

# 레이리 감쇄 채널에서 최적 직교 진폭 변조 신호 전송을 고려한 벡터 양자화

종신회원 배진수\*, 정회원 한종기\*, 학생회원 박애경\*

## Vector Quantization for Optimum Quadrature Amplitude Modulated Signals in Rayleigh Fading Channel

Jinsoo Bae\*, Jong-Ki Han\* *Regular Members*, Ae-Kyung Park\* *Student Member*

### 요약

이 논문에서는 변조된 신호 공간에서 신호 벡터에 적당한 부호를 부여하는 벡터 양자화를 쓰는 레이리 감쇄 채널을 위한 통신 시스템을 다루었다. 변조된 신호공간을 효율적으로 분할함으로써, 변조 신호 파형의 왜곡이 최소화되도록 벡터 양자화 부호화 시스템을 최적화하였다. 모의실험을 통해 최적화된 직교 진폭 변조기가 전체 통신 시스템의 성능을 더 좋게함을 보였다.

### ABSTRACT

This paper considers a communication system consisting of a vector quantizer with selected code vectors with mapped into points in the modulated signal space. The modulated signal is transmitted over a Rayleigh flat fading channel. We optimize the modulated signal constellation to minimize the overall distortion of the system with the fixed vector quantization codebook. The optimization is obtained by partitioning the modulated signal space. Simulation results show that the signal constellation based on the proposed optimization scheme outperforms the conventional methods.

### I. 서론

벡터 양자화는 꽤 많은 신호 처리 영역에서 쓰이며 잡음에 강하다. 벡터 양자화를 쓰는 통신 시스템을 최적화하기 위한 변조 신호 집합의 구상은 이미 여러 논문에서 다루어졌다<sup>[1-4]</sup>. 각 신호점의 발생 확률이 같고, 오류 확률이 모두 같을 때 심볼 오류 확률이 최소가 되도록 최적화된 신호가 소개되었으며, 8비트 PCM에서 가중치를 준 직교 진폭 변조 방식에 대해서도 최적화 연구가 발표되었지만, 모두 부호 벡터까지 고려한 최적화는 아니었다<sup>[1,3]</sup>. 그런 이유로 정해진 부호책을 써서 변조 신호를 최적화하는 연구에서 전체 왜곡에 대한 각 부호 벡터들의 상호 작용을 생각하게 되었다<sup>[2]</sup>. 다시 말해서

이제까지는 덧셈곱 흰빛 정규 잡음에서 최적화할 때, 부호책을 고려하지 않는 연구가 진행되어왔다<sup>[1,2,4]</sup>.

이 논문에서는 레이리 감쇄 채널에서 신호를 최적화하는 부호책을 통해 직교 진폭 변조 신호 집합을 설계한다. 최적화된 신호 집합은 신호 공간을 효율적으로 분할하여 얻어질 수 있다. 2절에서는 시스템 모형을 설명하고, 이 논문에서 풀고자하는 문제에 대해 설명한다. 3절에서는 직교 진폭 변조 신호 집합의 최적화 방법에 대해 제안하였다. 모의실험 결과는 4절에서 보였다.

### II. 시스템 모형

이 논문에서 생각하는 통신 시스템 모형은 그림

\* 세종대학교 정보통신공학과 (hjk@sejong.ac.kr)

논문번호 : 020153-0403, 접수일자 : 2002년 4월 3일

1과 같다.  $k$ 차원 데이터 벡터  $Y = \{X_0, \dots, X_{N-1}\}$ 이고, 이는  $k$ 차원의 벡터 집합에서 선택된 부호 번호  $X_i$ 로 벡터 양자화를 통해 양자화 된다. 여기서  $N$ 은 벡터 양자화기 부호책의 크기이다. 부호 벡터  $X_i$ 의 2진 지표벡터  $I(X_i)$ 는 변조 신호  $S_i$ 와 대응된다. 집합  $I = \{S_0, S_1, \dots, S_{N-1}\}$ 는 그림 2에서 주어진 직교 진폭 변조 신호이다. 각각의 신호  $S_i$ 는 복소수로 표현된다. 우리는 신호 공간의 끝값이  $L$ 이고, 신호집합  $I$ 의 평균전력이 한도내에서 유지되도록  $-L \leq \text{Re}\{S_i\}, \text{Im}\{S_i\} \leq L$ 으로 가정한다.

