한 표본과 두 표본 적산성 관측 모형에서 순위 통계량을 이용한 신호 검파기의 검정 통계량

정회원 김 선 용*, 송 익 호**

The Test Statistics of Signal Detectors Based on Rank Statistics in One-Sample and Two-Sample Multiplicative Observation Models

Sun Yong Kim*, Iickho Song** *Regular Members*

요 약

본 논문에서는 가산성 잡음과 적산성 잡음이 섞여있는 잡음 모형에서 순위 통계량을 써서 신호를 검파하는 국소 최적 순위 검파기를 얻었다. 보통 관측으로 이루어진 한 표본 적산성 관측 모형과 기준 관측과 보통 관측으로 이루어진 두 표본 적산성 관측 모형에서 국소 최적 순위 검파기의 검정 통계량을 얻어 보았다.

ABSTRACT

In this paper, the locally optimum rank detection scheme based on sign and rank statistics in a multiplicative observation model is considered. The test statistics of the locally optimum rank detectors for known signals in multiplicative noise are derived. We also investigate the two-sample observation model, where it is assumed that reference observations are available in addition to regular observations.

Ⅰ. 서 론

신호 검파 문제는 귀무 가설과 (null hypothesis) 대립 가설의 (alternative hypothesis) 모수 이진 가설 검정 문제로 (parametric binary hypothesis testing problem) 풀 수 있으며, 모수 이진 가설 검정 문제를 기술하는 데에는 모수에 대한 정확한 정보를 필요로 한다. 그러나, 실제로 모수에 대한 정확한 정보를 추정하는 것은 매우 어려운 일이다. 또한, 잡음의 통계적 특성에 대한 사전 정보가 정확하지 않거나, 추정하기 어려운 경우에 최적 신호 검파기를 설계하는 것은 불가능하다. 실제 환경에서 모수나 잡음에 대한 정보를 추정하는 경우에도 참값이 추정값과 차가 있다면 최적 신호 검파기의 성능이 저하되는 것은 피할 수 없으며, 경우에 따라서는 작은 오차가 매우 심각한 성능 저하를 초래할 수도 있다. 순위 검파기는 이러한 경우에 유용하게 사용할 수 있는 비모수 검파기 (nonparametric detector) 중에서 대표적인 것이라 할 수 있다[1, 2].

비모수 검파기는 오경보 확률이 (false-alarm probability) 잡음의 확률분포에 상관없이 고정적인 신호 검파기이며, 정확히 알려지지 않은 잡음 환경에서도 검파기의 성능이 유지되어야 할 최저 성능 기준 이상으로는 만족되어야 하는 것이 목적이라 하겠다. 순위 검파기는 관측값의 부호와 순위를 이용하여 검파하는 검파기로서, 잡음 환경에 덜 민감한 특성 외에도 최적 검파기에 비하여 구현이 간단하다는 특성을 가지고 있다. 이러한 특성으로 순위 검파기는 레이더, 음향 탐지기, 의용신호처리 등의 여러 분야에서 응용되고 있다.

[5]에서는 가산성 잡음 (additive noise) 외에 적산성 잡음과 (multiplicative noise) 신호 의존성 잡음을 (signal-dependent noise) 고려한 일반화된 잡음 모형에서 모수 신호 검파 문제를 다루고 있다.

* 건국대학교 전자공학부 (kimsy@konkuk.ac.kr),
** 한국과학기술원 전자전산학과 (isong@sejong.kaist.ac.kr)
논문번호 : 020236-0516, 접수일자 : 2002년 5월 16일

적산성 잡음 모형은 일반화된 잡음 모형의 특별한 경우로서, 이동 통신 환경에서의 다중 경로를 모형화하는 데에나, 하드 디스크 등의 저장 매체를 모형화하는 데에 유용한 잡음 모형이다.

본 논문에서는 가산성 잡음과 함께 적산성 잡음이 존재하는 잡음 모형에서 국소 최적 순위 검파기를 (locally optimum rank detector) 얻어 보고자 한다. 보통 관측만이 (regular observation) 존재하는 한 표본 관측 모형의 (one-sample observation model) 경우 뿐만 아니라, 보통 관측 외에 기준 관측도 (reference observation) 함께 존재하는 두 표본 관측 모형의 (two-sample observation model) 경우에 국소 최적 순위 검파기를 얻어 보고자 한다.

