

# 시간 지연이 있는 시스템에서의 PID 제어기 설계를 위한 루프 형성 기법

정회원 윤성오\*, 서병설\*\*

## A Loop Shaping Method of PID Controller for Time delay Systems

Seong-o Yun\*, Byung-suhl Suh\*\* *Regular Members*

### 요 약

시간 지연이 있는 시스템에서의 최적 제어 이득은 시간 지연이 없는 시스템에서 설계된 최적 제어 이득과 지연 시간에 대하여 계산된 상태전이 함수의 곱의 형태로 나타난다. 따라서 시간 지연이 없는 시스템에 대하여 PID 제어기의 영점들을 플랜트의 최대 극점에 근접하도록 가중치 요소 Q와 R을 선택하여 최적 제어 이득을 구하고, 시간 지연이 있는 2차 시스템에서의 상태전이 함수를 계산 하여 시간 지연이 있는 시스템에서의 강인한 최적 PID 제어기 설계가 가능하도록 하였다

**Key Words** Time delay System, PID controller, LQR, Loop Shaping, Robust Control

### ABSTRACT

Optimal control gain for time-delay systems is made by an optimal control gain for delay-free systems multiplied by a state transition function for the delay time. The optimal control gain for delay-free systems is obtained by pushing two zeros of the PID controller closely to a larger pole of the second order plant. Thus the optimal tuning of PID controller for time-delay second order system is able to be obtained by calculation for the state transition function.

### I. 서 론

LQR은 잘 알려진 최적제어 설계 방법이다. 안정도 강인성과 우수한 성능을 모두 만족하도록 제어기를 설계하기 위하여 최근에는 LQG-LTR<sup>[1]</sup>, H<sup>∞</sup><sup>[2][3]</sup>와 같이 보다 정교한 수학적 최적제어 이론에 근거를 둔 설계 방법들이 이용되고 있지만, LQR의 설계 방법의 탁월한 강인성과 단순성 때문에 아직까지도 LQR 설계 방법이 널리 사용되고 있다. 특히, LQR은 단일 입출력 시스템에서 60° 이상의 위상여유(phase margin)와 무한대의 이득여유(gain margin)를 보장하기 때문에 많은 분야에서 응용되

### 고 있다

이러한 특징 때문에 산업계에서 널리 사용되고 있는 PID 제어기에 LQR 기법을 적용하려는 시도가 1970년대부터 있어 왔다. Shin<sup>[4]</sup>은 2차 시스템의 경우 LQR제어 기법을 PID 제어기 설계에 적용할 수 있음을 보였고, He<sup>[5]</sup>는 시간 지연이 있는 1차 시스템에 대하여 LQR제어 기법을 PID 제어기 설계에 적용하였다. 또한, 윤과 서<sup>[6]</sup>는 2차 시스템에 대하여 LQR제어 기법과 루프형성 기법을 이용하여 PID 제어기 설계에 적용하였다. 윤과 서<sup>[6]</sup>의 방법에서는 안정도 강인성과 성능 강인성을 동시에 만족시키기 위해 PID 제어기의 두 개의 영점들을 플랜

\* 삼성 에스원 기술연구소 근무 (mcom\_yun@samsung.com), \*\* 한양대학교 전자전기컴퓨터공학부 교수(교신책임자)  
논문번호 KICS2004-08-176, 접수일자 2004년 8월31일

트의 최대 극점에 근접하도록  $Q$ 와  $R$ 을 선택하도록 하여, Bode 선도 상의 루프형상을 저주파 영역의 명령 추종 및 외란 제거 성능과 고주파 영역의 센서 잡음 및 고차 모델링 오차 저감에 대한 성능을 만족시키도록 하였다.

본 논문에서는 2차 시스템에 대한 상태전이 행렬을 계산하고 이를 이용하여 윤과 서<sup>[6]</sup>의 방법을 시간 지연이 있는 2차 시스템에 까지 확장하여 적용할 수 있는 방법을 제안하고자 한다 또한, 윤과 서<sup>[6]</sup>의 설계 절차 중 일부를 개선하여 보다 우수한 성능을 갖도록 하는 방법을 제안하고자 한다

## II. 시간 지연이 있는 2차 시스템의 LQR을 이용한 PID 동조

다음의 시간지연이  $L$  인 2차 시스템에 대한 PID

$$g_p(s) = \frac{\beta}{s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2} e^{-Ls} \quad (1)$$

동조를 LQR을 이용하여 설계하기 위해서는 윤과 서<sup>[6]</sup>의 방법에서와 같이 피드 포워드 루프(feed forward loop)에 출력 변수의 적분값이 상태 변수로 추가되도록 하는 다음의 덧붙임 상태공간식(augmented state-space description)을 만든다

$$\dot{x}(t) = \left[ \int_0^t y(\tau) d\tau \quad y(t) \quad \frac{dy(t)}{dt} \right]^T \quad (2)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = A x(t) + B u(t-L) \quad (3)$$

$$y(t) = C x(t) \quad (4)$$

여기서 상태공간 행렬  $A$ ,  $B$ ,  $C$ 는

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix}, \quad C = [0 \ 1 \ 0] \quad (5)$$