그림 3과 같이,  $S_i$ 는 레이리 감쇄로  $\tilde{S}_i$ 으로 변형된 뒤,  $\tilde{S}_i$ 는 덧셈곱 흰빛 정규 잡음으로 인해 수신 신호  $Z_r$ 로 바뀐다. 수신기에서 받은  $Z_r$ 신호는 다음과 같이 표현된다.

$$Z_r = FS_i + G = \tilde{S}_i + G \quad (1)$$

여기서  $F$ 는 레이리 분포를 갖는 확률 변수로 다음과 같은 확률 밀도 함수를 갖는다.

$$P_F(f) = \frac{f}{\sigma_f^2} \exp\left(-\frac{f^2}{2\sigma_f^2}\right), \quad 0 \leq f < \infty \quad (2)$$

그리고  $E[f^2] = 2\sigma_f^2$ 이다.  $G$ 는 덧셈곱 흰빛 정규 잡음을 나타낸다. 2진 검출기  $r$ 는 수신된 신호  $Z_r$ 이 2차 수신 공간  $R^2$ 의 서로 분할된 영역인  $\Omega = \{R_0, R_1, \dots, R_{N-1}\}$ 중  $R_j$ 에 속할 때 변조 신호  $S_j$ 에 대응시킨다. 곧,

$$r(Z_r) = S_j, \quad Z_r \in R_j, \quad j \in 0, 1, \dots, N-1 \quad (3)$$

으로 나타낼 수 있다. 이 시스템의 성능은 전송된 벡터  $X_i$ 와 그 벡터로 재현된 벡터  $X_j$ 사이의 평균 제곱 오차를 통해서 비교한다. 확률  $P(X_j|X_i)$ 는  $X_i$ 가 수신되었을 때 ( $0 \leq i, j \leq N-1$ )  $X_j$ 로 인식할 확률이라면, 채널 잡음으로 인한 왜곡은 다음과 같다.

$$D = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} P(X_j|X_i) d(X_i, X_j) \quad (4)$$

여기서  $d(X_i, X_j) = \|X_i - X_j\|^2$ 는 두 벡터  $X_i$ 와 벡터  $X_j$  사이의 유클리드 기하학적 거리의 제곱이다.  $I(X_i)$ 는  $S_i$ 로 표현되므로  $P(X_j|X_i) = P(I(X_j)|I(X_i)) = P(S_j|S_i)$ 이다. 그러므로 식 (4)

