

제로 위상을 갖는 광대역 저역통과 MAXFLAT FIR 필터 설계를 위한 새로운 폐쇄형 전달 함수

정회원 전 준 현*

A New Closed-form Transfer Function for the Design of Wideband Lowpass MAXFLAT FIR filters with Zero Phase

Joonhyeon Jeon* *Regular Member*

요 약

일반적으로 기존의 선형 위상을 갖는 저역통과 MAXFLAT FIR 필터 설계 방법들은 폐쇄형 전달함수의 특성으로 인하여 하프 주파수 대역 ($0 \leq w \leq \pi/2$)에서 이득 응답을 갖는다. 더욱이 주파수 영역에서 MAXFLAT과 선형 위상 특성에 도달하기 위해 추정 알고리즘을 사용하기 때문에 설계 필터들은 저지대역에서의 리플 에러, 완만한 차단감쇠, 위상 및 그룹지연 그리고 부정확한 차단주파수와 같은 문제점들을 가지고 있다. 본 논문에서는 이러한 문제점들을 해결하기 위하여 제로 위상의 광대역 이득 응답을 갖는 MAXFLAT FIR 저역통과 필터 설계를 위한 새로운 수학적 폐쇄형 전달함수를 제안하였다. 더욱이, 제안된 폐쇄형 전달함수는 임의의 차단 주파수를 포함한 MAXFLAT 조건들을 이용하여 새롭게 유도한 일반화한 공식들로 쉽게 실현됨이 증명되었다. 따라서 제안 방식은 간단하고 빠른 설계에 적합하다. 결론적으로 제안된 설계 기술은 제로 위상과 광대역 이득 응답을 갖는 MAXFLAT FIR 저역통과 필터 실현이 가능하며, 설계된 필터들은 모두 250dB 가 넘는 최대 차단 감쇠를 갖는 것을 알 수가 있다.

Key Words : FIR, Nonrecursive Filter, Zero-Phase Filter

ABSTRACT

In general, the earlier linear-phase MAXFLAT(maximally flat) lowpass FIR filters have the main disadvantage of a gain response in the half frequency band $0 \leq w \leq \pi/2$ by the closed form transfer functions used in design techniques for realizing them. Moreover, most of them has existent problems as follows : ripple error in the stopband, gentle-cutoff attenuation, phase and group delay and inexact cutoff frequency response. It is due to the approximation algorithms such as Chebyshev norm and Remez exchange which are used to approach MAXFLAT and linear-phase characteristics in frequency domain. In this paper, a new mathematically closed-form transfer function is introduced for the design of MAXFLAT lowpass FIR filters which have the zero-phase and wideband-gain response. In addition, we verify that the closed-form transfer function is easily realized due to our generalized formulas derived newly by using MAXFLAT conditions including an arbitrary cutoff point. This method is, therefore, useful for "simple and quick designs". Conclusively, we propose a technique for the design of new zero-phase wideband MAXFLAT lowpass FIR filters which can achieve sharp-cutoff attenuation exceeding 250 dB almost everywhere.

※ 본 연구는 동국대학교 논문게재장려금 지원으로 이루어졌음

* 동국대학교 정보산업대학 정보통신공학과 (memory@dgu.edu)

논문번호 : KICS2007-04-161, 접수일자 : 2007년 4월 3일, 최종논문접수일자 : 2007년 6월 26일

I. 서론

디지털 영상과 음성 신호처리 응용 시스템에서 선형 위상(linear phase)을 갖는 FIR(Finite Impulse Response) 필터는 매우 중요하다^[1]. J. H. McClellane 등은 통과대역(passband) 과 저지대역(stopband)에서 동등 리플(equiripple)을 근사 추정하는 FIR 필터 설계 방식을 제안하였으나, 설계된 필터들의 임펄스 응답에서 에코와 급경사(sharp) 차단 주파수 응답에 따른 단위 응답에서의 공명(ringing) 현상이 발생하는 문제점이 있다^[2]. 이러한 문제점들을 해결하는 방법으로 통과대역과 저지대역에서 MAXFLAT(maximally flat)한 진폭 특성을 갖는 저역통과 MAXFLAT FIR 필터가 제안되었다^[2,3]. 최근에는 비선형 저역통과 MAXFLAT FIR 필터 설계에 많은 관심이 있었다. 그러한 설계 기술들의 대부분은 비선형 저역통과 MAXFLAT FIR 필터를 얻기 위하여, MAXFLAT 조건하에서 잘 알려진 라그랑주 보간법(Lagrangian interpolation)^[4,5]과 체비셰프 놈(Chebyshev norm)^[6-9]을 이용하여 ‘진폭과 그룹 지연’ 또는 ‘진폭과 위상’을 추정하는 방식으로 진폭 추정과 그룹지연 선형성 사이에 트레이드오프(tradeoff)를 갖는다. 그럼에도 불구하고 이 방법들은 진폭 응답의 향상과 줄어든 지연을 위한 근화된 선형위상을 얻을 수 있을 뿐이지 완전한 선형 위상은 포기 된다. 최근에 선형위상의 저역통과 MAXFLAT FIR 필터들의 설계를 위하여 폐쇄형 전달함수를 이용한 방법들이 연구되었다^[10-12]. 그들의 대부분은 MAXFLAT ‘진폭’ 응답을 얻기 위하여 비선형 방법들처럼 체비셰프 놈과 레메즈 교환법(Remez exchange)을 이용한 ‘진폭’ 추정 방식을 사용하였다. 그러나 위 방식들은 하프대역 폐쇄형 주파수 함수(half-band closed form frequency function)로 인한 하프주파수대역(half frequency band)에서 이득 응답만을 갖는 치명적인 단점이 있으며, 또한 주파수 영역에서 MAXFLAT에 도달하기 위해 사용하였던 근사 추정으로 인한 부정확한 주파수 응답 오차를 갖는다^{[10]-[14]}. 부정확한 주파수 응답 오차들로서는 차단 주파수에서 완만한 감쇠(gentle-cutoff attenuation), 저지대역에서의 이퀴리플(equiripple), 위상과 그룹 지연 및 차단 주파수의 부정확성 등이 있다. 예를 들면, 또한 Aikawa 등은 하프대역(half-band) 폐쇄형 전달함수를 바탕으로 Remez 추정 알고리즘에 의한 선형 위상의 저역통과 MAXFLAT FIR 필터 설계 방식을 성공적으로 제안하였다. 그러나 구현된 필터