이다  $0 \leq t < L$  의 경우, 입력신호  $u(t-L) = 0$  이므로 식(3)은

$$\dot{\bar{x}}(t) = A x(t), \quad 0 \leq t < L \quad (6)$$

와 같으며,  $t \geq L$ 의 경우, 입력신호  $u(t-L)$ 를  $u(t-L) = \hat{u}(t)$  라 하면 식(3)은

$$\dot{\bar{x}}(t) = A x(t) + B \hat{u}(t), \quad t \geq L \quad (7)$$

와 같이 된다 식(6)과 (7)에서 LQR에 의한 최적 제어 법칙을 찾으면 다음과 같다

$$\hat{u}(t) = -G x(t), \quad t \geq L \quad (8)$$

$$u(t) = \hat{u}(t+L) = -G x(t+L), \quad t \geq 0 \quad (9)$$

여기서  $G = R^{-1} B^T P$  이며,  $P = P^T$ 는 다음 Riccati 방정식의 해이다

$$PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P = 0 \quad (10)$$

또한 상태전이 행렬  $\Psi(t)$ 는 식(6)과 (7)로부터 다음 같이 구할 수 있다

$$\Psi(t) = \begin{cases} e^{At} & , 0 \leq t < L \\ e^{(A-BG)t} & , t \geq L \end{cases} \quad (11)$$

$x(t+L)$ 는 상태전이 행렬  $\Psi(t)$ 의 특성에 의하여 다음과 같이 표현할 수 있다

$$x(t+L) = \begin{cases} e^{(A-BG)t} e^{A(L-t)} x(t) & , 0 \leq t < L \\ e^{(A-BG)L} x(t) & , t \geq L \end{cases} \quad (12)$$

또한  $A_c = A - BG$  라 하면 최적 제어 법칙 식(9)는 식(12)에 의하여

$$u(t) = \begin{cases} -G e^{A_c t} e^{A(L-t)} x(t) & , 0 \leq t < L \\ -G e^{A_c L} x(t) & , t \geq L \end{cases} \quad (13)$$

와 같이 된다 따라서 시간지연이 있는 시스템의 새로운 제어이득 행렬  $F(t)$ 는

$$F(t) = \begin{cases} G e^{A_c t} e^{A(L-t)} \\ = [f_0(t) \ f_1(t) \ f_2(t)] & , 0 \leq t < L \\ G e^{A_c L} \\ = [f_0(L) \ f_1(L) \ f_2(L)] & , t \geq L \end{cases} \quad (14)$$

이 되므로, 상태 변수의 식(2)와 최적 제어 법칙의 식(13)을 활용하여

$$u(t) = \begin{cases} -\left( f_0(t) \int_0^t y(\tau) d\tau + f_1(t) y(t) + f_2(t) \frac{dy(t)}{dt} \right) & , 0 \leq t < L \\ -\left( f_0(L) \int_0^t y(\tau) d\tau + f_1(L) y(t) + f_2(L) \frac{dy(t)}{dt} \right) & , t \geq L \end{cases} \quad (15)$$

와 같이 PID 제어 형태로 표현할 수 있다. 전통적인 PID 제어 형태는

$$u(t) = -K_p \left( y(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t y(\tau) d\tau + T_d \frac{dy(t)}{dt} \right) \quad (16)$$

이므로 식(15)에서의 제어 이득 행렬의 각 부분의 이득 요소  $f_i(t)$ 를 식(16)에서의 비례이득  $K_p$ , 적분요소 시간  $T_i$ , 및 미분요소 시간  $T_d$ 로 표현할 수 있다 먼저  $0 \leq t < L$ 인 경우

$$K_p = f_1(t), \quad T_i = \frac{f_1(t)}{f_0(t)}, \quad T_d = \frac{f_2(t)}{f_1(t)} \quad (17)$$

이고,  $t \geq L$ 인 경우

$$K_p = f_1(L), \quad T_i = \frac{f_1(L)}{f_0(L)}, \quad T_d = \frac{f_2(L)}{f_1(L)} \quad (18)$$

로 나타낼 수 있다 식(17)과 식(18)에서 보이는 바와 같이 시간 지연이 있는 2차 시스템에서의 PID 제어기의 파라미터  $K_p$ ,  $T_i$ , 및  $T_d$ 는 식(14)의 새로운 제어이득 행렬  $F(t)$ 를 구하면 얻을 수 있다

### III. 시간 지연이 있는 2차 시스템의 제어이득 행렬

시간 지연이 있는 2차 시스템의 제어이득 행렬  $F(t)$ 는 식(14)에서 보이는 바와 같이 시간 지연이 없는 2차 시스템에서 LQR기법으로 얻어진 제어이득  $G$ 와 식(11)의 두 종류의 상태전이 행렬  $e^{A_c t}$ ,  $e^{A_t}$ 들을 각각 구하면 얻을 수 있다.