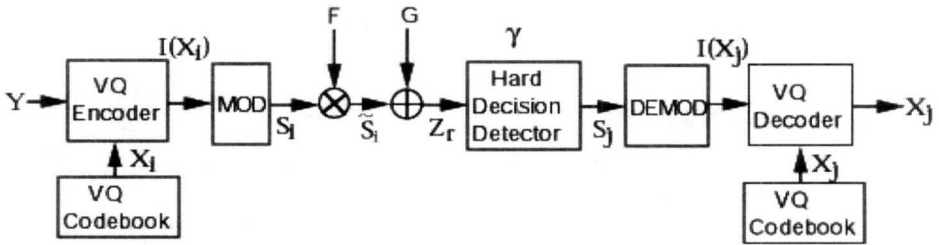


그림 1. 레이리 감쇄 채널에서 벡터 양자화를 쓰는 통신 시스템 모형

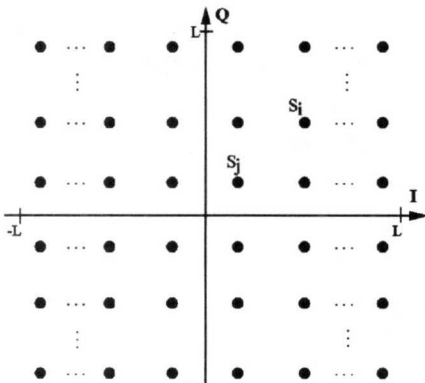


그림 2. 직교 진폭 변조 신호

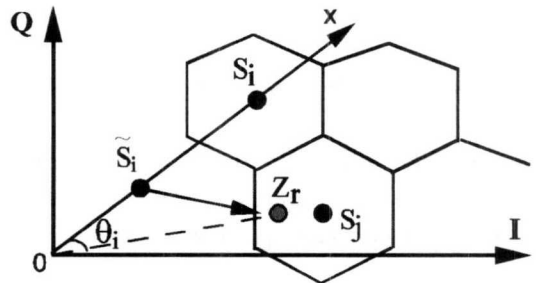


그림 3. 레이리 감쇄와 덧셈곱 흰빛 정규 잡음의 영향

는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$D = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} P(S_j|S_i) d(X_i, X_j) \quad (5)$$

주어진 부호책  $Y$ 로 인해  $D$ 는  $I$ 의 함수가 된다. 따라서 채널 왜곡  $D$ 는 변조 신호 최적 구조로 인해 최소화될 수 있다. 다음 절에서는 수신 신호 공간에서의 최적화 부분  $\Omega$ 와 최적 신호 구조에서도 비슷한 결과를 얻을 수 있음을 보인다.

### III. 직교 진폭 변조 신호의 최적화

정해진  $Y$ 에 대해 식 (5)의  $D$ 를 최소화하기 위해서 송신 신호  $S_i$ , 감쇄 신호  $\tilde{S}_i$  그리고 그림 3에서 보여준 수신 신호  $Z_r$  사이의 관계를 생각하여 식 (5)의 확률  $P(S_j|S_i)$ 에 대한 설명이 필요하다.  $\tilde{S}_i(x)$ 를 진폭  $x$ 를 가진 감쇄된 신호라고 하면,  $\tilde{S}_i(x) = x \cdot \delta_i$  라고 표현될 수 있다. 여기서  $\delta_i$ 는 방향이  $S_i$ 인 2차 단위 벡터로 정의된다. 진폭 감쇄된 신호  $\tilde{S}_i$ 는 다음의 확률 밀도 함수를 따른다<sup>[5]</sup>.

$$P_{\tilde{S}_i}(x) = P(\tilde{S}_i(x)|S_i) = \frac{x}{\sigma_i^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_i^2}\right), \quad 0 < x < \infty \quad (6)$$

여기서  $2\sigma_i^2$ 은  $x$ 의 2차 통계량인  $E\{x^2\}$ 이다. 그러면 식 (1)의  $x = S_i \cdot f$ 로부터  $\sigma_i^2 = |S_i|^2 \sigma_f^2$ 이다. 따라서  $P(S_j|S_i)$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P(S_j|S_i) = \int_0^\infty P_{\tilde{S}_i}(x) P(S_j|\tilde{S}_i(x)) dx \quad (7)$$

여기서  $P(S_j|\tilde{S}_i(x))$ 는 감쇄된 신호  $\tilde{S}_i(x)$ 가 검출기에 의해  $S_j$ 로 판정될 확률이며 다음과 같이 나타낸다.

$$P(S_j|\tilde{S}_i(x)) = \int_{R_j} P(Z_r|\tilde{S}_i(x)) dZ_r \quad (8)$$

$N_0$ 를 흰빛 정규 잡음의 분산이라고 하면, 감쇄 신호  $\tilde{S}_i(x)$ 가 수신신호  $Z_r$ 이 되는 확률은 정규 확률 밀도 함수에 의해 다시 표현될 수 있다<sup>[6]</sup>.

