

Z_4 상에서 정의된 Delsarte-Goethals 부호의 완전 무게 분포

정회원 신 동 준*

Complete Weight Enumerator of the Delsarte-Goethals Code over Z_4

Dong-Joon Shin* *Regular Member*

요 약

이 논문에서 Z_4 상에서 정의된 Delsarte-Goethals 부호의 완전 무게 분포를 구하였다. 이 부호의 부호어를 3 가지 경우로 나눠서 각각의 완전 무게 분포를 구하였으며, 이때 이미 알려진 이 부호의 부분 부호의 지수합 분포 및 이진 무게 분포를 이용하였다. 이 결과와 MacWilliams 항등식을 이용하여 Z_4 상에서 정의된 Goethals 부호의 완전 무게 분포를 쉽게 구할 수 있다. 또한 이 결과는 Goethals 부호와 Delsarte-Goethals 부호에서 3-design을 찾는 데 이용되었다.

Key Words : complete weight enumerator; Delsarte-Goethals code over Z_4 .

ABSTRACT

In this paper, the complete weight enumerator of the Delsarte-Goethals code over Z_4 is obtained. This code is divided into 3 cases and the complete weight enumerator of each case is calculated. During this weight enumeration, the known distribution of exponential sums and binary weight distribution of the sub-codes are used. By combining this result and MacWilliams identity, the complete weight enumerator of the Goethals code over Z_4 can be easily obtained. This result is also used for finding 3-designs from the Goethals and Delsarte-Goethals codes over Z_4 .

I. 서 론

부호(특히 선형부호)의 오류 정정 및 탐지 성능에 대한 정확한 분석을 위해서는 부호의 무게 분포를 알아야 한다. 또한 선형 (또는 비선형) 부호의 무게 분포를 이용하여 MacWilliams 항등식을 사용한 dual 부호의 무게 분포 계산, 부호로부터 t -design 발견 등의 다양한 수학적 성질을 규명할 수 있다. 따라서 부호의 무게 분포를 찾는 데 오랫동안

안 많은 연구가 이루어졌으나 현재 알려진 부호들 중 일부분에 대한 무게 분포만 알려져 있다. 예를 들면, 골레이 부호, 일중, 또는 이중 오류 정정 이진 원시 BCH 부호 (binary primitive BCH code), Reed-Solomon 부호, Reed-Muller 부호 일부분에 대한 무게 분포는 알려져 있다 [4]. Z_4 상에서 정의된 선형부호에 대한 연구는 1996년에 Hammons, Kumar, Calderbank, Sloane, Sole의 논문[2]이 발표된 이후에 더욱 활발해졌다. 현재 Z_4 상에서 정의된 선형부호가 3세대 이동

* 한양대학교 전자전기컴퓨터 공학부 (djshin@hanyang.ac.kr),

논문번호 : 020536-1217, 접수일자 : 2002년 12월 18일

※ 이 논문은 2000년 한양대학교 교내연구비 지원으로 연구되었음.

통신 표준인 W-CDMA의 스크램블링 부호로 채택 되었으며 사용자 수를 증가시키기 위해서는 미래의 표준에서도 이 부호들을 사용하여야 하는 상황이다. Z_4 상에서 정의된 선형부호 중에서는 Kerdock부호와 Preparata 부호 등의 무게 분포가 알려져 있다. Kerdock부호가 Delsarte-Goethals 부호의 부분 부호(subcode)이므로 Delsarte-Goethals 부호와 Goethals 부호의 무게 분포를 알아보는 것이 당연한 연구 주제이다. 이를 이용하여 이 부호들의 정확한 성능 평가를 하고 이 부호에서 3-design을 찾을 수 있다. 이 논문에서는 길이가 2^m 인(m 은 홀수) Delsarte-Goethals 부호의 완전 무게 분포를 구하였다. Goethals 부호의 완전 무게 분포는 MacWilliams 항등식을 이용하여 쉽게 구할 수 있다 [2].