#### 1 상태전이 행렬 $e^{A_c t}$ 구하기

먼저 상태전이 행렬  $e^{A_c t}$ 를 구하기 위하여 Riccati 방정식의 해인  $P$ 를

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix} \quad (19)$$

와 같이 정의하면,

$$\begin{aligned} A_c &= A - BG = A - BR^{-1}B^T P \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} - R^{-1} \beta^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -l_3 & -l_2 & -l_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

여기서  $l_3 = R^{-1} \beta^2 p_{13}$ ,  $l_2 = a_2 + R^{-1} \beta^2 p_{23}$ ,  $l_1 = a_1 + R^{-1} \beta^2 p_{33}$ 이다

또한  $(sI - A_c)^{-1}$ 는 다음과 같이 표현할 수 있다

$$\begin{aligned} (sI - A_c)^{-1} &= \frac{1}{D(s)} \begin{bmatrix} s^2 + l_1 s + l_2 & s + l_1 & 1 \\ -l_3 & s^2 + l_1 s & s \\ -l_3 s & -l_2 s - l_3 & s^2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{D(s)} \begin{bmatrix} N_{11}(s) & N_{12}(s) & N_{13}(s) \\ N_{21}(s) & N_{22}(s) & N_{23}(s) \\ N_{31}(s) & N_{32}(s) & N_{33}(s) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (21)$$

여기서  $D(s) = s^3 + l_1 s^2 + l_2 s + l_3$ 는  $(sI - A_c)^{-1}$ 의 특성다항식이고,  $N_{nm}(s)$ 는 행렬의  $n$ 행  $m$ 열의 요소이다 따라서 상태전이 행렬  $e^{A_c t}$ 는 다음과 같다

$$\begin{aligned} e^{A_c t} &= \ell^{-1} \{ (sI - A_c)^{-1} \} \\ &= \ell^{-1} \left\{ \frac{1}{D(s)} \begin{bmatrix} N_{11}(s) & N_{12}(s) & N_{13}(s) \\ N_{21}(s) & N_{22}(s) & N_{23}(s) \\ N_{31}(s) & N_{32}(s) & N_{33}(s) \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

상태전이 행렬  $e^{A_c t}$ 의  $n$ 행  $m$ 열의 요소는  $N_{nm}(s)/D(s)$ 를 부분분수로 전개하여 라플라스 역변환을 함으로써 쉽게 구할 수 있는데, 특성다항식  $D(s)$ 의 세근  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$ 의 관계에 따라 부분분수 전개 방법이 다르다. 세 근에 대하여 생각할 수 있는 모든 경우는 다음의 4가지로 정리될 수 있으며 각 경우에 대하여 상태전이 행렬  $e^{A_c t}$ 의  $n$ 행  $m$ 열의 요소를 다음과 같이 구할 수 있다.

1) 서로 다른 세 실근인 경우  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$

$N_{nm}(s)/D(s)$ 는 다음과 같이 전개된다.

$$\frac{N_{nm}(s)}{D(s)} = \frac{c_{nm1}}{s - \nu_1} + \frac{c_{nm2}}{s - \nu_2} + \frac{c_{nm3}}{s - \nu_3} \quad (23)$$

이때  $n$ 행  $m$ 열의  $k$ 번째 부분분수의 분모항은

$$c_{nmk} = \left[ \frac{(s - \nu_k) N_{nm}(s)}{D(s)} \right]_{s=\nu_k} \quad (24)$$

과 같이 정리할 수 있고 상태전이 행렬  $e^{A_c t}$ 의  $n$ 행  $m$ 열의 요소는 라플라스 역변환에 의하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\ell^{-1} \left\{ \frac{N_{nm}(s)}{D(s)} \right\} = c_{nm1} e^{\nu_1 t} + c_{nm2} e^{\nu_2 t} + c_{nm3} e^{\nu_3 t} \quad (25)$$

2) 두 실근이 같고 나머지 한 실근이 다른 경우

$$\nu_1 = \nu_2, \nu_3$$

$N_{nm}(s)/D(s)$ 는 다음과 같이 전개 될 수 있다

$$\frac{N_{nm}(s)}{D(s)} = \frac{c_{nm1}}{(s-\nu_1)^2} + \frac{c_{nm2}}{s-\nu_1} + \frac{c_{nm3}}{s-\nu_3} \quad (26)$$

이때 각 부분분수의 분모항은

$$c_{nm1} = \left[ \frac{(s-\nu_1)^2 N_{nm}(s)}{D(s)} \right]_{s=\nu_1} \quad (27)$$

$$c_{nm2} = \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{(s-\nu_1)^2 N_{nm}(s)}{D(s)} \right]_{s=\nu_1} \quad (28)$$

$$c_{nm3} = \left[ \frac{(s-\nu_3) N_{nm}(s)}{D(s)} \right]_{s=\nu_3} \quad (29)$$

과 같이 정리할 수 있고 상태전이 행렬  $e^{A \cdot t}$ 의  $n$ 행  $m$ 열의 요소는 라플라스 역변환에 의하여 다음과 같이 구할 수 있다

$$\ell^{-1} \left\{ \frac{N_{nm}(s)}{D(s)} \right\} = c_{nm1} t e^{\nu_1 t} + c_{nm2} e^{\nu_1 t} + c_{nm3} e^{\nu_3 t} \quad (30)$$