$$P(Z_r|\tilde{S}_i(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0}}$$

$$\times \exp\left[-\frac{d(\tilde{S}_i(x), Z_r)}{2N_0}\right] \quad (9)$$

여기서  $d(\tilde{S}_i(x), Z_r)$ 은 감쇄 신호  $\tilde{S}_i(x)$ 와 수신 신호  $Z_r$ 의 거리의 제곱이다. 즉,  $\theta_i$ 가  $S_i$ 와  $Z_r$  사이에 각을 가리킬 때  $\|\tilde{S}_i(x) - Z_r\|^2 = x^2 + \|Z_r\|^2 - 2x\|Z_r\|\cos\theta_i$ 이다. 식(6)-(8)을 식(5)에 대입하면,

$$D = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} d(X_i, X_j) \int_0^\infty \frac{x}{\sigma_i^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_i^2}\right) \times \int_{R_j} P(Z_r|\tilde{S}_i(x)) dZ_r dx \quad (10)$$

을 얻을 수 있다.

특히,  $Z_r$ 이  $R_j$  영역에 있을 때, 즉  $Z_r \in R_j$ 이면  $Z_r$ 에 의한 왜곡의 크기는 다음과 같이 나타낸다.

$$D(Z_r) = \sum_{i=0}^{N-1} d(X_i, X_j) \times \int_0^\infty \frac{x}{\sigma_i^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_i^2}\right) P(Z_r|\tilde{S}_i(x)) dx \quad (11)$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} d(X_i, X_j) W(Z_r, S_i) \quad (12)$$

여기서,

$$W(Z_r, S_i) = \frac{\exp(-\|Z_r\|^2/2N_0)}{\sigma_i^2 \sqrt{2\pi N_0}} \times \int_0^\infty x \exp\left(-\frac{(N_0 + \sigma_i^2)x^2}{2N_0\sigma_i^2} + \frac{2\|Z_r\|^2\sigma_i^2 x \cos\theta_i}{2N_0\sigma_i^2}\right) dx \quad (13)$$

이다. 이런식으로  $Z_r$ 로 인한  $D(Z_r)$ 을 최소화하는 영역  $j^*$ 를 선택한다. 이것은  $Y$ 를 정하는데 있어서 채널왜곡  $D$ 를 최소화 하는 문제는  $\{R_j\}_{j=0}^{N-1}$ 에서  $R^2$ 을 효율적으로 분할하는 것과 동일하다. 최적의 분할  $\Omega = \{R_0, R_1, \dots, R_{N-1}\}$ 은 다음과 같음을 알 수 있다.

$$R_j = \left\{ Z_r : \sum_{i=0}^{N-1} d(X_i, X_j) W(Z_r, S_i) \leq \sum_{i=0}^{N-1} d(X_i, X_l) W(Z_r, S_l), \forall l, \forall Z_r \right\} \quad (14)$$

식 (13)의 적분 부분은 다음 식을 써서 간단하게 할 수 있다<sup>[7]</sup>.

$$\int_0^\infty x \exp(-\beta x^2 - \gamma x) dx = (2\beta)^{-1} \Gamma(2) \exp\left(-\frac{\gamma^2}{8\beta}\right) \times D_{-2}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2\beta}}\right), \quad \beta > 0 \quad (15)$$

여기서,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0 \quad (16)$$

$$D_{-2}(x) = e^{x^2/4} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \times \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x^2/2} - x[1 - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)]\right) \quad (17)$$

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (18)$$

이다.

$$\beta = \frac{\{\sigma_i^2 + N_0\}}{2N_0\sigma_i^2}, \quad \gamma = -\frac{\|Z_i\| \cos \theta_i}{N_0} \quad (19)$$

이라고 하면, 주어진 식 (15)를 식 (19) 와  $\Gamma(2)=1$  와 함께 식 (13)에 적용시키면

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(Z_r, S_i) &= \frac{1}{\sigma_i^2 \sqrt{2\pi N_0}} \\ &\times \exp\left(-\frac{\|Z_r\|^2}{2N_0}\right) \frac{N_0 \sigma_i^2}{(\sigma_i^2 + N_0)} \\ &\times \exp\left(\frac{\|Z_r\|^2 \sigma_i^2 \cos^2 \theta_i}{4N_0(\sigma_i^2 + N_0)}\right) \\ &\times D_{-2}\left(-\frac{\|Z_r\| \cos \theta_i \sigma_i}{\sqrt{N_0(\sigma_i^2 + N_0)}}\right) \end{aligned} \quad (20)$$