II. Z_4 상에서 정의된 선형 부호

Z_4 상에서 정의된 선형부호에 대해서 기본적인 개념을 알아본 후 Delsarte-Goethals 부호와 Goethals 부호에 대하여 알아본다. 4^m 개의 원소를 갖는 Z_4 의 확장인 갈루와 환(Galois ring)을 $GR(4,m)$ 로 표기하고 $q=2^m$ 개의 원소를 갖는 유한체를 F_q 로 표기한다. $GR(4,m)$ 에는 차수(order)가 2^m-1 인 단위원소 β 가 존재하고 이를 이용하여 Teichmuller 집합 $T = \{0, 1, \beta, \beta^2, \dots, \beta^{2^m-2}\}$ 를 만든다. 이때, $\alpha = \beta \pmod 2$ 이면 Teichmuller 집합은 $T \pmod 2 = \{0, 1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{q-2}\} \cong F_q$ 의 관계를 가진다. $GR(4,m)$ 의 모든 원소 X 는 2진 형태인 $X = A + 2B, A, B \in T$ 로 유일하게 표현되며, $GR(4,m)$ 에서는 Frobenius map, $\sigma(X) = A^2 + 2B^2$ 에 의해 생성되는 m 차의 순회 갈루와 그룹(Galois group)을 가진다.

$GR(4,m)$ 의 원소 X 를 Z_4 의 원소로 맵핑시키는 트레이스 함수 $T(X)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$T(X) = \sum_{i=0}^{m-1} \sigma^i(X)$$

여기서 σ^i 는 σ 를 i 번 결합시킨 것을 의미한다. F_{2^m} 에서 Z_2 로 가는 유한체 상에서의 일반적인 트레이스 함수는 $\text{tr}(x)$ 로 표기한다. 이 논문에서 우리는 m 은 항상 홀수라고 가정하며 더 많은 정보를 위

해서는 [2]번 논문을 참조하기 바란다.

$c = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ 는 Z_4 상에서 정의된 선형 부호 C 의 부호어이고 c 에서 i 의 발생 빈도수를 $n_i(c) = |\{k | c_k = i, 1 \leq k \leq n\}|$ 라 표기한다. 이때 c 의 완전 무게는 $W^{n_0(c)} X^{n_1(c)} Y^{n_2(c)} Z^{n_3(c)}$ 로 정의된다. c 의 대칭 무게는 $W^{n_0(c)} X^{n_1(c)+n_3(c)} Y^{n_2(c)}$ 로 정의되며, 해밍 무게는 $W^{n_0(c)} X^{n_1(c)+n_2(c)+n_3(c)}$ 로 정의된다. 이를 이용하여 부호 C 에 대해 다음과 같이 다양한 무게 분포를 정의한다. C 의 완전 무게 분포(CWE)는 $cwe_c(W, X, Y, Z) =$

$\sum_{c \in C} W^{n_0(c)} X^{n_1(c)} Y^{n_2(c)} Z^{n_3(c)}$ 로 정의되고, C 의 대칭 무게 분포(SWE)는 $swe_c(W, X, Y) =$

$\sum_{c \in C} W^{n_0(c)} X^{n_1(c)+n_3(c)} Y^{n_2(c)}$ 로 정의된다. C 의 해밍 무게 분포(HWE)는 $hwe_c(W, X) =$

$$\sum_{c \in C} W^{n_0(c)} X^{n_1(c)+n_2(c)+n_3(c)}$$

Z_4 상에서 정의된 길이가 $q=2^m$ 인 Goethals 부호 G 는 다음과 같은 검사 행렬 H_k 를 가진 선형 부호이며, Delsarte Goethals 부호 DG 는 Z_4 상에서의 G 의 dual 형태이다.

$$H_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \beta & \beta^2 & \dots & \beta^{q-2} \\ 0 & 2 & 2\beta^3 & 2\beta^6 & \dots & 2\beta^{3(q-2)} \end{pmatrix}$$

여기서 β 는 $GR(4,m)$ 에서 차수가 $q-1$ 인 단위원소이다.