3) 세 실근이 모두 같은 경우  $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3$

$N_{nm}(s)/D(s)$ 는 다음과 같이 전개 될 수 있다

$$\frac{N_{nm}(s)}{D(s)} = \frac{c_{nm1}}{(s-\nu_1)^3} + \frac{c_{nm2}}{(s-\nu_1)^2} + \frac{c_{nm3}}{s-\nu_1} \quad (31)$$

이때 각 부분분수의 분모항은

$$c_{nm1} = \left[ \frac{(s-\nu_1)^3 N_{nm}(s)}{D(s)} \right]_{s=\nu_1} \quad (32)$$

$$c_{nm2} = \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{(s-\nu_1)^3 N_{nm}(s)}{D(s)} \right]_{s=\nu_1} \quad (33)$$

$$c_{nm3} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left[ \frac{(s-\nu_1)^3 N_{nm}(s)}{D(s)} \right]_{s=\nu_1} \quad (34)$$

과 같이 정리할 수 있고 상태전이 행렬  $e^{A \cdot t}$ 의  $n$ 행  $m$ 열의 요소는 라플라스 역변환에 의하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\ell^{-1} \left\{ \frac{N_{nm}(s)}{D(s)} \right\} = c_{nm1} \frac{1}{2} t^2 e^{\nu_1 t} + c_{nm2} t e^{\nu_1 t} + c_{nm3} e^{\nu_1 t} \quad (35)$$

4) 공액복소근과 나머지 한 실근인 경우

$$\nu_1 = \nu_2^*, \nu_3$$

$N_{nm}(s)/D(s)$ 는 다음과 같이 전개 될 수 있다

$$\frac{N_{nm}(s)}{D(s)} = \frac{c_{nm1}s + c_{nm2}}{(s-\nu_1)(s-\nu_1^*)} + \frac{c_{nm3}}{s-\nu_3} \quad (36)$$

$\nu_1 = \gamma + j\epsilon, \nu_2 = \gamma - j\epsilon$  라 하고 복소수  $Z_{nm}$ 를 다음과 같이 정의하면

$$Z_{nm} = \left[ \frac{(s-\nu_1)(s-\nu_1^*) N_{nm}(s)}{D(s)} \right]_{s=\nu_1} = \Gamma_{nm} + j T_{nm} \quad (37)$$

여기서  $\Gamma_{nm}$ 은 복소수  $Z_{nm}$ 의 실수부이고,  $T_{nm}$ 은 복소수  $Z_{nm}$ 의 허수부 이다 그러면 식(36)의

$c_{nm1}, c_{nm2}, c_{nm3}$ 는 다음과 같다

$$c_{nm1} = \frac{T_{nm}}{\epsilon} \quad (38)$$

$$c_{nm2} = \Gamma_{nm} - \frac{\gamma}{\epsilon} T_{nm} \quad (39)$$

$$c_{nm3} = \left[ \frac{(s-\nu_3) N_{nm}(s)}{D(s)} \right]_{s=\nu_3} \quad (40)$$

이다 따라서 상태전이 행렬  $e^{A \cdot t}$ 의  $n$ 행  $m$ 열의 요소는 라플라스 역변환에 의하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\ell^{-1} \left\{ \frac{N_{nm}(s)}{D(s)} \right\} = \frac{1}{\epsilon} e^{\gamma t} (T_{nm} \cos \epsilon t + \Gamma_{nm} \sin \epsilon t) + c_{nm3} e^{\nu_3 t} \quad (41)$$

2 상태전이 행렬  $e^{A \cdot t}$  구하기

다음으로 상태전이 행렬  $e^{A \cdot t}$ 를 구하기 위하여  $(sI-A)$ 의 역행렬을 구하면,

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{E(s)} \begin{bmatrix} s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2 & s + \alpha_1 & 1 \\ 0 & s^2 + \alpha_1 s & s \\ 0 & -\alpha_2 s & s^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{E(s)} \begin{bmatrix} M_{11}(s) & M_{12}(s) & M_{13}(s) \\ M_{21}(s) & M_{22}(s) & M_{23}(s) \\ M_{31}(s) & M_{32}(s) & M_{33}(s) \end{bmatrix} \quad (42)$$

여기서  $E(s) = s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s$ 는  $(sI-A)^{-1}$ 의 특성다항식이고,  $M_{nm}(s)$ 는  $n$ 행  $m$ 열의 요소이다. 따라

서 상태천이 행렬  $e^{At}$ 는

$$e^{At} = \ell^{-1} \{ (sI - A)^{-1} \} \quad (43)$$

$$= \ell^{-1} \left\{ \frac{1}{E(s)} \begin{bmatrix} M_{11}(s) & M_{12}(s) & M_{13}(s) \\ M_{21}(s) & M_{22}(s) & M_{23}(s) \\ M_{31}(s) & M_{32}(s) & M_{33}(s) \end{bmatrix} \right\}$$

이다 상태천이 행렬  $e^{At}$ 의  $n$ 행  $m$ 열의 요소는 상태천이 행렬  $e^{A \cdot t}$ 에서와 동일한 방법으로 구할 수 있다.  $M_{nm}(s)/E(s)$ 를 부분분수로 전개함으로써 쉽게 구할 수 있다.  $e^{At}$ 에서와 마찬가지로 특성 다항식  $E(s)$ 의 세근  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 의 관계에 따라 부분분수 전개 방법이 다르다. 특히  $E(s)$ 의 세근 중 하나 이상은 0 이어야 하므로 이에 유의한다.  $E(s)$ 에 대하여 생각 할 수 있는 모든 경우는 다음의 4가지로 정리될 수 있으며 각 경우에 대하여 다음과 같이 정리할 수 있다.