는 하프대역 응답 필터로서 80dB 이하의 완만한 차단 주파수 감쇠와 저지대역에서 이퀴리플을 갖는 단점들이 나타났다^[14].

본 논문에서는 제로 위상(zero phase)과 광대역 저역통과(wideband lowpass) 응답 특성을 갖는 MAXFLAT FIR 필터들을 주파수 영역에서 수학적으로 쉽게 설계할 수 있는 광대역 폐쇄형 전달함수를 제안하였다. 또한 본 논문에서는 제안된 광대역 폐쇄형 전달함수는 차단 주파수 조건을 포함한 MAXFLAT 조건들로부터 유도된 폐쇄형 주파수 공식(closed form frequency formulas)들에 의하여 수학적으로 구현됨이 증명된다. 제안된 방법을 사용하여 구현된 MAXFLAT FIR 저역통과 필터들은 제로 위상과 광대역 게인 응답 특성을 갖을 뿐만 아니라 모두 250dB에 가까운 날카로운 차단주파수 감쇠(sharp-cutoff attenuation) 특성을 갖는 것을 알 수가 있었다.

제II장에서는 본 논문에서 제안한 제로위상을 갖는 광대역 저역통과 MAXFLAT FIR 필터들의 폐쇄형 전달함수를 설명하였으며, 제III장에서는 제로위상을 갖는 광대역 저역통과 MAXFLAT FIR 필터 설계와 구현을 위한 폐쇄형 주파수 공식들에 대해 나타내었다. 제IV장에서는 새로운 필터 설계 기술에 의해 구현된 필터들에 대한 성능을 분석하였으며, 끝으로 제V장에서는 결론을 맺었다.

II. 광대역 저역통과 MAXFLAT FIR 필터의 폐쇄형 전달함수

일반적으로 실수이면서 짝수 차수의 대칭 계수를 갖는 임펄스 응답(impulse response)은 제로 위상을 나타내는 실수형의 대칭인 주파수 응답을 나타낸다. 따라서 N 을 짝수의 필터 차수라고 가정하였을 때, 제로 위상을 갖는 저역통과 FIR 필터의 전달함수는 다음과 같다.

$$H_N(z) = h_{N/2} + \sum_{n=1}^{N/2} h_{N/2-n} (z^n + z^{-n}) \quad (1)$$

여기서 필터 계수 h_n 은 실수이다. 위 식(1)은 $z = e^{j\omega}$ 일 때 진폭응답 $H_N(\omega)$ 와 위상 응답 $\theta_N(\omega)$ 로 나타낼 수가 있으며, $H_N(e^{j\omega}) = H_N(\omega)e^{j\theta_N(\omega)}$ 로 표현된다. 이때 저역통과 FIR 필터가 통과대역과 저지대역에서 MAXFLAT하고 천이 대역(transition band)에서 날카로운 차단주파수 감쇠(sharp-cutoff

attenuation)를 갖기 위해서는 필터의 주파수 응답 $H_N(w)$ 가 다음과 같은 조건들을 만족해야 한다.

$$H_N(w)|_{w=0} = 1 \tag{2a}$$

$$\left. \frac{\partial^n H_N(w)}{\partial w^n} \right|_{w=0} = 0, n = 1, 2, 3, \dots, N - M - 1 \tag{2b}$$

$$\left. \frac{\partial^n H_N(w)}{\partial w^n} \right|_{w=\pm\pi} = 0, n = 0, 1, 2, \dots, M - 1 \tag{2c}$$

$$H_N(w)|_{w=w_c} = 0.70795 \tag{2d}$$

여기서 파라메타 M 은 임의의 양의 상수이며, w_c 는 저역통과 필터의 차단 주파수이다. 위 식에서 $N - M$ 과 M 은 $H_N(w)$ 가 $w = 0$ 와 $w = \pm\pi$ 에서 MAXFLAT을 만족하는 최대 차수(maximum degree)이다. 따라서 본 논문의 MAXFLAT FIR 필터 최적 설계에서는 제로 위상의 광대역 저역통과 응답 특성 외에도 $w = 0$ 와 $w = \pm\pi$ 에서 MAXFLAT와 차단주파수 w_c 에서 날카로운 차단주파수 감쇠를 만족하는 N 과 M 의 값을 구하는 것이 매우 중요하다.