H_g 의 두 번째 열에서 알 수 있듯이 우리는 G 의 부호어 좌표를 정의하기 위해 T 또는 F_q 를 이용하여 $c = (c_X)_{X \in F_q}$ 와 같이 표기한다.

지금부터 우리는 다음과 같은 간단한 표기법을 사용할 것이다.

Z_4 상에서 정의된 Goethals 부호: G

Z_4 상에서 정의된 Delsarte-Goethals 부호: DG

III. DG 부호의 완전 무게 분포(CWE)

우리는 트레이스 함수를 이용해서 다음과 같이 DG 를 정의한다.

$$\{(T([A_0 + 2A_1]X + 2BX^3) + K)_{X \in T} \mid A_0, A_1, B \in T, K \in Z_4\}$$

우리는 DG를 다음의 3가지 경우로 나누고 각각의 경우에 대해 완전 무게 분포를 구할 것이다.

- (1): B=0일 경우
- (2): B≠0 이고 A₀=0일 경우
- (3): B≠0 이고 A₀≠0일 경우

C를 길이가 q 인 Z₄상에서 정의된 선형부호라고 하면 부호어 c = {c₁, ..., c_q}의 지수함은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \text{Exp}(c) &= \sum_{j=1}^q i^{c_j} \\ n_0(c) - n_2(c) + i(n_1(c) - n_3(c)) \end{aligned}$$

where $i = \sqrt{-1}$

우리는 DG의 CWE를 알아내기 위해 다음의 식을 이용한다.

$$\begin{aligned} n_0(c) + n_1(c) + n_2(c) + n_3(c) &= q \\ (n_0(c) - n_2(c)) + i \cdot (n_1(c) - n_3(c)) &= \text{Re}(\text{Exp}(c)) + i \cdot \text{Im}(\text{Exp}(c)) \\ n_1(c) + n_3(c) &= \text{Hw}(c) \end{aligned}$$

위에서 세 번째 식은 부호어 c에 modulo 2 연산을 한 후에 얻은 해밍 무게를 이용하여 만든 식이다. 첫 번째 식은 이미 알려져 있으므로 우리는 두 번째와 세 번째 식만 알아내면 된다. 그러면 우리는 다음과 같은 관계를 이용해서 c의 완전 무게를 계산해 낼 수 있다.

$$\begin{pmatrix} n_0(c) \\ n_1(c) \\ n_2(c) \\ n_3(c) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \text{Re}(c) \\ \text{Im}(c) \\ \text{Hw}(c) \end{pmatrix} \dots (*)$$

DG의 지수함의 분포는 [3]번 논문의 결과를 이용해서 유도할 수 있으며 유사한 방법을 사용하여 설명할 것이다. 먼저 아래처럼, DG를 좌표 0에서 축약시킨(shortened) DG^s을 고려한다.

$$\begin{aligned} DG^s &= \{(T(AX + 2BX^3))_{X \in T} \mid \\ &A \in GR(4, m), B \in T\} \end{aligned}$$

DG의 부호어인 (T(AX + 2BX³))_{X∈T}의 지수함은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\xi(A, B) = \sum_{X \in T} i^{T(AX) + 2T(BX^3)}, i = \sqrt{-1}$$

그러면 $\sum_{X \in T} i^{T(AX) + 2T(BX^3)} = -1 + \xi(A, B)$ 임을 쉽게 알 수 있다. 우리는 DG^s을 다음의 4가지 경우로 나누어서 지수함의 분포를 구할 것이다. 이때, R = GR(4, m)이다.