Ⅱ. 한 표본 국소 최적 순위 검파기

가산성 잡음과 적산성 잡음이 함께 섞여 있는 한 표본 적산성 잡음 모형에서 이산 시간 관측값은 다음과 같이 나타낼 수 있다[6].

$$X_i = \theta e_i + \theta e_i N_i + W_i,\ i = 1, 2, \cdots, n, \tag{1}$$

여기서, e_i는 알려진 신호 성분, N_i는 적산성 잡음 성분이고, W_i는 가산성 잡음 성분이다. N_i와 W_i는 일반적으로 상관되어 있다.

N_i와 W_i의 상관 관계는 $E\{N|W=x\} = E\{N|W=-x\}$와 같은 우대칭의 경우 또는 $E\{N|W=x\} = -E\{N|W=-x\}$ 와 같은 좌대칭의 경우를 가정한다. 전자의 경우와 같은 상관 관계는 페이딩 신호의 확률 분포에서 찾아볼 수 있다. 예를 들면, W과 Z가 서로 독립이고, 평균 0, 분산 1인 정규 확률 변수라면, $N=\sqrt{W^2+Z^2}$은 페이딩 채널 모형으로 널리 사용되는 레일레이 (Rayleigh) 확률 분포를 따른다. 후자의 상관 관계는 이변수 분포에서 (bivariate distribution) 찾아볼 수 있다. $E\{N|W=x\}$을 좌대칭 성분과 우대칭 성분으로 나누어 다음과 같이 정의하자.

$$E\{N|W=x\} = E^o\{N|W=x\} + E^e\{N|W=x\}, \tag{2}$$

여기서, $E^o\{N|W=x\} = \frac{1}{2}[E\{N|W=x\} - E\{N|W=-x\}]$과 $E^e\{N|W=x\} = \frac{1}{2}[E\{N|W=x\} + E\{N|W=-x\}]$는 각각 $E\{N|W=x\}$의 좌대칭 성분과 우대칭 성분이다.

국소 최적 순위 신호 검파 문제는 관측모형 (1)로 부터 귀무가설과 (**H**) 대립가설의 (**K**) 이진 가설 검정 문제로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\boldsymbol{H}: \phi_0(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_W(x_i), \tag{3}$$

$$\boldsymbol{K}: \phi_\theta(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} \int f_{NW}(n_i, x_i - \theta e_i - \theta e_i n_i)\,dn_i, \tag{4}$$

또는

$$\boldsymbol{H}: p_0(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{z}) = \frac{1}{2^n n!}, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{K}: p_{\theta_0}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{z}) = \int_B \phi_\theta(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}. \tag{6}$$

여기서, $B=\{x|\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{q}, \boldsymbol{Z}=\boldsymbol{z}\}$이고, $\boldsymbol{Z}=(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$는 $Z_i = sgn(X_i)$인 관측값의 부호 통계량 (sign statistic) 벡터이며, $\boldsymbol{Q}=(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)$는 Q_i가 관측값 크기 집합 $\{|X_1|, |X_2|, \ldots, |X_n|\}$에서의 $|X_i|$의 순위를 나타내는 관측값의 크기 순위 통계량 (magnitude rank statistic) 벡터이다.

국소 최적 순위 검파기의 검정 통계량은 (test statistic) 일반화된 네이만-피어슨 정리로부터 (generalized Neyman-Pearson lemma)[3] 얻은 다음과 같은 식에서 유도할 수 있다.

$$T_{LOR}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{p_0(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{z})} \lim_{\theta\to 0} \frac{d^\nu p_\theta(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{z})}{d\theta^\nu}, \tag{7}$$

여기서, ν는 미분이 처음으로 0이 되지 않는 정수를 의미한다. 식 (7)로부터 $\nu=1$일 때, 한 표본 국소 최적 순위 검파기의 (one-sample locally optimum rank detector) 검정 통계량을 얻을 수 있다

$$T_{LOR}(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} e_i[Z_i\{c_1(Q_i) + c_{2o}(Q_i)\} + c_{2e}(Q_i)], \tag{8}$$