이다. 그리고  $\Phi(x)$ 는

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2/2} dt \quad \text{일때,} \\ \Phi(x) &= 2[\mathcal{Q}(0) - \mathcal{Q}(x)] \end{aligned} \quad (21)$$

이다. 따라서

$$D_{-2}(x) = e^{-x^2/4} - x e^{x^2/4} \sqrt{2\pi} \mathcal{Q}\left(\frac{|x|}{\sqrt{2}}\right) \quad (22)$$

이고, 이것은  $\mathcal{Q}(x)$  함수표에서 구할 수 있다. 그러므로 우리는  $\mathcal{W}(Z_r, S_i)$ 를 식 (13) 대신 식 (20)과 식 (21)로 간단하게 계산할 수 있다.

$\mathcal{Q} = \{R_0, R_1, \dots, R_{N-1}\}$ 를 정하는데 있어 새로운 최

적화 신호집합  $I = \{S_0^*, S_1^*, \dots, S_{N-1}^*\}$ 는 반드시

$$\begin{aligned} S_j^* &= \min_{y \in R^2} E[d(Z_r, y) | V = S_j], \\ j &\in \{0, 1, \dots, N-1\} \end{aligned} \quad (23)$$

을 만족해야 한다. 여기서  $V$ 는 출력 검출기의 변수이고,  $E(\cdot)$ 는 기대값이다. 신호 집합  $I$ 와 채널 왜곡  $D$ 와 대응하는  $\mathcal{Q}$ 쌍의 수열에 대한 식 (14)와 식 (23)의 성공적인 적용은 음이 아닌 수들의 증가하지 않는 수열을 만든다.

#### IV. 모의실험

이 절에서는 제안된 시스템의 성능을 모의실험을 통해 얻은 뒤, 다른 직교 진폭 변조 시스템과 비교한다. 벡터 양자화 부호책은 크기가  $512 \times 512$  인 19개의 실제 영상을 바탕으로 LBG 알고리즘을 이용 해 만든다<sup>[8]</sup>. 여기서 부호 벡터의 차원  $k=16$ , 코드 벡터의 수  $N=64$ 으로 각각 설정한다. 모의실험에서  $Z_r$ 은 신호 공간  $R^2$ 에서  $(-L \leq \text{Re}\{Z_r\}, \text{Im}\{Z_r\} \leq L)$  동일하게 표본화함으로써 발생시켰다. 표본화된  $Z_r$ 의 수를 많이 만들으로써, 우리는  $Z_r$ 들 사이의 간격을 작고 연속 신호 공간을 효과적으로 포함될 수 있게 하였다. 또한 레나 이미지가 성능평가에 사용되었다. 모의실험 결과는 PSNR, CSNR 그리고  $\sigma_F$ 로 나타났다. CSNR은 다음과 같이 정의된다.

$$\text{CSNR} = 10 \log_{10} \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \|S_i\|^2}{N_0} \quad (24)$$

그림 4와 그림 5는 최적화된 신호로 구성된 시스템의 성능을 다른 시스템들과 비교한 것이다. 최적화된 시스템은  $\sigma_F=5.0$ 과  $\text{CSNR}=23.2\text{dB}$ 에서 제안한 알고리즘에 적용함으로써 얻을 수 있었다. 포치니 (Foschini) 방법은 부호책을 고려하지 않고 가산성 흰빛 정규 잡음 채널에 의한 심볼 오류 확률을 최소화함으로써 얻을 수 있었다<sup>[1]</sup>. 류에 (Liu) 의해 제안된 방법은 부호책을 정하기 위해 덧셈 곱셈 흰빛 정규 잡음으로 평균 왜곡을 최소화함으로써 얻을 수 있었다<sup>[2]</sup>. 별모양 직교 진폭 변조 신호는 레일리 감쇄 채널에 맞게끔 제안되었다<sup>[4]</sup>.