- (i): A = B = 0일 경우
- (ii): A ∈ 2R \ {0} 이고 B = 0일 경우
- (iii): A ∈ 2R^{*} 이고 B ∈ T^{*}일 경우
- (iv): A ∈ R \ 2R^{*} 이고 B ∈ T^{*}일 경우

DG^s에서의 부호어의 순회 천이(cyclic shift)가 지수함의 값을 바꾸지 않기 때문에 (i), (ii)와 (iii)의 경우에 대해서 우리는 q-1의 순회 천이를 해도 같은 지수함 값을 얻을 수 있다. 그러므로 DG^s에서의 지수함의 분포는 표 1처럼 요약될 수 있다.

- (i): ξ(0, 0) = q 임을 쉽게 알 수 있다.
- (ii): 이 경우는 이진 m-수열의 지수함과 일치한다. 그러므로 ξ(2, 0) = 0을 알 수 있다.

표 1. DG^s의 지수함의 분포

	지수함	빈도수
(i)	-1 + ξ(0, 0) = q - 1	1
(ii)	-1 + ξ(2, 0) = -1	q - 1
(iii)	-1 + ξ(2A, 1)	q - 1 for A ∈ T
(iv)	-1 + ξ(1 + 2A, B)	q - 1 for A, B ∈ T

(iii): 이 경우의 부호어는 확장된 이진 이중 오류 정정 BCH 부호의 dual 부호와 밀접한 연관이 있다. 이를 이용하여 A ∈ T에 대해서 다음과 같은 지수함의 분포를 구할 수 있다.

$$\xi(2A, 1) = \begin{cases} 0, & \frac{q}{2} \text{ times} \\ \sqrt{2a}, & \frac{q}{4} + \sqrt{\frac{q}{8}} \text{ times} \\ -\sqrt{2a}, & \frac{q}{4} - \sqrt{\frac{q}{8}} \text{ times} \end{cases}$$

(iv): 이 경우의 지수함의 분포는 [3, pp. 587-589]에서 발견할 수 있으며 이를 표 2에 정리하였다.

위의 결과를 종합하여 우리는 DG^* 의 지수함의 분포를 얻을 수 있으며, 좌표 0에서 0을 가지는 부호어로 구성된 DG 의 부분집합의 지수함의 분포는 DG^* 에서 구한 각각의 지수함에 1을 더함으로써 얻을 수 있다. 그러면 DG 의 지수함의 분포는 위에서 구한 DG 의 부분집합의 지수함에 1, i , -1 , $-i$ 를 곱함으로써 얻을 수 있다. 그 결과를 표 3에 정리하였다.

(1): 이 경우는 Z_4 상에서 정의된 Kerdock 부호에 해당한다. 이 부호의 CWE는 이미 알려져 있으며 표 4에서 주어졌다 [1].

(2): 이는 다음의 경우에 해당한다.
 $\{(2T(A_1X + BX^3) + K)_{x \in T} \mid A_1 \in T, B \in T^*, K \in Z_4\}$
 만일 우리가 좌표 0에서 (2)의 부호어를 축약한다면, $(2T(A_1X + BX^3))_{x \in T^*}$ 를 얻을 수 있으며 이를 다음과 같이 표현할 수 있다.
 $2T(A_1X + BX^3)_{x \in T^*} = 2 \cdot (tr(a_1x + bx^3))_{x \in F}$
 여기서 a_1, b 와 x 는 A_1, B 와 X 에 modulo 2 연산을 하여 얻은 값이다. 이 식의 오른쪽 표현에 해당하는 무게 분포는 이중 오류 정정 이진 BCH 부호의 dual 부호의 무게 분포에서 유도되며 이는 이미 널리 알려져 있다 [4, p.451]. 축약된 (2)의 경우의 CWE는 표 5에 주어졌다. 이때 $b \neq 0$ 이라는 사실에 주의한다. (2)의 경우에 해당하는 부호어는 축약된 (2)의 경우의 부호어에 0을 추가하고 이에 길이가 q 인 상수 벡터를 더함으로써 쉽게 얻을 수 있다. (2)의 경우에 해당하는 CWE는 표 6에 주어졌다.