여기서, $c_1(i) = E_H\{g_1(|X|_{[i]})\}$와 $c_2(i) = E_H\{g_2(|X|_{[i]})\} = c_{2o}(i) + c_{2e}(i)$는 점수 함수이고 (score functions), $g_1(x) = -f_W'(x)/f_W(x)$와 $g_2(x) = -p_2'(x)/f_W(x)$는 국소 최적 비선형성이며 (locally optimum nonlinearities), $p_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{NW}(y, x)\,dy$이다. 또한, 점수 함수 $c_2(i)$를 구성하고 있는 좌대칭 점수 함수

$c_{2o}(i)$와 우대칭 점수 함수 $c_{2e}(i)$는 다음과 같이 정의된다.

$$c_{2o}(i) = E_H\{g_{2o}(|X|_{[i]})\}, \tag{9}$$

$$c_{2e}(i) = E_H\{g_{2e}(|X|_{[i]})\}, \tag{10}$$

여기서, $g_{2o}(i)$와 $g_{2e}(i)$는 각각 $g_2(i)$의 좌대칭 성분과 우대칭 성분을 나타낸다. 좌대칭 점수 함수 $c_{2o}(i)$와 우대칭 점수 함수 $c_{2e}(i)$는 각각 일반적으로 좌대칭과 우대칭 특성을 갖지는 않는다는 점에 주의하자. 가산성 잡음 성분 $f_W(x)$가 우대칭이라면, $c_{1o}(i) = c_1(i)$이고, $c_{1e}(i) = 0$임을 쉽게 보일 수 있다. 이 논문에서는 가산성 잡음 성분 $f_W(x)$가 우대칭이라 가정한다.

관측 모형 (1)에서 얻어진 국소 최적 검파기의 검정 통계량은 다음과 같다[4].

$$T_{LO}(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} e_i\{g_1(X_i) + g_2(X_i)\}. \tag{11}$$

식 (8)의 국소 최적 순위 검파기의 검정 통계량 $T_{LOR}(\boldsymbol{X})$와 수식 (11)의 국소 최적 검파기의 검정 통계량 $T_{LO}(\boldsymbol{X})$은 그 형태가 유사함을 알 수 있다.

일반적으로 적산성 잡음 모형에서 국소 최적 순위 검파기의 검정 통계량은 적산성 잡음 N과 가산성 잡음 W의 관계가 주어진다면, 점수 함수 $c_1(\cdot)$, $c_{2o}(\cdot)$, $c_{2e}(\cdot)$를 사용하여 검정 통계량 (11)로부터 얻을 수 있다. $E\{N|W=x\}$의 우대칭 성분 $E^e\{N|W=x\}$가 0이 아닐 때 ($g_2(x)$의 좌대칭 성분 $g_{2o}(x)$가 0이 아닌 경우), 좌대칭 점수 함수 $c_{2o}(i)$는 0이 아니며, 검정 통계량은 일반화된 형태인 (8)의 형태를 갖는다.

$E\{N|W=x\}$의 좌대칭 성분 $E^o\{N|W=x\}$가 0일 때 (등가로, $g_2(x)$의 우대칭 성분 $g_{2e}(x)$가 0인 경우), $c_2(i) = c_{2o}(i)$이고, $c_{2e}(i) = 0$이다. 또한, $E\{N|W=x\}$의 우대칭 성분 $E^e\{N|W=x\}$가 0일 때 (등가로, $g_2(x)$의 좌대칭 성분 $g_{2o}(x)$가 0인 경우), $c_2(i) = c_{2e}(i)$이고, $c_{2o}(i) = 0$이다.

$E\{N|W=x\}$의 우대칭 성분인 $E^e\{N|W=x\}$가 (등가로, $g_2(x)$의 좌대칭 성분 $g_{2o}(x)$가) 국소 최적 순위 검파기의 검정 통계량을 이루는 데에, $c_{2o}(i)$가 부호 통계량 Z_i와 곱의 형태로 영향을 끼치는 것을 알 수 있다. 반면, $E\{N|W=x\}$의 좌대칭 성분인 $E^o\{N|W=x\}$가 (등가로, $g_2(x)$의 우대칭 성분 $g_{2e}(x)$가) 국소 최적 순위 검파기의 검정 통계량을 이루는 데에, $c_{2e}(i)$가 부호 통계량 Z_i과 관계없이 영향을 끼치는 것을 알 수 있다. $g_2(x)$의 우대칭 성분 $g_{2e}(x)$는 (등가로, 우대칭 점수 함수 $c_{2e}(i)$는) 신호 성분 e_i가 모두 i에 대하여 같은 값일 경우에는 검정 통계량에 영향을 끼치지 않는다는 것을 알 수 있다.