기존의 선형위상을 갖는 저역통과 MAXFLAT FIR 필터의 폐쇄형 전달함수의 경우, 짝수 차수 N 을 갖는 다항식 $H_N(z)$ 은 아래의 식과 같이 $z = -1$ 에서 M 개의 제로를 갖은 인수 함수의 곱으로 나타내 진다.

$$H_N(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^{-1}\right) \cdot H_{N-1}(z) = \dots \tag{3}$$

$$\dots = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^{-1}\right)^M \cdot H_{N-M}(z)$$

여기서 $N - M$ 은 짝수 M 에 대해 짝수 차수를 갖으며, $H_{N-M}(z)$ 은 보정(interpolator)이라고도 한다. 식(3)에서 $H_N(z)$ 은 $z = -1$ 에서 M 개의 제로를 갖기 때문에 $H_{N-M}(z)$ 에 관계 없이 (2c)의 MAXFLAT 조건을 항상 만족함을 알 수 가 있다. 그럼에도 불구하고, 그러한 폐쇄형 전달함수는 하프 주파수대역(half frequency band)인 $0 < w < \pi/2$ 에

서 이득 응답을 갖는 단점이 있다.

전체 주파수대역에서 제로위상과 광대역 이득 응답을 갖는 저역통과 MAXFLAT FIR 필터들을 설계하기 위하여, 우선 짝수 차수 M 에 대하여 $N - M = 2L$ 이라고 가정하자. 그때 광대역 저역통과 및 제로 위상 응답을 갖는 새로운 폐쇄형 전달함수를 표현하면 다음 식과 같다.

$$H_N(z) = P(z) - Q(z) \cdot R(z) \tag{4}$$

여기서 $P(z)$, $Q(z)$ 와 $R(z)$ 는 각각 아래와 같다.

$$P(z) = 1 \tag{5}$$

$$Q(z) = (-1)^{M/2} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^M (z - z^{-1})^M \right\} \tag{6}$$

$$R(z) = \alpha_L + \sum_{n=1}^L \alpha_{L-n} (z^n + z^{-n}) \tag{7}$$

여기서 필터계수 α_n 은 실수이며, $H_N(z)$ 는 $N = M + 2L$ 로 정의된 짝수 차수를 갖는다. 또한 위 식들로부터 샘플 임펄스 응답 δ_n 의 z 변환인 $P(z)$ 과 $Q(z) \cdot R(z)$ 은 완벽한 제로 위상 전달함수들이므로 짝수차수 N 의 $H_N(z)$ 역시 제로 위상을 갖으며, $\pi/2 \leq w_c \leq \pi$ 의 광대역 이득 응답을 나타낼을 알 수가 있다. 식(3)으로부터 $H_N(z)$ 의 주파수 응답은 다음과 같이 표현된다.

$$H_N(w) = P(w) - Q(w) \cdot R(w) \tag{8}$$

여기서 $P(w)$, $Q(w)$ 과 $R(w)$ 는 각각

$$P(w) = 1 \tag{9a}$$

$$Q(w) = \left(\sin \frac{w}{2} \right)^M \tag{9b}$$

$$R(w) = \alpha_L + \sum_{n=1}^L (2 \cdot \alpha_{L-n}) \cdot \cos nw \tag{9c}$$

과 같다. 위 식들로부터 $H_N(w)$ 는 $w = 0$ 일 때의 MAXFLAT 조건인 식(2a)와 식(2b)을 항상 만족함

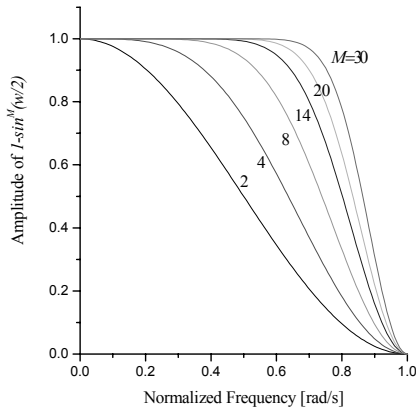


그림 1. 짝수차수 M 에 따른 $1 - (\sin w/2)^M$ 의 주파수 응답을 알 수 가 있는데 이것은 $Q(w)$ 로 인하여 $H_N(w)|_{w=0} = 1$ 와 $\partial^n H_N(w)/\partial w^n |_{w=0} = 0$ 이 되기 때문이다. 더욱이 $H_N(w)$ 이 실수이고 대칭 주파수 응답을 가지므로 $H_N(w)$ 은 정확하게 제로위상 필터임을 알 수가 있다. 또한 $H_N(w)$ 의 임펄스 응답은 역변환에 의해 선형위상 필터로 되므로 제로 위상으로 만들기 위해서는 $N/2$ 샘플만큼 왼쪽이동(left-shifted) 되어야 한다. 식(8)로부터 $Q(w)$ 에 따른 다른 평탄 및 차단주파수 응답을 갖는 필터가 $M/2$ 개 존재함을 알 수가 있다. 이것은 그림1에서 나타난 M 에 따른 $H_N(w)$ 의 진폭 응답을 가지고 쉽게 설명되어 질수가 있다. 그림1에서 $R(w)=1$ (:all-pass response)일 때 $H_N(w)$ 의 평탄성과 대역폭은 M 값에 거의 비례함을 알 수가 있다. 따라서 설계된 저역통과 필터들이 제로위상과 광대역 이득 특성을 갖는 것 외에도 $w=0$ 와 $w=\pm\pi$ 에서 MAXFLAT와 차단주파수 w_c 에서 날카로운 차단주파수 감쇠를 만족하는 M 과 $R(w)$ 계수들에 대한 최적 값들을 구하는 것이 매우 중요하다.