1) 서로 다른 세 실근인 경우  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$   
 상태천이 행렬  $e^{At}$ 의  $n$ 행  $m$ 열의 요소는

$$\ell^{-1} \left\{ \frac{M_{nm}(s)}{E(s)} \right\} = b_{nm1} e^{\lambda_1 t} + b_{nm2} e^{\lambda_2 t} + b_{nm3} e^{\lambda_3 t} \quad (44)$$

이다. 여기서  $b_{nmk}$ 는

$$b_{nmk} = \left[ \frac{(s - \lambda_k) M_{nm}(s)}{E(s)} \right]_{s=\lambda_k} \quad (45)$$

2) 두 실근이 같고 나머지 한 실근이 다른 경우  
 $\lambda_1 = \lambda_2, \lambda_3$

상태천이 행렬  $e^{At}$ 의  $n$ 행  $m$ 열의 요소는

$$\ell^{-1} \left\{ \frac{M_{nm}(s)}{E(s)} \right\} = b_{nm1} t e^{\lambda_1 t} + b_{nm2} e^{\lambda_1 t} + b_{nm3} e^{\lambda_3 t} \quad (46)$$

이고, 여기서  $b_{nmk}$ 는

$$b_{nm1} = \left[ \frac{(s - \lambda_1)^2 M_{nm}(s)}{E(s)} \right]_{s=\lambda_1} \quad (47)$$

$$b_{nm2} = \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{(s - \lambda_1)^2 M_{nm}(s)}{E(s)} \right]_{s=\lambda_1} \quad (48)$$

$$b_{nm3} = \left[ \frac{(s - \lambda_3) M_{nm}(s)}{E(s)} \right]_{s=\lambda_3} \quad (49)$$

3) 세 실근이 모두 같은 경우  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

상태천이 행렬  $e^{At}$ 의  $n$ 행  $m$ 열의 요소는

$$\ell^{-1} \left\{ \frac{M_{nm}(s)}{E(s)} \right\} = b_{nm1} \frac{1}{2} t^2 + b_{nm2} t + b_{nm3} \quad (50)$$

이다. 여기서  $b_{nmk}$ 는

$$b_{nm1} = \left[ \frac{s^3 M_{nm}(s)}{E(s)} \right]_{s=0} \quad (51)$$

$$b_{nm2} = \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{s^3 M_{nm}(s)}{E(s)} \right]_{s=0} \quad (52)$$

$$b_{nm3} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left[ \frac{s^3 M_{nm}(s)}{E(s)} \right]_{s=0} \quad (53)$$

4) 공액복소근과 한 실근인 경우  $\lambda_1 = \lambda_2^*, \lambda_3 = 0$

$\lambda_1 = \delta + j\eta, \lambda_1^* = \lambda_2 = \delta - j\eta$  라하고 복소수  $\Delta_{nm}$ 를 다음과 같이 정의하면

$$\Delta_{nm} = \left[ \frac{(s - \lambda_1)(s - \lambda_1^*) M_{nm}(s)}{E(s)} \right]_{s=\lambda_1} = \Delta_{nm} + j\Pi_{nm} \quad (54)$$

여기서  $\Delta_{nm}$ 은 복소수  $\Delta_{nm}$ 의 실수부이고,  $\Pi_{nm}$ 은 복소수  $\Delta_{nm}$ 의 허수부이다 따라서 상태천이 행렬  $e^{At}$ 의  $n$ 행  $m$ 열의 요소는 다음과 같다.

$$\ell^{-1} \left\{ \frac{M_{nm}(s)}{E(s)} \right\} = \frac{1}{\eta} e^{\delta t} (\Pi_{nm} \cos \eta t + \Delta_{nm} \sin \eta t) + b_{nm3} \quad (55)$$

여기서  $b_{nm3}$ 는

$$b_{nm3} = \left[ \frac{s M_{nm}(s)}{E(s)} \right]_{s=0} \quad (56)$$

### 3 시간 지연이 없는 시스템의 제어이득 G 구하기

시간 지연이 없는 2차 시스템에서 LQR기법으로 제어이득 G를 구하는 방법은 기본적으로는 윤과 서<sup>[6]</sup>의 방법과 동일하나 보다 우수한 성능을 얻을 수 있도록 설계 절차 중 일부를 개선하고자 한다

윤과 서<sup>[6]</sup>의 방법은 PID제어기의 영점들을 시스템의 최대 극점에 근접하도록 Q와 R을 선택하고, 식(10)의 Riccati 방정식을 이용하여 제어이득 G를

구한다. PID제어기의 영점을 시스템의 최대 극점에 근접시키기 위해서 LQ문제의 주파수역 등가(frequency domain equality)에서 근사된 다음 식을 이용한다.

$$|h(s)| \approx \frac{1}{\sqrt{\rho}} |N(sI - A)^{-1}B| \quad (57)$$

여기서  $h(s)$ 는 시스템의 페루프 전달함수 이고,  $N = [n_0 \ n_1 \ n_2]$ 과  $\rho$ 는 설계 파라미터로

$Q = N^T N$ ,  $R = \rho I$ 를 만족한다.