(3): 표 3, 4, 6을 사용해서 (3)의 경우에 해당하

는 지수함의 분포를 구할 수 있으며 이를 표 7에 정리하였다. 또한, (3)의 경우의 부호어에 modulo 2 연산을 취한 후에 이에 해당하는 해밍 무게를 계산해야 한다. (3)의 경우의 부호어에 modulo 2 연산을 취하면 아래와 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\{(T([A_0 + 2A_1]X + 2BX^3) + K)_{x \in T \bmod 2} = (tr(a_0x) + k)_{x \in F_q}\}.$$

여기서 a_0, x, k 는 A_0, X, K 에 modulo 2 연산을 하여 얻은 값들이다. $A_0 \neq 0$ 이므로 $a_0 \neq 0$ 이며 이때 $(tr(a_0x) + k)_{x \in F_q}$ 는 $q/2$ 개의 0과 $q/2$ 개의 1을 가진다. 그러므로 (3)의 경우에 속한 모든 부호어 c 에 대하여 $n_1(c) + n_3(c) = \frac{q}{2}$ 가 성립한다. 이 결과를 가지고 (*)번 식과 표 7을 이용하면, 우리는 (3)의 경우의 CWE를 구할 수 있다.

위에서 구한 세 경우 (1), (2), (3)의 결과를 종합하여 홀수 $m \geq 3$ 에 대하여 길이가 $q = 2^m$ 인 DG 의 CWE를 얻을 수 있으며 이 결과를 표 8에 정리하였다.

IV. 결 론

이 논문에서 길이가 2^m 인 (m 은 홀수) Delsarte-Goethals 부호와 Goethals 부호의 완전 무게 분포를 구하였다. m 이 짝수인 경우는 홀수인 경우와 비슷한 방법으로 구할 수 있으리라 예상되나 이때 사용되는 부분 부호들에 대한 지수함 분포 및 무게 분포는 다른 값들을 사용하여야 한다. Delsarte-Goethals 부호와 Goethals 부호가 차세대 이동통신에서 스크램블링 부호나 사용자 ID용 부호로 사용될 수 있으므로 이 부호들에 대한 완전 무게 분포가 성능 평가에 사용된다는 측면에서 실용적인 의의가 있다고 하겠다. 향후 무게 분포에 대한 연구 주제로 Z_4 상에서 정의된 선형부호호는 우선 m 이 짝수인 경우의 Delsarte-Goethals 부호와 Goethals 부호의 완전 무게 분포를 구하는 것, $S(m)$ 부호의 무게 분포를 구하는 것을 들 수 있다 [3].

V. 그림과 표

표 2. (iv) 경우의 지수함의 분포

지수함	빈도수
-1	$\left(\frac{3a}{4}\right)\left(\frac{a-2}{2}\right)$
$-1 + \sqrt{a}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$	$\left(\frac{a+4}{3}\right)\left(\frac{a}{4} + \sqrt{\frac{a}{8}}\right)$ each
$-1 + \sqrt{a}\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)$	$\left(\frac{a+4}{3}\right)\left(\frac{a}{4} - \sqrt{\frac{a}{8}}\right)$ each
$-1 \pm i\sqrt{2a}$	$\left(\frac{a-2}{2}\right)\left(\frac{a}{8} - \sqrt{\frac{a}{8}}\right)$
$-1 \pm i\sqrt{2a}$	$\left(\frac{a-2}{2}\right)\left(\frac{a}{8}\right)$ each
$-1 - \sqrt{2a}$	$\left(\frac{a-2}{2}\right)\left(\frac{a}{8} - \sqrt{\frac{a}{8}}\right)$
$-1 + 2\sqrt{a}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$	$\left(\frac{a-2}{6}\right)\left(\frac{a}{16} + \sqrt{\frac{a}{32}}\right)$ each
$-1 + 2\sqrt{a}\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)$	$\left(\frac{a-2}{6}\right)\left(\frac{a}{16} - \sqrt{\frac{a}{32}}\right)$ each