III. 제로위상과 광대역 저역통과 응답특성을 갖는 MAXFLAT FIR 필터 설계

MAXFLAT FIR 필터들이 제로위상과 광대역 이득 특성 외에도 $w=0$ 와 $w=\pm\pi$ 에서 MAXFLAT하고 차단주파수 w_c 에서 날카로운 차단주파수 감

쇠를 갖도록 설계하기 위해서 본 논문에서는 임의의 차단주파수 w_c 을 포함한 MAXFLAT 조건식들을 바탕으로 $Q(w)$ 의 차수인 M 을 구하기 전에 식(8)의 폐쇄형주파수공식으로 부터 $L+1$ 개의 미지 계수들인 $\{\alpha_n | n=0,1,2,\dots,L\}$ 을 주어진 L 과 w_c 에 대해 M 에 관한 일반 다항식들로 나타내었다. 마지막으로, 최적 M 과 $\{\alpha_n | n=0,1,2,\dots,L\}$ 의 값들은 앞서 구한 일반해들을 통하여 수학적으로 그리고 효율적으로 얻어진다.

우선, 식(8)을 $w=\pm\pi$ 의 MAXFLAT 조건식들인 식(2c)와 식(2d)에 대입하면, $\{\alpha_n | n=0,1,2,\dots,L\}$ 의 일반해들을 얻기 위한 L 개의 연립방정식들은 아래의 공식들로부터 유도된다.

$$H_N(w)|_{w=\pm\pi} = 0: \alpha_L + 2 \sum_{n=1}^L (-1)^n \cdot \alpha_{L-n} = 1 \quad (10)$$

$$\frac{\partial^n H_N(w)}{\partial w^n} \Big|_{w=\pm\pi} = 0: \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \frac{\partial^{n-r} Q(w)}{\partial w^{n-r}} \cdot \frac{\partial^r R(w)}{\partial w^r} \Big|_{w=\pm\pi} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots, 2L-1 \quad (11)$$

여기서 $Q(w)$ 과 $R(w)$ 의 $w=\pm\pi$ 일 때 미분 계수들은 각각 다음과 같으며,

$$\frac{\partial^k Q(w)}{\partial w^k} \Big|_{w=\pm\pi} = \begin{cases} 0, & k = 1, 3, 5, \dots \\ \frac{1}{2^M} \sum_{l=0}^M \binom{M}{l} \cdot \frac{(M-2l)^k}{2^k}, & k = 2, 4, 8, \dots, M \text{ even} \end{cases} \quad (12a)$$

$$\frac{\partial^k R(w)}{\partial w^k} \Big|_{w=\pm\pi} = \begin{cases} 0, & k = 1, 3, 5, \dots \\ 2 \sum_{l=1}^L (-1)^{l+k/2} \cdot l^k \cdot \alpha_{L-l}, & k = 2, 4, 8, \dots \end{cases} \quad (12b)$$

$$\partial^0 Q(w)/\partial w^0 |_{w=\pm\pi} = 1 \text{ 과 } \partial^0 R(w)/\partial w^0 |_{w=\pm\pi} = 1$$

이고, 또한 () 는 아래와 같다.

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \quad (12c)$$

위 식으로부터 $L + 1$ 개의 미지계수(unknown coefficients)인 $\{\alpha_n | n=0,1,2,\dots,L\}$ 을 갖는 L 개의 연립 방정식을 유도할 수가 있으며, 그 결과 $\{\alpha_n | n=1,2,\dots,L\}$ 로 표현되는 L 개의 미지계수들은 파라메타 M 과 α_0 만으로 아래의 식과 같이 새로운 일반해들로 정의할 수가 있다.

$$\alpha_n = \begin{cases} 2L \cdot \alpha_0 + f_M(L-1), & n=1 \\ (n-1) \cdot L(2L-1) \cdot \alpha_0 + f_M(L-n), & n=2,3,\dots,L-1 \\ 1 + 2(-1)^L (2L-1) \{1 + L \sum_{n=2}^{L-1} (-1)^{n-1} (n-1)\} \cdot \alpha_0 \\ \quad - 2 \sum_{n=1}^{L-1} (-1)^{L+n} f_M(L-n), & n=L \end{cases}$$

for $L \geq 2$ (13a)

$$\alpha_L |_{L=1} = 1 + 2\alpha_0 \quad \text{for } L = 1 \quad (13b)$$

여기서 $f_M(n)$ 은 MAXFLAT 상수로 다음과 같다.

$$f_M(k) = \sum_{l=k}^{L-1} \frac{1}{2^{2l}} \binom{M/2-1+l}{l} \binom{2l}{l-k} \quad (13c)$$

식(13)은 알려진 L 에 대하여 만약 α_0 와 M 이 주어진다면, L 개 미지계수인 $\{\alpha_n | n=1,2,\dots,L\}$ 는 쉽게 구할 수가 있다는 것을 보여준다. 여기서 α_0 의 일반해는 요구된 임의의 차단주파수를 갖은 필터 설계에 필요한 식(2d)의 차단주파수조건에 의해 구해진다. 식(13)을 식(2d)에 대입하면, α_0 가 M , L 과 w_c 로 표현되는 일반해는 다음과 같다.