식(41)을 식(1)의 시스템에 적용하면,

$$|h(s)| \approx \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left| \frac{n_2 \beta s^2 + n_1 \beta s + n_0 \beta}{s(s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2)} \right| \quad (58)$$

와 같이 된다.

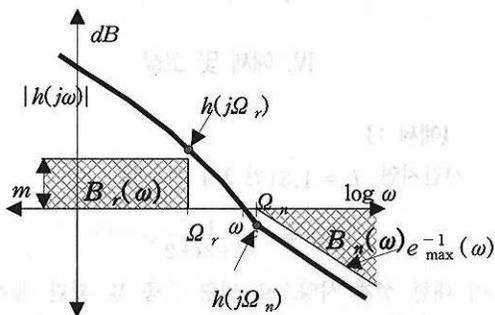


그림 1. 성능 요구사항의 두 장벽을 고려한  $|h(j\omega)|$ 의 전형적인 루프 형상

$|h(j\omega)|$ 의 루프 형상이 그림 1의 " $B_r(\omega)$ " 영역인 명령 추종 및 외란 제거를 위한 장벽과 " $B_n(\omega)$ " 영역인 센서 잡음 및 모델링 오차 감소를 위한 장벽을 동시에 침범하지 않아야 좋은 성능 강인성을 확보할 수 있으므로,  $|h(j\omega)|$ 의 루프 형상이 두 장벽을 침범하지 않게 하는 설계 파라미터  $N$ 을 구해야 한다.

그림 1의  $\Omega_r$ 을 장벽  $B_r(\omega)$ 의 경계 주파수라 하고,  $m_r$ 을 장벽의 높이라고 하면,  $h(j\Omega_r)$ 가 장벽  $B_r(\omega)$ 의 위쪽에 있어야 명령 추종 및 외란 제거에 대한 성능을 확보할 수 있으므로 다음 식을 만족해야 한다.

$$|h(j\Omega_r)| \approx \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left| \frac{n_0 \beta - n_2 \beta \Omega_r^2 + j n_1 \beta \Omega_r}{-\alpha_1 \Omega_r^2 + j(\alpha_2 \Omega_r - \Omega_r^3)} \right| > m_r \quad (59)$$

또한,  $\Omega_n$ 를 장벽  $B_n(\omega)$ 의 경계 주파수라 하고  $e_{\max}^{-1}(\omega)$ 를 모델링 오차의 최대값이라 하면, 다음

식과 같이  $\omega \geq \Omega_n$ 의 범위에서  $h(j\omega)$ 가 항상 장벽  $B_n(\omega)$ 의 아래쪽에 있어야 센서 잡음 및 모델링 오차 감소에 대한 성능을 만족시킬 수 있다.

$$|h(j\omega)| < e_{\max}^{-1}(\omega), \quad \omega \geq \Omega_n \quad (60)$$

$h(j\omega)$ 의 고주파 부분의 기울기가  $-20$  dB 이므로,  $e_{\max}^{-1}(\omega)$ 의 기울기가  $-20$  dB 보다 작다는 가정 하에 다음 식은 식(60)을 만족시키는 충분조건이 된다.

$$|h(j\Omega_n)| \approx \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left| \frac{n_0 \beta - n_2 \beta \Omega_n^2 + j n_1 \beta \Omega_n}{-\alpha_1 \Omega_n^2 + j(\alpha_2 \Omega_n - \Omega_n^3)} \right| < e_{\max}^{-1}(\Omega_n) \quad (61)$$

따라서, 설계 파라미터  $n_0$ ,  $n_1$  및  $n_2$ 를 식(59)와 식(61)을 만족하도록 선택하면 만족스런  $|h(j\omega)|$ 의 루프 형상을 얻을 수 있다. 윤과 서<sup>[6]</sup>의 방법에서는  $n_0$ ,  $n_1$  및  $n_2$ 를 선택하기 위한 방법으로 PID 제어기의 두 영점을 플랜트의 최대 극점에 접근 시키는 기법을 제안하였다.

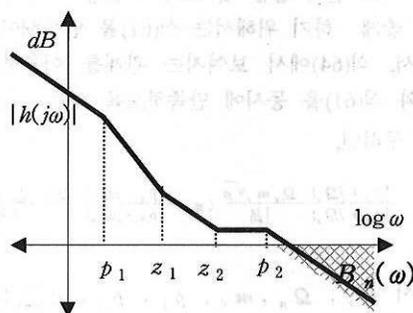


그림 2. 극점과 영점의 위치에 따른  $|h(j\omega)|$ 의 루프 형상

그림 2에서  $p_1$ 과  $p_2$ 를  $|h(j\omega)|$ 의 극점이라 하고  $p_2$ 를 최대 극점,  $z_1$ 과  $z_2$ 를  $|h(j\omega)|$ 의 영점이라 하면 식(58)을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$|h(j\omega)| \approx \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left| \frac{n_2 \beta (s+z_1)(s+z_2)}{s(s+p_1)(s+p_2)} \right| \quad (62)$$

$|h(j\omega)|$ 의 극점인  $p_1$ 과  $p_2$ 가 플랜트 모델에 의하여 주어지기 때문에, 보드선도상의 극점 위치는 주어진 플랜트에 대하여 고정되어 있으나  $|h(j\omega)|$ 의 영점들은 설계 파라미터  $n_0$ ,  $n_1$  및  $n_2$ 의 값에 따라 임의의 위치로 움직일 수 있다. 그리하여  $|h(j\omega)|$ 의 영점들을 이동시켜  $|h(j\omega)|$ 의 만족스런 루프 형상을 얻을 수 있다.