표 3. Delsarte-Goethals 부호의 지수함의 분포

지수함	빈도수
-1	$\left(\frac{3a}{4}\right)\left(\frac{a-2}{2}\right)$
$-1 + \sqrt{a}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$	$\left(\frac{a+4}{3}\right)\left(\frac{a}{4} + \sqrt{\frac{a}{8}}\right)$ each
$-1 + \sqrt{a}\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)$	$\left(\frac{a+4}{3}\right)\left(\frac{a}{4} - \sqrt{\frac{a}{8}}\right)$ each
$-1 \pm \sqrt{2a}$	$\left(\frac{a-2}{2}\right)\left(\frac{a}{8} - \sqrt{\frac{a}{8}}\right)$
$-1 \pm i\sqrt{2a}$	$\left(\frac{a-2}{2}\right)\left(\frac{a}{8}\right)$ each
$-1 - \sqrt{2a}$	$\left(\frac{a-2}{2}\right)\left(\frac{a}{8} - \sqrt{\frac{a}{8}}\right)$
$-1 + 2\sqrt{a}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$	$\left(\frac{a-2}{6}\right)\left(\frac{a}{16} + \sqrt{\frac{a}{32}}\right)$ each
$-1 + 2\sqrt{a}\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)$	$\left(\frac{a-2}{6}\right)\left(\frac{a}{16} - \sqrt{\frac{a}{32}}\right)$ each

표 4. 길이가 $q=2^m$ 인 Z_4 상에서 정의된 Kerdock 부호의 CWE (m 은 3 이상인 홀수)

n_0	n_1	n_2	n_3	빈도수
a	0	0	0	1
0	a	0	0	1
0	0	a	0	1
0	0	0	a	1
$\frac{a}{2}$	0	$\frac{a}{2}$	0	$2(q-1)$
0	$\frac{a}{2}$	0	$\frac{a}{2}$	$2(q-1)$
$\frac{a}{4} + \sqrt{\frac{a}{8}}$	$\frac{a}{4} + \sqrt{\frac{a}{8}}$	$\frac{a}{4} - \sqrt{\frac{a}{8}}$	$\frac{a}{4} - \sqrt{\frac{a}{8}}$	$q(q-1)$
$\frac{a}{4} + \sqrt{\frac{a}{8}}$	$\frac{a}{4} - \sqrt{\frac{a}{8}}$	$\frac{a}{4} - \sqrt{\frac{a}{8}}$	$\frac{a}{4} + \sqrt{\frac{a}{8}}$	$q(q-1)$
$\frac{a}{4} - \sqrt{\frac{a}{8}}$	$\frac{a}{4} + \sqrt{\frac{a}{8}}$	$\frac{a}{4} + \sqrt{\frac{a}{8}}$	$\frac{a}{4} - \sqrt{\frac{a}{8}}$	$q(q-1)$
$\frac{a}{4} - \sqrt{\frac{a}{8}}$	$\frac{a}{4} - \sqrt{\frac{a}{8}}$	$\frac{a}{4} + \sqrt{\frac{a}{8}}$	$\frac{a}{4} + \sqrt{\frac{a}{8}}$	$q(q-1)$

표 5. 축약된 (2) 경우의 CWE

$$(a - \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a}{2}}, b = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a}{2}})$$

n_0	n_1	n_2	n_3	빈도수
$\frac{a}{2} - 1$	0	$\frac{a}{2}$	0	$\frac{a}{2}(q-1)$
$a-1$	0	b	0	$(q-1)\left(\frac{a}{4} + \sqrt{\frac{a}{8}}\right)$
$b-1$	0	a	0	$(q-1)\left(\frac{a}{4} - \sqrt{\frac{a}{8}}\right)$