Ⅲ. 두 표본 국소 최적 순위 검파기

한 표본 적산성 관측 모형에서는 n개의 보통 관측으로부터 신호를 검파하였다. 보통 관측 외에 가산성 잡음만으로 이루어진 m개의 기준 관측을 함께 사용하여 신호를 검파하는 두 표본 적산성 관측 모형에서의 관측값은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$X_i = \begin{cases} \theta e_i + \theta e_i N_i + W_i, & i = 1, 2, \cdots, n, \\ W_i & i = n+1, n+2, \cdots, n+m. \end{cases} \tag{12}$$

두 표본 국소 최적 순위 신호 검파 문제도 관측 모형 (1)로부터 귀무가설과 ($\boldsymbol{H}$) 대립가설의 ($\boldsymbol{K}$) 이진 가설 검정 문제로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\boldsymbol{H}: \phi_0(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n+m} f_W(x_i) \tag{13}$$

$$\boldsymbol{K}: \phi_\theta(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} \int f_{NW}(n_i, x_i - \theta e_i - \theta e_i n_i) dn_i \{\prod_{j=n+1}^{n+m} f_W(x_j)\}, \tag{14}$$

또는

$$\boldsymbol{H}: p_0(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(n+m)!} \tag{15}$$

$$\boldsymbol{K}: p_\theta(\boldsymbol{r}) = \int_A \phi_\theta(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}. \tag{16}$$

여기서, $A = \{x| \boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}\}$이고, $\boldsymbol{R} = (R_1, R_2, \ldots, R_{n+m})$에서 R_i는 관측값 집합 $X_1, X_2, \ldots, X_n$에서 X_i의 순위를 나타내는 관측값의 순위 통계량 벡터이다.

한 표본 적산성 관측 모형에서 국소 최적 순위 검파기의 검정 통계량을 얻을 때와 같은 방법인 일반화된 네이만-피어슨 정리로부터 다음과 같은 두 표본 국소 최적 순위 검파기의 (two-sample locally optimum rank detector) 검정 통계량을 얻을 수 있다.

$$T_{LOR}^{t}(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} e_i a_1(R_i) + a_2(R_i), \tag{17}$$

여기서, $a_1(i)$와 $a_2(i)$는 다음과 같이 정의되는 점수 함수이다.

$$a_1(i) = E_H\{g_1(X_{[i]})\}, \tag{18}$$

$$a_2(i) = E_H\{g_2(X_{[i]})\}. \tag{19}$$

$X_{[i]}$는 관측값 집합 $\{X_1, X_2, \ldots, X_{n+m}\}$에서 i번째 순서 통계량이다 (order statistic).

두 표본 검정 통계량 (17)을 보면 한 표본 검정 통계량 (11)에서와는 달리 더해지는 항의 수가 $n+m$이 아니라 n임을 알 수 있다. 곧, 보통 관측의 순위만이 검정 통계량을 얻는 데에, 직접 사용되었고, 기준 관측들은 다만 보통 관측들의 순위를 결정짓는 데에만 사용되었다.

두 표본 신호 검파기를 사용함으로써, 한 표본 신호 검파기에서 필요로 했던 부호 통계량을 구하는 데에 필요한 계산을 줄일 수 있었으나, 반면에 보다 많은 관측값을 사용하여 필요한 메모리는 증가하였음을 알 수 있다.

한 표본 국소 최적 검파기의 검정 통계량 (11), 한 표본 국소 최적 순위 검파기의 검정 통계량 (8), 한 표본 국소 최적 순위 검파기의 검정 통계량 (17)을 비교해보면 모두 비슷한 형태를 가짐을 알 수 있다.

