} y^{(n-1)}] / \beta_n \\ y^{(n-1)} + \alpha_n E_{n-1} y^{(n-1)} \end{bmatrix} = b_{opt} \quad (19)$$

식 (19)를 식 (3)에 대입하면 최적의 등화기 탭계수를 구할 수 있다. 여기서, μ 는 열벡터 $t^{(i)}$ 에서 t_i 값으로 0이다^[4].

V. 전산모의 실험 결과

Matlab을 이용하여 구성된 CSA (Carrier Service Area) 루프 1과 8에서 DMT의 표준에 따라 CP의 길이를 $\nu+1=32$, 등화기의 길이를 $t=32$ 로 놓고 실험한 결과 본 논문에서 제안한 Newton 방법의 MMSE 등화 알고리즘을 사용하였을 때 그림 2와 같이 지연시간이 상당히 긴 채널 임펄스 응답이 목표 임펄스 응답의 길이만큼 줄어든 것을 볼 수 있다.

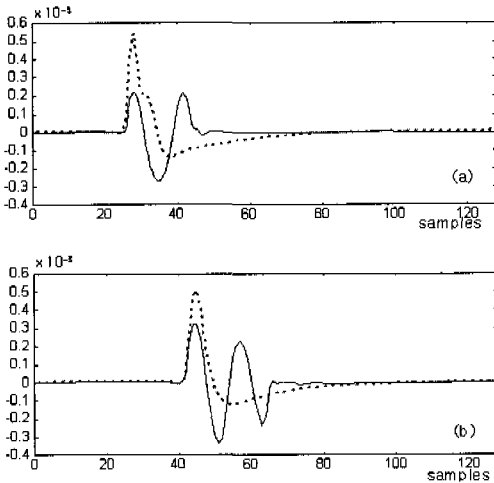


그림 2. 시간 영역 등화기 통과전(점선)과 통과후(실선)의 채널 임펄스 응답
(a) CSA 루프 1 (b) CSA 루프 8

Newton 방법을 이용한 채널 등화 알고리즘을 사용할 경우 등화기 탭 계수를 추정하기 위한 연산량은 수정된 Power 방법 보다 줄어들고 알고리즘이 매우 간단해진다. 표 1은 최소 고유치 연산을 위한 알고리즘들의 연산량을 비교한다.

표 1. 최소고유치 연산량 비교 (N : 목표 임펄스 응답 탭 계수의 길이)

알고리즘의 종류	수정된 Power 방법	Newton 방법
최소 고유치 연산량	$O(N^3)$	$3N^2 + O(N)$

Big-Oh 표기법^[6]을 사용하여 연산량을 표시할 경우 본 논문에서 제시하는 최소 고유치 연산량은 한번의 반복 연산당 $3N^2 + O(N)$ flops (Floating Point operation per Second) 즉, $O(N^2)$ 이다. 그림 3은 알고리즘의 연산량에 따른 연산 시간을 나타내고 있다^[6].

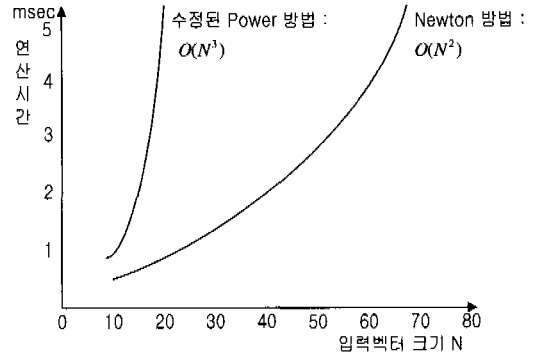


그림 3. 입력벡터 크기에 따른 알고리즘들의 연산시간

그림 3에서 입력 벡터 크기(N)에 따른 연산시간의 차이는 N이 커질수록 확연히 나타나고 있다. 본 논문에서 사용된 입력크기 N 즉, 목표 임펄스 응답의 크기가 32일 때, 제안한 Newton 방법의 최소 고유치 연산시간은 수정된 Power 방법보다 빠름을 알 수 있다.