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\lambda_L} \left\{ 0.29205 \left(\sin \frac{w_c}{2} \right)^{-M} + 2 \sum_{n=1}^{L-1} f_M(L-n) \{ (-1)^{L+n} - \cos(L-n)w_c \} - 1 \right\}$$

for $L \geq 2$ (14a)

$$\alpha_0 = \frac{1}{2(1 + \cos w_c)} \cdot \left(0.29205 \cdot \left(\sin \frac{w_c}{2} \right)^{-M} - 1 \right)$$

for $L = 1$ (14b)

여기서 λ_L 은

$$\lambda_L = (-1)^{L+1} + \cos Lw_c + 2L\{\cos(L-1)w_c + (-1)^L\} + L(2L-1) \sum_{n=2}^{L-1} \{(-1)^{L-n+1} + \cos(L-n)w_c\}(n-1) \quad (14c)$$

위의 식(13)의 결과 식으로부터 L 개의 미지계수인 $\{\alpha_n | n=1,2,\dots,L\}$ 는 파라메타 M 과 α_0 의 관계식으로 정의 할 수가 있으며, 과 식(14)로부터 α_0 는 파라메타 M 과 주어진 차단 주파수 w_c 의 관계식으로 표현되므로 결국 $L + 1$ 개의 미지계수들인 $\{\alpha_n | n=0,1,2,\dots,L\}$ 는 주어진 L 과 w_c 에 대하여 모두 파라메타 M 의 관계식으로 정의됨이 수학적으로 증명이 된다. 이러한 이유로 만약 파라메타 M 이 잘못 결정된다면 α_0 가 잘못 결정되고 결국 잘못된 $\{\alpha_n | n=1,2,\dots,L\}$ 을 얻게되어, 결과 필터의 통과대역에서의 오버슈트(overshoot) 또는 저지대역에서의 리플(ripple)이 발생하는 중요한 원인이 된다. 예로서 그림 2는 $L=2$ 과 $w_c = 7\pi/12$ 이 주어질 때 파라메타 M 에 의해 결정된 α_0 에 따른 진폭 응답 $H_N(w)$ 들을 나타낸 것으로 주어진 L 과 w_c 에 대하여 MAXFLAT을 갖는 최적 차수 M 에 따른 최적의 α_0 값을 결정하는 것이 중요하다는 것을 보여준 예이다. 따라서 임의로 요구된 차단주파수를 갖는 제로 위상의 광대역 저역통과 FIR 필터가 MAXFLAT 특성을 만족하는 최대 차수 $N = M + 2L$ 또는 M 을 갖기 위해서는 최적 파라메타 M 을 포함한 α_0 의 최적 값을 α_0 의 다이내믹 범위(dynamic range)내에서 구해야 한다.

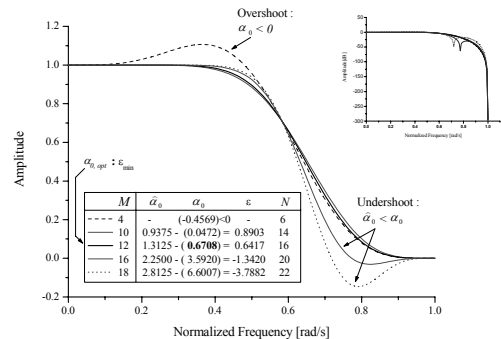


그림 2. $L = 2$ 과 $w_c = 7\pi/12$ 이 주어질 때, M 에 의한 α_0 에 따른 진폭응답 $H_N(w)$

식(13)과 (14)에서 주어진 $\{\alpha_n | n=0,1,2,\dots,L\}$ 의 다이나믹 범위(dynamic range)의 최대 한계치를 $\{\tilde{\alpha}_n | n=0,1,2,\dots,L\}$ 라고 가정하자. 이때 $\{\tilde{\alpha}_n | n=0,1,2,\dots,L\}$ 은 폐쇄형주파수함수인 식(8)을 $w = \pm\pi$ 일때 MAXFLAT 조건인 식(2c)와 식(2d)에 대입한 미분방정식인 식(10)과 식(11), 그리고 헤르미트 보간식(Hermite interpolation)에 의해 쉽게 구할 수가 있다 [3, 10]. 따라서 $\{\tilde{\alpha}_n | n=0,1,2,\dots,L\}$ 로 설계된 필터는 임의의 차단주파수가 아닌 주어진 M 과 L 파라메타에 의해 확정된 차단주파수를 갖게 된다. 이것이 잘 알려진 헤르미트 보간 문제이다³⁾. 이때 필터는 주어진 L 에 대해 MAXFLAT을 갖는 최적차수 M 에 의해 결정된 차단주파수에서 최대차수 $N = M + 2L$ 을 갖는 MAXFLAT FIR 필터가 되며, 필터 계수 $\{\tilde{\alpha}_n | n=0,1,2,\dots,L\}$ 는 임의의 차단주파수 조건을 갖도록 설계된 $\{\alpha_n | n=0,1,2,\dots,L\}$ 계수들의 최대 한계치가 된다. 이때 앞에서 논의된 바와 같이 $\{\tilde{\alpha}_n | n=1,2,\dots,L\}$ 과 $\{\alpha_n | n=1,2,\dots,L\}$ 은 각각 $\tilde{\alpha}_0$ 와 α_0 으로 표현할 수 있으므로 α_0 의 최대 한계치 $\tilde{\alpha}_0$ 만으로 모든 계수의 최대한계치를 정의할 수가 있으며 다이나믹 범위(dynamic range)를 얻을 수가 있다. 짝수차수 M 에 대한 α_0 의 최대한계치 $\tilde{\alpha}_0$ 는 식(10)과 식(11)의 미분 방정식들로부터 다음과 같다.

$$\tilde{\alpha}_0 = \frac{1}{2^{2L}} \cdot \binom{M/2 + L - 1}{L} \quad (15)$$

여기서 식(15)는 $\alpha_0 \leq \tilde{\alpha}_0$ 에 대해 $\{\alpha_n \leq \tilde{\alpha}_n | n=1,2,\dots,L\}$ 을 만족하며, α_0 의 다이나믹 범위는 짝수차수 M 에 대하여 $\tilde{\alpha}_0 > 0$ 이므로 $0 \leq \alpha_0 \leq \tilde{\alpha}_0$ 을 갖는다. 그러므로 $\alpha_{0,opt}$ 를 α_0 의 최적 값이라 하고 M_{opt} 을 $\alpha_{0,opt}$ 을 위한 최적차수라고 가정하면, $\alpha_{0,opt}$ 도 $0 \leq \alpha_{0,opt} \leq \tilde{\alpha}_0$ 의 범위를 갖는다. $\alpha_{0,opt}$ 을 얻기 위하여 다음과 같이 새로운 오차함수(difference error function)를 정의하자.