표 6. (2) 경우의 CWE

n_0	n_1	n_2	n_3	빈도수
$\frac{a}{2}$	0	$\frac{a}{2}$	0	a
0	$\frac{a}{2}$	0	$\frac{a}{2}$	$q(q-1)$
a	0	b	0	$\frac{a}{2}(q-1)$
0	a	0	b	$\frac{a}{2}(q-1)$
b	0	a	0	$\frac{a}{2}(q-1)$
0	b	0	a	$\frac{a}{2}(q-1)$

$$(a = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a}{2}}, b = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a}{2}})$$

표 7. (3) 경우의 지수함의 분포

지수함	빈도수
0	$(q-1)(\frac{3}{2}q^2-3q)$
$\sqrt{q}\left(\frac{\pm 1 \pm i\sqrt{2q}}{\sqrt{2}}\right)$	$q(q-1)(\frac{q+1}{3})(each)$
$\pm\sqrt{2q} \pm i\sqrt{2q}$	$\frac{q}{2}(q-1)(\frac{q}{2}-1)(each)$
$2\sqrt{q}\left(\frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{q}{4}(q-1)(\frac{q-2}{6})(each)$

표 8. DG 부호의 CWE ($q = 2^m$, m 은 홀수)

n_0	n_1	n_2	n_3	빈도수
\cdot	0	0	0	1
0	\cdot	0	0	1
0	0	\cdot	0	1
0	0	0	\cdot	1
$\frac{q}{2}$	0	$\frac{q}{2}$	0	$(q+2)(q-1)$
0	$\frac{q}{2}$	0	$\frac{q}{2}$	$(q+2)(q-1)$
$\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q}{2}}$	0	$\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q}{2}}$	0	$\frac{q}{2}(q-1)$
$\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q}{2}}$	0	$\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q}{2}}$	0	$\frac{q}{2}(q-1)$
0	$\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q}{2}}$	0	$\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q}{2}}$	$\frac{q}{2}(q-1)$
0	$\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q}{2}}$	0	$\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q}{2}}$	$\frac{q}{2}(q-1)$
$\frac{q}{4} - \sqrt{\frac{q}{8}}$	$\frac{q}{4} - \sqrt{\frac{q}{8}}$	$\frac{q}{4} - \sqrt{\frac{q}{8}}$	$\frac{q}{4} - \sqrt{\frac{q}{8}}$	$q(q-1)(\frac{q+4}{3})$
$\frac{q}{4} - \sqrt{\frac{q}{8}}$	$\frac{q}{4} - \sqrt{\frac{q}{8}}$	$\frac{q}{4} - \sqrt{\frac{q}{8}}$	$\frac{q}{4} + \sqrt{\frac{q}{8}}$	$q(q-1)(\frac{q+4}{3})$
$\frac{q}{4} - \sqrt{\frac{q}{8}}$	$\frac{q}{4} + \sqrt{\frac{q}{8}}$	$\frac{q}{4} - \sqrt{\frac{q}{8}}$	$\frac{q}{4} - \sqrt{\frac{q}{8}}$	$q(q-1)(\frac{q+4}{3})$
$\frac{q}{4} - \sqrt{\frac{q}{8}}$	$\frac{q}{4} + \sqrt{\frac{q}{8}}$	$\frac{q}{4} + \sqrt{\frac{q}{8}}$	$\frac{q}{4} - \sqrt{\frac{q}{8}}$	$q(q-1)(\frac{q+4}{3})$
$\frac{q}{4} + \sqrt{\frac{q}{2}}$	$\frac{q}{4}$	$\frac{q}{4} - \sqrt{\frac{q}{2}}$	$\frac{q}{4}$	$\frac{q}{2}(q-1)(\frac{q}{2}-1)$
$\frac{q}{4} + \sqrt{\frac{q}{2}}$	$\frac{q}{4}$	$\frac{q}{4} + \sqrt{\frac{q}{2}}$	$\frac{q}{4}$	$\frac{q}{2}(q-1)(\frac{q}{2}-1)$
$\frac{q}{4}$	$\frac{q}{4} + \sqrt{\frac{q}{2}}$	$\frac{q}{4}$	$\frac{q}{4} + \sqrt{\frac{q}{2}}$	$\frac{q}{2}(q-1)(\frac{q}{2}-1)$
$\frac{q}{4}$	$\frac{q}{4} + \sqrt{\frac{q}{2}}$	$\frac{q}{4}$	$\frac{q}{4} - \sqrt{\frac{q}{2}}$	$\frac{q}{2}(q-1)(\frac{q}{2}-1)$
$\frac{q}{4} - \sqrt{\frac{q}{2}}$	$\frac{q}{4} - \sqrt{\frac{q}{2}}$	$\frac{q}{4} - \sqrt{\frac{q}{2}}$	$\frac{q}{4} - \sqrt{\frac{q}{2}}$	$\frac{q}{4}(q-1)(\frac{q-2}{6})$
$\frac{q}{4} - \sqrt{\frac{q}{2}}$	$\frac{q}{4} - \sqrt{\frac{q}{2}}$	$\frac{q}{4} - \sqrt{\frac{q}{2}}$	$\frac{q}{4} + \sqrt{\frac{q}{2}}$	$\frac{q}{4}(q-1)(\frac{q-2}{6})$
$\frac{q}{4} - \sqrt{\frac{q}{2}}$	$\frac{q}{4} + \sqrt{\frac{q}{2}}$	$\frac{q}{4} - \sqrt{\frac{q}{2}}$	$\frac{q}{4} - \sqrt{\frac{q}{2}}$	$\frac{q}{4}(q-1)(\frac{q-2}{6})$
$\frac{q}{4} - \sqrt{\frac{q}{2}}$	$\frac{q}{4} + \sqrt{\frac{q}{2}}$	$\frac{q}{4} + \sqrt{\frac{q}{2}}$	$\frac{q}{4} - \sqrt{\frac{q}{2}}$	$\frac{q}{4}(q-1)(\frac{q-2}{6})$
$\frac{q}{4}$	$\frac{q}{4}$	$\frac{q}{4}$	$\frac{q}{4}$	$(q-1)(\frac{3}{2}q^2-3q)$