VI. 결론

본 논문에서는 ADSL과 같은 다중 반송파 전송 시스템에서 발생하는 ISI와 ICI를 보상하기 위하여 Newton 방법을 적용한 MMSE 시간영역 등화기 알고리즘을 제시하고 그 성능을 연산시간 측면에서 비교 분석하였다.

Newton 방법을 적용함으로써 SPDT 행렬의 최소 고유치의 고유벡터를 구하는 알고리즘의 구조를 간단하게 할 수 있으며 또한 이를 등화기 탭 계수 추정 알고리즘에 적용함으로써 연산시간을 줄일 수 있었다. 전산 모의 실험 결과 1024 샘플의 길이를 갖는 실제 채널 임펄스 응답이 목표 임펄스 응답 길이로 줄어들었으며 목표 임펄스 응답의 길이가 N=32일 때, 제안한 방법을 사용한 최소 고유치 벡터 연산량은 23,500 flops 정도로서 LU 인수분해를 사용하는 수정된 Power 방법의 90,453 flops 보다 훨씬 적었다.

참 고 문 헌

[1] A. Gatherer, "Method and System for Optimizing an Equalizer in Data Transmission System", U.S. patent no. 5,461,640, Oct. 1995.

[2] M. Nafie and A. Gatherer, "Time-Domain Equalizer Training for ADSL", Proc. IEEE ICC, vol 2, pp. 1085 -1089, 1997.

[3] D. Falconer and F. Magee, Jr., "Adaptive Channel Memory Truncation for Maximum Likelihood Sequence Estimation", The Bell Syst. Tech. J., vol 52, no. 9, pp. 1541-1562, Nov. 1973.

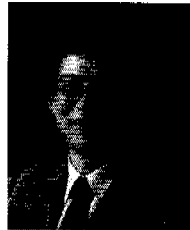
[4] N. Mastronardi and D. Boley, "Computing The Smallest Eigenpair of A Symmetric Positive Definite Toeplitz Matrix", SIAM J. Sci. Comput., Vol. 20, No. 5, pp. 1921-1927, Mar. 1998.

[5] G. Golub and C. Van Loan, Matrix Computation, 3rd ed. The John Hopkins University Press, pp. 194-197, 1996.

[6] M. Weiss, Data Structures and Algorithm Analysis in C, 2nd ed. Addison-Wesley Publishing Company, pp. 15-21, 1996.

1984년~1995년: 삼성종합기술원 선임연구원
 1996년~현재: 퍼스널 텔레콤 (주) 대표이사
 1998년 10월: 전기통신기술사 (55회)
 <주관심 분야> 디지털 통신시스템, 변복조 및 부호화기술

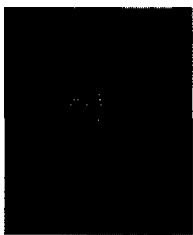
서 종 수(Jong-soo Seo) 정회원



1975년 2월: 연세대학교
 전자공학과 졸업(공학사)
 1983년: Univ. of Ottawa,
 Electrical Eng.(M.A.Sc.)
 1988년: Univ. of Ottawa,
 Electrical Eng. (Ph.D.)

1987년~1989년: IDC, Canada 책임연구원
 1990년~1992년: 삼성종합기술원 수석연구원
 1993년~1995년: CAL, Canada 책임연구원
 1995년~현재: 연세대학교 기계전자공학부 교수
 <주관심 분야> 디지털 위성통신, 차세대 지능형 방송시스템, 디지털 변복조방식

이 영 진(Young-jin Lee) 정회원



2000년 2월: 연세대학교
 전기공학과 졸업(공학사)
 2000년 3월~현재: 연세대학교
 전기전자공학과
 석사과정

<주관심 분야> 디지털 통신, 다중반송파 변조방식

박 일 근(Il-keun Park) 정회원



1985년 2월: 한양대학교
 전자공학과 졸업(공학사)
 1998년 8월: 연세대학교
 산업대학원 졸업(석사)
 1999년 3월~현재: 연세대학교
 전기전자공학과
 박사과정