Ⅳ. 결 론

본 논문에서는 한 표본 적산성 관측 모형과 두 표본 적산성 관측 모형에서 국소 최적 순위 검파기의 검정 통계량을 얻어 보았다. 한 표본 국소 최적 순위 검파기의 검정 통계량은 관측값의 부호 통계량과 관측값의 크기 순위 통계량을 사용한 점수 함수로 이루어지며, 두 표본 국소 최적 순위 검파기의 검정 통계량은 관측값의 부호 통계량을 필요로 하지 않고, 관측값의 순위 통계량만을 사용한 점수 함수로 이루어진다는 것을 알아보았다. 국소 최적 검파기의 검정 통계량과 국소 최적 순위 검파기를 비교해보면, 그 구조가 유사함을 알 수 있었다. 그리고, 한 표본 국소 최적 순위 검파기의 검정 통계량은 적산성 잡음 N과 가산성 잡음 W의 관계에 따라 그 형태가 정해짐을 알 수 있었다.

참 고 문 헌

[1] C.L. Brown and A.M. Zoubir, "A nonparametric approach to signal detection in impulsive interference," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 48, pp. 2665-2669, Sep. 2000.

[2] J. Hajek, Z. Sidak, and P.K. Sen, *Theory of Rank Tests*, 2nd Ed., Academic Press, New York, 1999.

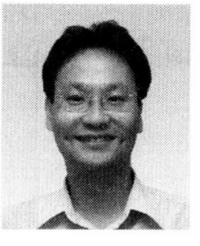
[3] S.A. Kassam, *Signal Detection in Non-Gaussian Noise,* Springer-Verlag, New York, 1988.

[4] S.Y. Kim and I. Song, "On the score functions of the two-sample locally optimum rank test statistic for random signals in additive noise," *IEEE Trans. Inform. Theory,* vol. 41, no. 3, pp. 842-846, May 1995.

[5] I. Song and S.A. Kassam, "Locally optimum rank detection of correlated random signals in additive noise," *IEEE Trans. Inform. Theory,* vol. 38, pp. 1311-1322, July 1992.

[6] 엄태상, 김상엽, 김형명, 송익호, 김선용, 유흥균, "복합신호-적산성 잡음 모형에서 약한신호 검파," *한국통신학회 논문지,* 16권, 11호, pp. 1125-1131, 1991년 11월.

김 선 용(Sun Yong Kim) 정회원



1990년 2월 : 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 공학사 (최우등)

1993년 2월 : 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 공학석사

1995년 8월 : 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 공학박사

1995년 4월~1996년 3월 : 동경대학교 생산기술연구소 박사연구원

1996년 9월~1998년 12월 : 한국전자통신연구원 초빙연구원

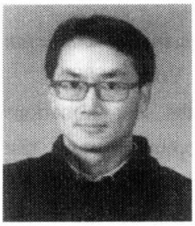
1996년 3월~2001년 8월 : 한림대학교 정보통신공학부 전임강사, 조교수

2001년 9월~현재 : 건국대학교 전자공학부 조교수

1990년 : IEEE Korea Section 학생논문대회 우수상

받음
1992/3년 : IEEE Communication Society 장학금 받음
대한전자공학회, 한국통신학회 정회원; IEEE 선임회원
<주관심 분야> 통계학적 신호처리, 이동통신, 통신이론

송 익 호(Iickho Song) 정회원



1982년 2월 : 서울대학교 전자공학과 공학사 (준최우등)
1984년 2월: 서울대학교 전자공학과 공학석사
1985년 8월 : 펜실베니아대학교 전기공학과 공학석사
1987년 5월 : 펜실베니아대학교 전기공학과 공학박사
1987년 3월~1988년 2월 : 벨 통신연구소 연구원
1988년 3월~현재 : 한국과학기술원 전자전산학과 조교수, 부교수, 교수
1995년 1월~현재 : 한국통신학회 논문지 편집위원
1991년 11월, 1996년 11월: 한국통신학회 학술상 받음
1993년 11월 : 한국음향학회 우수연구상 받음
1998년 11월 : 한국통신학회 LG학술상 받음
1999년 11월 : 대한전자공학회 해동논문상 받음
2000년 3월 : 젊은 과학자상 받음
2000년 11월 : 한국통신학회 모토롤라학술상 받음
대한전자공학회, 한국음향학회, 한국통신학회 평생회원; IEE 석학회원; IEEE 선임회원
<주관심 분야> 통계학적 신호처리와 통신이론, 신호검파와 추정, 이동통신