$$\varepsilon = \tilde{\alpha}_0 - \alpha_0 \geq 0 \quad (18)$$

여기서 ε 는 양의 값을 갖으며, $\alpha_{0,opt}$ 을 결정한다. 주어진 식(16)의 ε 는 주어진 L 과 w_c 에 대하여

M 의 함수로 표현됨을 식(13)과 식(15)으로부터 알 수가 있다. 식(16)을 사용하였을 때, 만약 ε 가 최소 값($\varepsilon_{min} = \tilde{\alpha}_0 - \alpha_{0,opt}$)을 갖는다면, 그 때 해당하는 α_0 는 $\alpha_{0,opt}$ 이 된다. 그 때 MAXFLAT을 갖는 최적 차수 M_{opt} 은 $\alpha_{0,opt}$ 에 존재하는 M 이 되며, 결과 필터의 최대차수는 $N = M_{opt} + 2L$ 이 된다. 결론적으로 $\alpha_{0,opt}$ 와 $N = M_{opt} + 2L$ 을 이용, 식(13)으로부터 최적필터 계수들을 구함으로써, 전체 주파수대역에서 제로위상의 광대역 이득 응답을 갖는 저역통과 MAXFLAT FIR 필터들을 설계할 수가 있음이 증명된다. 예를 들어 제로위상의 광대역 이득 응답을 갖는 저역통과 MAXFLAT FIR 필터 설계 규격이 $L = 2$ 과 $w_c = 7\pi/12$ 로 주어질 때, 제안된 필터 설계 방식에 따라 $\alpha_{0,opt} = 0.67078$, $M_{opt} = 12$ 과 $N = 16$ 이 얻어지며, 해당 필터인 $H_{16}(z)$ 의 주파수 응답은 그림2의 실선에 해당된다. 그림 3은 식(14)와 식(15)를 사용하였을 때 주어진 L 과 w_c 가 주어질 때 M 에 따른 α_0 , $\tilde{\alpha}_0$ 과 $\alpha_{0,opt}$ 의 자취를 그래프로 나타낸 것이다. 이 그림에서 주어진 w_c 에 대해 단 한 개의 $\alpha_{0,opt}$ 이 존재함을 알 수가 있으며, $\alpha_{0,opt}$ 의 값은 광대역 저역통과 차단주파수 크기에 비례함을 알 수가 있다. 마지막으로 제안된 방식에 따른 필터 설계 과정을 단계적으로 요약하면 아래와 같다.

- ① 식(14)로부터 주어진 L 과 w_c 에 대하여 α_0 를 구한다.
- ② 식(15)로부터 $\tilde{\alpha}_0$ 을 구한다.

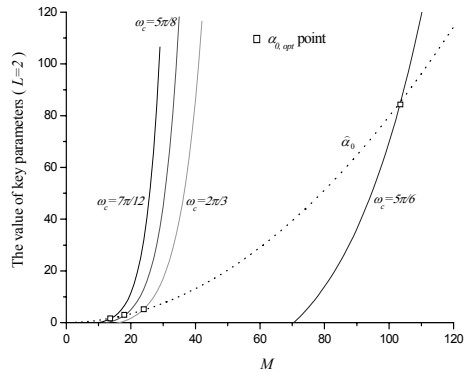


그림 3. 주어진 w_c 에 대한 $\alpha_{0,opt}$ 값 ($L = 2$)

- ③ 식(16)으로 부터 ϵ_{\min} 되는 $\alpha_{0,opt}$ 를 구한다.
 - ④ $\alpha_{0,opt}$ 에 있는 M_{opt} 을 구한다.
 - ⑤ 식(13)으로 부터 $\{\alpha_{n,opt} | n=1,2,\dots,L\}$ 을 구한다.
- 여기서 $\{\alpha_{n,opt} | n=0,1,2,\dots,L\}$ 는 $\alpha_{0,opt}$ 에 의해 구해진 최적 필터 계수이다.

IV. 필터 설계

본 절에서는 제안된 설계 방식을 바탕으로 제로 위상의 광대역 이득 응답을 갖는 저역통과 MAXFLAT FIR 필터를 구현하여 설계의 타당성을 입증하고자 한다.

[설계 1]

MAXFLAT FIR 필터 설계 규격이 $L=1$ 과 $w_c = 7\pi/12, 5\pi/8, 2\pi/3, 5\pi/6$ [rad/s]로 주어질 때, $L=1$ 을 갖는 폐쇄형 전달함수는 광대역폭을 갖는 저역통과 필터 설계에서는 매우 적합하다. 필터는 매우 간단하며 설계 또한 빠르게 할 수가 있다. 주어진 조건인 $L=1$ 일 때 $R(w)$ 는 차수가 2인 짝수일 때 식(9c)로부터

$$R(w) = \alpha_1 + 2 \cdot \alpha_0 \cos w \quad (17)$$

표 1은 주어진 $L=1$ 와 w_c 에 따라 설계된 제로 위상의 광대역 저역통과 MAXFLAT FIR 필터들의 파라미터들을 구한 것이다. 예를 들어 $w_c = 5\pi/8$ 일 때, $\alpha_{0,opt} = 1.35662$, $M_{opt} = 12$ and $N = 14$ 이 구해지며, 최종 필터 $H_{14}(w)$ 는 다음과 같이 얻어진다.