그림 4의 모의실험은  $\sigma_F=1.0$ 에서 몇몇의 CSNR을 얻은 것이다. 포치니 방법, 류 방법 그리

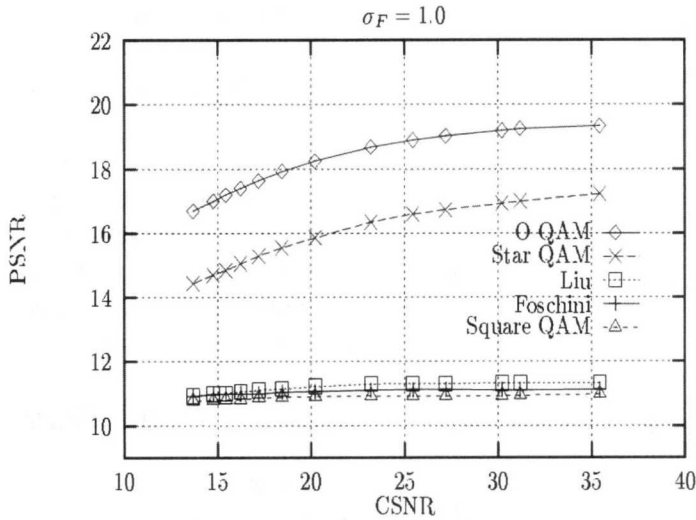


그림 4.  $\sigma_F = 1.0$  일 때 다른 직교 진폭 변조 시스템과의 성능 비교

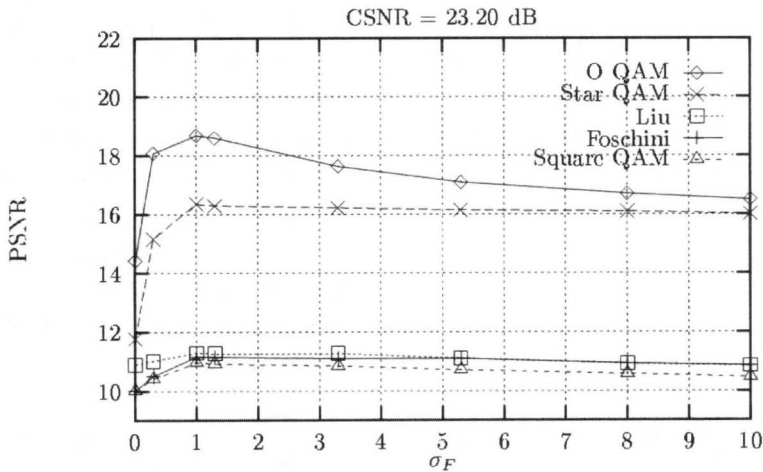


그림 5. CSNR = 23.2dB 일 때 다른 직교 진폭 변조 시스템과의 성능 비교

고 제곱 직교 진폭 변조 시스템의 성능은 레일리 감쇄 채널을 고려한 시스템은 아니므로 전체 범위의 CSNR에서는 매우 열등하다. 게다가 레일리 감쇄에 의해 성능이 상당히 저하된다.

이 논문에서 제안된 방법은 별모양 직교 진폭 변조 방법보다 성능이 좋다. 그 이유는 별모양 직교 진폭 변조 시스템이 신호점마다 동등한 확률을 갖는 대신 최적화된 시스템은 주어진 부호책에 의해 최적화되기 때문이다. 그림 5에서 시스템의 성능은 CSNR = 23.2 dB일 때 다른  $\sigma_F$  들에서 측정된 값이다. 그것은 모든 시스템 가운데 가장 좋은 성능은  $\sigma_F = 1.0$ 에서 나타난다는 것을 알 수 있다. 이것은

$S_i$ 가 송신 신호일 때, 가장 알맞은 감쇄된 신호  $\tilde{S}_i$ 의 값은  $\sigma_i$ 이라는 사실 때문이다<sup>5)</sup>. 다시 말해서,  $\sigma_F = 1.0$  일 때, 가장 알맞은 수신 신호는 송신된 신호와 같다. 따라서 최적화된 방법이 레일리 감쇄와 덧셈곱 흰빛 정규 잡음채널의 효과를 감소시키는데 효과적이라는 것을 알 수 있다.