윤과 서<sup>[6]</sup>의 방법에서는  $z_1$ 과  $z_2$ 가 최대 극점인  $p_2$ 에 가까이 접근하게 되면  $|h(j\omega)|$ 의 루프 형상이 센서 잡음 장벽  $B_n(\omega)$ 로부터 최대한 멀어질 수 있음을 보였다 이러한 방법을 적용하면 식(62)를 다음과 같이 표현할 수 있다

$$\lim_{z_1, z_2 \rightarrow p_2} |h(j\omega)| \approx \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left| \frac{n_2 \beta (s^2 + 2p_2 s + p_2^2)}{s(s+p_1)(s+p_2)} \right| \quad (63)$$

식(58)와 식(63)간의 계수 비교를 통해  $n_0$ ,  $n_1$ ,  $n_2$ 간의 상호관계를 표현하면,

$$N = [n_0 \ n_1 \ n_2] = [n_2 p_2^2 \ 2n_2 p_2 \ n_2] \quad (64)$$

이다 여기서  $p_2$ 는 주어진 플랜트에 따라 정해지는 최대 극점이므로 설계 파라미터  $N$ 은 단지 하나의 설계 요소  $n_2$ 에 의하여 구해질 수 있게 된다.

앞서 설명한 바와 같이, 명령 추종 및 외란 제거에 대한 성능이 좋게 하기 위해서는 식(59)를 만족해야 하고 센서 잡음 및 고차 모델링 오차 감소 성능을 좋게 하기 위해서는 식(61)을 만족해야 한다. 따라서, 식(64)에서 보여지는 관계를 이용하여 식(59)와 식(61)을 동시에 만족하도록 하는  $n_2$ 의 영역을 구하면,

$$\frac{|p_1 + j\Omega_r| \cdot \Omega_r m_r \sqrt{\rho}}{|p_2 + j\Omega_r| \cdot |\beta|} < n_2 < \frac{|p_1 + j\Omega_n| \cdot \Omega_n e^{-\max(\Omega_n) \sqrt{\rho}}}{|p_2 + j\Omega_n| \cdot |\beta|} \quad (65)$$

여기서  $\Omega_r$ ,  $\Omega_n$ ,  $m_r$ ,  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $e^{-\max(\omega)}$  및  $\beta$ 는 주어진 플랜트와 설계 사양으로부터 알 수 있는 값이므로  $n_2$ 을 계산할 수 있고, 이에 따라  $|h(j\omega)|$ 가 성능 사양의 두 장벽을 동시에 침범하지 않도록 하게 하는 설계 파라미터  $N$ 을 구할 수 있다.

한편,  $\rho$ 는 본 논문에서 제안하는 설계방법에 큰 영향을 주지 못한다 왜냐하면  $\rho$ 값과  $n_2$ 값이 비례 관계가 있으므로  $\rho$ 값이 작으면 그에 비례하여 작은  $n_2$ 를 선택하면 된다.

본 논문에서 제안하는 설계 방법을 정리하면 다음과 같다

- 1)  $\rho = 1$ 에 대하여 주어진 플랜트와 설계사양으로부터 식(65)를 만족시키는  $n_2$ 를 선택한다
- 2) 식(64)에 의하여 선택된  $n_2$ 로부터 설계파라미터  $N$ 을 구한다.
- 3) 설계파라미터  $\rho$ 와  $N$ 을 이용하여 설계 가중

요소  $Q = N^T N$ 와  $R = \rho I$ 을 구하고, 이를 이용하여 식(10)의 Riccati 방정식으로부터 시간지연이 없는 시스템의 제어 이득  $G$ 를 구한다.

- 4)  $(sI - A_c)^{-1}$ 의 특성다항식의 세근의 종류에 따라 식(25), 식(30), 식(35) 또는 식(41)중에서 하나의 식을 이용하여 상태천이 함수  $e^{A_c t}$ 를 구한다
- 5)  $(sI - A)^{-1}$ 의 특성다항식의 세근의 종류에 따라 식(44), 식(46), 식(50) 또는 식(55)중에서 하나의 식을 이용하여 상태천이 함수  $e^{A t}$ 를 구한다
- 6) 식(14)에 의하여 시간지연이 있는 시스템의 제어이득 행렬  $F(t)$ 를 구한다
- 7) 마지막으로 식(17)과 식(18)로부터 PID제어기의 조정 계수인  $K_p$ ,  $T_i$ , 및  $T_d$ 를 구한다