$$H_{14}(w) = 1 - \left(\sin \frac{w}{2}\right)^{12} \cdot (3.71324 + 2.71324 \cdot \cos w) \quad (18)$$

표 1. 설계예제1에 대한 규격과 최적 파라미터 값

Specifications	Cutoff point w_c			
	$7\pi/12$	$5\pi/8$	$2\pi/3$	$5\pi/6$
Maximum degree N	10	14	18	72
Optimal degree M_{opt}	8	12	16	70
Maximum limit $\tilde{\alpha}_0$	1	1.5	2.0	8.75
Key parameter $\alpha_{0,opt}$	0.5808	1.35662	1.9173	8.60961
Filter coeff. $\alpha_{1,opt}$	2.1616	3.71324	4.8346	18.21922

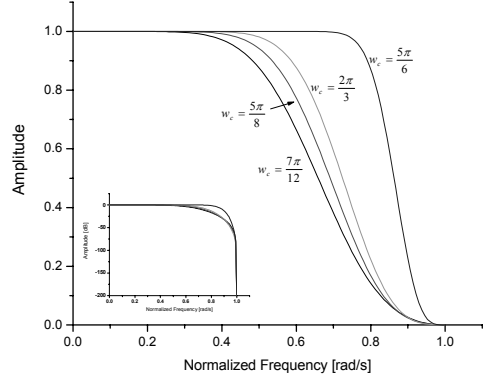


그림 4. $L=1$ 일 때 w_c 에 따른 진폭응답 $H_N(w)$

그림 4는 표 1의 최적 파라미터 값들에 의한 필터 진폭 응답 $H_N(w)$ 을 나타낸 것이다. 표와 그림에서 나타낸 바와 같이 설계된 제로 위상의 광대역 이득 응답을 갖는 저역통과 MAXFLAT FIR 필터들은 통과대역과 저지대역에서 MAXFLAT 특성과 천이대역에서 250dB 이상의 가파른 차단주파수 감쇠 특성을 갖고 있음이 증명되었다.

[설계 2]

MAXFLAT FIR 필터 설계 규격이 $L=2$ and $w_c = 7\pi/12, 5\pi/8, 2\pi/3, 5\pi/6$ [rad/s]로 주어질 때, 위에서 언급한 바와 같이 주어진 $L=2$ 에 따른 $R(w)$ 는 차수가 4인 짝수 경우 다음과 같다.

$$R(w) = \alpha_2 + 2 \cdot \alpha_1 \cos w + 2 \cdot \alpha_0 \cos 2w \quad (19)$$

표 1은 주어진 $L=2$ 와 w_c 에 따라 설계된 제로 위상의 광대역 저역통과 MAXFLAT FIR 필터들의 최적 파라미터들을 구한 것이다. 예를 들어 $w_c = 5\pi/8$ 일 때 $\alpha_{0,opt} = 1.3956$, $M_{opt} = 16$ 그리고 $N = 20$ 이 구해졌으며, 구해진 최종 필터 $H_{20}(w)$ 는 다음과 같다.

$$H_{20}(w) = 1 - \left(\sin \frac{w}{2}\right)^{16} \cdot (13.3738 + 15.1650 \cos w + 2.7913 \cos 2w) \quad (20)$$

그림 5는 표 2의 최적 파라미터 값들에 의한 필터 진폭 응답 $H_N(w)$ 을 나타낸 것이다. 표 2에서 차

단주파수 w_c 가 증가 할수록 $\alpha_{0,opt}$ 와 해당되는 최대한계치 $\tilde{\alpha}_0$ 도 증가하는 것을 알 수가 있다. 표와 그림에서 나타낸 바와 같이 $L=2$ 일 때 설계된 제로위상의 광대역 이득 응답을 갖는 저역통과 MAXFLAT FIR 필터들은 앞서 언급한 $L=1$ 일 때와 마찬가지로 통과대역과 저지대역에서 MAXFLAT 특성과 천이대역에서 250dB 이상의 가파른 차단주파수 감쇠 특성을 나타내고 있음이 증명되었다. 그림 4와 그림 5를 비교해 보면 동일한 차단 주파수를 가질 때 진폭 응답을 비교해 보면 $L=2$ 일 때 $H_N(w)$ 의 진폭은 응답이 $L=1$ 일 때 보다 더 나은 MAXFLAT 와 가파른 차단주파수 감쇠 특성을 갖는 다는 것을 알 수가 있다.

표 2. 설계예제2에 대한 규격과 최적 파라미터 값

Specifications	Cutoff point w_c			
	$7\pi/12$	$5\pi/8$	$2\pi/3$	$5\pi/6$
Maximum degree N	16	20	26	106
Optimal degree M_{opt}	12	16	22	102
Maximum limit $\tilde{\alpha}_0$	1.3125	2.25	4.125	82.875
Key parameter $\alpha_{0,opt}$	0.67078	1.3956	3.1651	78.166
Filter coeff. $\alpha_{1,opt}$	4.1831	7.5825	15.4105	325.414
Filter coeff. $\alpha_{2,opt}$	8.0247	13.3738	25.4907	495.496