### V. 맺음말

레일리 감쇄 채널에서 송신된 신호의 직교 진폭 변조 신호를 최적화하였다. 최적화는 정해진 부호책에 의해 신호 공간을 효율적으로 분할함으로써 얻

을 수 있다. 모의실험에서는 잡음 감쇄채널에서 제안된 시스템이 기존의 시스템보다 훨씬 좋은 성능을 갖는다는 것을 보였다.

참 고 문 헌

[1] G.J. Foschini, R.D. Gitlin, and S.B. Weinstein, "Optimization of two-dimensional signal constellations in the presence of Gaussian noise," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 22, pp. 28-38, Jan. 1974.

[2] F.-H. Liu, P. Ho, and V. Cuperman, "Joint source and channel coding using a non-linear receiver," *Proc. Int. Confer. Commun.*, pp. 1502-1507, June 1993.

[3] C.E.W. Sundberg, W.C. Wong, and R. Steele, "Logarithmic PCM weighted QAM transmission over Gaussian and Rayleigh fading channel," *IEE Proc.*, vol. 134, pp. 557-570, Oct. 1987.

[4] W.T. Webb and L. Hanzo, *Modern Quadrature Amplitude Modulation*, IEEE Press and Pentech Press, 1994.

[5] M.D. Yacoub, *Foundations of Mobile Radio Engineering*, CRC Press, 1993.

[6] H. Stark, F.B. Tuteur, and J.B. Anderson, *Modern Electrical Communications*, Prentice-Hall, 1988.

[7] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, 1980.

[8] Y. Linde, A. Buzo, and R.M. Gray, "An algorithm for vector quantizer design," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 28, pp. 84-95, Jan. 1980.

배 진 수(Jinsoo Bae)

중신회원



1990년 2월 : 경기과학고등학교 조기졸업 (우등)  
 1993년 2월 : 한국과학기술원 전기및전자공학과 공학사 (전체차석, 조기졸업, 최우등)  
 1995년 2월 : 한국과학기술원 전기및전자공학과 공학석사

1998년 2월 : 한국과학기술원 전기및전자공학과 공학

박사

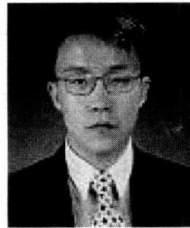
1997년 1월~1997년 12월 : 동경대학 객원연구원  
 1998년 1월~1998년 10월 : 엑센츄어 컨설턴트  
 1998년 11월~1999년 12월 : 일본모토로라 연구원  
 2000년 3월~현재 : 세종대학교 정보통신공학과 전임

강사

<주관심 분야> 통신수학, 신호검파이론

한 종 기(Jong-Ki Han)

정회원



1992년 2월 : 한국과학기술원 전기및전자공학과 공학사  
 1994년 2월 : 한국과학기술원 전기및전자공학과 공학석사

1999년 2월 : 한국과학기술원 전기및전자공학과 공학박사

1999년 3월~2001년 8월 : 삼성전자 디지털 미디어 연구소 책임연구원

2001년 9월~현재 : 세종대학교 정보통신공학과 조교수

<주관심 분야> 음성/영상처리및압축, 디지털신호처리, 디지털통신시스템

박 애 경(Ae-Kyung Park)

학생회원



1999년 2월 : 대진여자고등학교 졸업

1999년 3월~현재 : 세종대학교 정보통신공학과 (2003년 2월 졸업예정)

<주관심 분야> 통신공학, 검파이론