참 고 문 헌

- [1] A. Bonnetcaze and I. M. Duursma, "Translates of linear codes over Z_4 ," IEEE Trans. on Inform. Theory, Vol. 43, No. 4, pp. 1218-1230, July 1997.
- [2] A. R. Hammons, P. V. Kumar, A. R. Calderbank and N. J. A. Sloane, and P. Solé, "The Z_4 -linearity of Kerdock, Preparata, Goethals, and related codes," IEEE Trans. on Inform. Theory, Vol. 40, No. 2, pp. 301-319, March 1994.
- [3] P. V. Kumar, T. Helleseth, A. R. Calderbank and A. R. Hammons, Jr., "Large families of quaternary sequences with low correlation," IEEE Trans. on Inform. Theory, Vol. 42, No. 2, pp. 579-592, March 1996.
- [4] F. J. MacWilliams and N. J. A. Sloane, *The Theory of Error-Correcting Codes*, Amsterdam, The Netherlands: North-Holland, 1977.

신 동 준(Dong-Joon Shin)

정회원



1990년 2월 : 서울대학교
전자공학과 공학사
1991년 12월 : Northwestern
University, 전기공학과 공학석사
1998년 12월 : University of
Southern California, 전기공학과

공학박사

1999년 1월 ~ 1999년 4월 : Research Associate at USC

1999년 4월 ~ 2000년 8월 : Hughes Network Systems, MTS

2000년 9월 ~ 현재 : 한양대학교 전자전기컴퓨터공학부 조교수

<주관심분야> 디지털통신, 시퀀스, 오류 정정 부호