#### IV 예제 및 고찰

##### 【예제 1】

시간지연  $L = 1.64$ 인 2차 시스템

$$g_p(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} e^{-1.64s}$$

에 대한 설계 사양으로 명령 추종 및 외란 제거를 위한 장벽  $B_r(\omega)$ 와 센서 잡음 및 모델링 오차 감소를 위한 장벽  $B_n(\omega)$ 를 다음과 같이 정의 하자.

$$B_r(\omega) = \begin{cases} 30 \text{ dB} & , \omega \leq 0.01 \\ 0 & , \omega > 0.01 \end{cases}$$

$$B_n(\omega) = \begin{cases} 0 & , \omega \leq 1 \\ 10/\omega & , \omega > 1 \end{cases}$$

설계 절차에 따라,  $\rho = 1$ 일때 설계 파라미터  $N$ 과 시간지연이 없는 시스템의 제어 이득 행렬  $G$ 는

$$N = [1.2321 \quad 1.2321 \quad 0.3080],$$

$$G = [1.2321 \quad 1.6669 \quad 0.5254]$$

과 같다 또한 상태천이 함수  $e^{A_c L}$ 는 다음과 같이 구해질 수 있다

$$e^{A_c L} = \begin{bmatrix} 0.1729 & 0.3831 & 0.2056 \\ 0.2339 & 0.5183 & 0.2782 \\ 0.0737 & 0.1634 & 0.0877 \end{bmatrix}$$

따라서, 시간지연이 있는 시스템의 제어이득 행렬  $F(t)$ 는

$$F = [0.7631 \quad 1.4219 \quad 0.6417]$$

이며 PID제어기의 파라미터는  $K_p=1.4219$ ,  $T_i=1.8633$  및  $T_d=0.4513$ 로 구해진다.

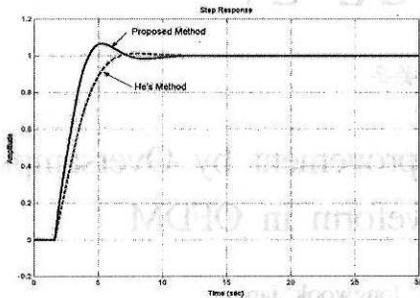


그림 3. 예제에 대한 페루프 스텝응답  
(본 논문의 방법: 실선, He의 방법: 점선)

그림 3에서 보여 지는 바와 같이 본 논문에서 제안하는 방법과 기존 방법의 스텝응답에서 He 방법<sup>[5]</sup>보다 본 논문의 방법이 더 우수함을 알 수 있다.

## V. 결 론

본 논문에서는 윤과 서<sup>[6]</sup>의 방법인 2차 시스템의 PID 동조를 위한 루프 형성 기법을 개선하여 시간 지연이 있는 시스템에 까지 확대 적용할 수 있는 방법을 제안 하였다. 시간 지연이 없는 2차 시스템에서 LQR기법으로 얻어진 제어이득과 지연 시간에 대한 상태전이 행렬을 구하여 이들을 각각 곱함으로써 시간 지연이 있는 2차 시스템에서의 제어이득 행렬을 구할 수 있고 이를 이용하여 요구된 성능을 만족시키는 PID 제어기를 구할 수 있다. 이 방법 역시 플랜트가 2차 시스템인 경우만 적용할 수 있으므로 고차 시스템을 갖는 플랜트의 경우 모델 저차화(model reduction)를 사용하여 2차 시스템으로 근사 시킨 후 사용해야 한다.

## 참 고 문 헌

- [1] G. Sein and J. Doyle, "Robustness with Observers", *IEEE Trans. on Auto. Control*, AC-24, pp. 607-611, 1979.
- [2] J. Doyle, K. Glover and P.P. Khargonekar and B.A. Francis, "State space solutions to standard  $H^2$  and  $H^\infty$  control problems", *IEEE Trans. Auto. Control*, AC-34, pp. 831-847, 1989.
- [3] G. Zames, "Feedback and Optimal

Sensitivity", *IEEE Trans. On Auto. Control*, AC-26, pp.301-320, 1981.

- [4] Y. Shih, "On the weighting factors of the quadratic criterion on optimal control", *J. Control*, Vol.19, No.5, pp.947-955, 1974.
- [5] J. He, Q. Wang and T. Lee, "PI/PID controller tuning via LQR approach", *Chemical Engineering Science* 55, pp. 2429-2439, 2000.
- [6] 윤성오, 서병설, "강인한 최적 PID 제어기 설계를 위한 새로운 루프 형성 기법", *한국통신학회논문지* 28권, 11C호, pp.1062-1069, 2003.

윤 성 오 (Seong-O Yun)

정회원



1991년 2월 : 한양대학교 전자통신공학과 졸업

1994년 2월 : 한양대학교 대학원 전자통신공학과 석사

1994년 2월~현재 : 삼성에스원 기술연구소 선임연구원 및 한양대학교 전자통신공학과

박사과정

<관심분야> 최적제어, 강인제어, LMI

서 병 설 (Byung-Shul Suh)

정회원



한국통신학회논문지 제25권 제 3호 참조

현재 : 한양대학교 전자전기컴퓨터공학부 교수

<관심분야> 제어이론, 강인제어, 최적화 기법