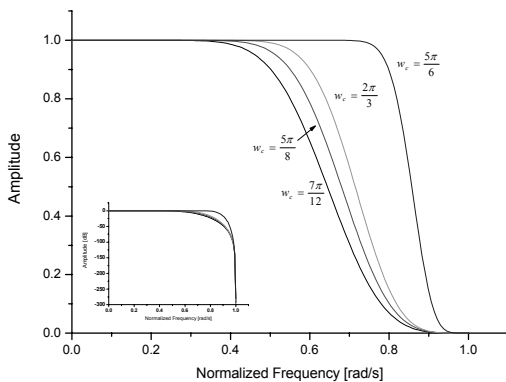


그림 5. $L=2$ 일 때 w_c 에 따른 진폭응답 $H_N(w)$

V. 결론

일반적으로 기존의 선형 위상을 갖는 MAXFLAT FIR 필터 설계 방법들은 폐쇄형 전달함수의 특성으로 인하여 하프 주파수 대역 ($0 \leq w \leq \pi/2$)에서 이

득 응답을 갖는다는 것이 잘 알려진 사실이다^{[10]-[14]}. 더욱이 주파수 영역에서 MAXFLAT과 선형 위상 특성에 도달하기 위해 그들의 대부분은 MAXFLAT ‘진폭’ 응답을 얻기 위하여 비선형 방법들처럼 체비셰프 놈과 레메즈 교환법(Remez exchange)을 이용한 ‘진폭’ 추정 방식을 사용하였다^[10,13,14]. 그 결과 설계 필터들은 저지대역에서의 리플 에러, 완전한 차단감쇠, 위상 및 그룹지연 그리고 부정확한 차단 주파수와 같은 문제점들이 나타났다.

본 논문에서는 제로 위상과 광대역 이득 응답을 갖는 MAXFLAT FIR 저역통과 필터 설계를 위한 새로운 수학적인 폐쇄형 전달함수를 새롭게 제안하였으며, 제안된 제로 위상의 광대역 폐쇄형 전달함수는 폐쇄형 주파수함수를 통하여 임의의 차단 주파수 파라미터를 포함한 MAXFLAT 조건들로 부터 새롭게 유도한 일반화한 필터 계수 공식들로 쉽게 실현됨이 증명되었다. 결론적으로 제안된 설계 기술은 제로 위상과 광대역 이득 응답을 갖는 MAXFLAT FIR 저역통과 필터 실현이 가능하며, 설계된 필터들은 모두 250dB 가 넘는 최대 차단 감쇠를 갖는 것을 알 수가 있었다.

참고 문헌

- [1] Joonhyeon Jeon and Jaekyoon Kim, “New linear phase QMF filter design for sub-band coding,” *Electronics letters*, 27(4) pp.319-320, 1991.
- [2] T. W. Parks, and J. H. McClellan, “Chebyshev approximation for nonrecursive digital filters with linear phase,” *IEEE Trans Circuit Theory*, 19(2) pp.189-194.1972.
- [3] O. Hemmann. “On the approximation problem in nonrecursive digital filter design.” *IEEE Trans Circuit Theory* 18 pp.411-413. 1971
- [4] I. W. Selesnick and S. Burrus, “Maximally flat low-pass FIR filters with reduced delay,” *IEEE Trans. Circuits Syst. II*, 45, pp.53-68, 1998.
- [5] T. I. Laakso, V. V`alim`aki, M. Karjalainen, and U. K. Laine, “Splitting the unit delay,” *IEEE Signal Process. Mag*, 13, pp.30-60, 1996.
- [6] D. Burnside and T. W. Parks, “Optimal design of FIR filters with the complex

- chebyshev error criteria,” *IEEE Trans. Signal Process*, 43 pp.605–616, 1995
- [7] G. Calvagno, G. M. Cortelazzo, and G. A. Mian, “A technique for multiple criterion approximation of FIR filters in magnitude and group delay,” *IEEE Trans. Signal Process*, 43, pp.393–400, 1995.
- [8] L. J. Karam and J. H. McClellan, “Complex chebyshev approximation for FIR filter design,” *IEEE Trans. Circuits Syst. II*, 42, pp.207–216, 1995.
- [9] J. L. Sullivan and J. W. Adams, “A new nonlinear optimization algorithm for asymmetric FIR digital filters,” in *Proc. IEEE Int. Symp. Circuits Syst. (ISCAS)*, 2, pp.541–544, 1994.
- [10] P. P. Vaidyanathan, “Efficient and multiplierless design of FIR filters with very sharp cutoff via maximally flat building blocks,” *IEEE Trans. Circuits and Syst., CAS-32*, pp.236–244, 1985.
- [11] I. W. Selesnick and C. Sidney Bums, “Maximally flat low-pass FIR filters with reduced delay,” *IEEE Trans. Circuits and Systems II* 45, pp.53–68, 1998.
- [12] S. Samadi, A. Nishihara and H. Iwakura. “Universal maximally flat low-pass FIR systems,” *IEEE Trans. Signal Processing* 21, pp.1956–1964, 2000.
- [13] S. Samadi, A. Nishihara and H. Iwakura, “Generalized half-band maximally flat filters,” *ISCA '99* 3, pp.III-279–82, 1999
- [14] N. Aikawa and M. Sato. “A design method of low delay lowpass FIR digital filters with maximally flat characteristics in the passband and the transition zero in the stopband,” *ISCAS'02*, 1, pp.I-405 –08, 2002

전 준 현 (Joonhyeon Jeon)

정회원



1984년 동국대학교 전자공학과
학사

1986년 한국과학기술원 전기 및
전자 공학석사

1991년 한국과학기술원 전기 및
전자 공학박사

1991년~1999년 한국통신 인터넷

연구실장 및 사업부장

2000년~2001년 한누리투자증권 리서치팀 이사

2000년~2001년 드림라인 전무

2001년~2007년 현재 동국대학교 정보통신공학과 조교수

<관심분야> 영상통신, 영상압축, 신호처리 등