

## 정규화된 D-QR-RLS 알고리즘의 특성 분석(II)

정희원 안 봉 만\*, 황 지원\*\*, 조 주 필\*\*\*°

### Characteristic Analysis of Normalized D-QR-RLS Algorithm (II)

Bong-Man Ahn\*, JeeWon Hwang\*\*, Juphil Cho\*\*\*° *Regular Members*

#### 요 약

제안된 알고리즘은 QR 형태의 LMS 알고리즘이 입력의 분산에 비례하게 되어있어 입력의 분산을 평균적인 측면에서 입력의 분산을 정규화하는 알고리즘중 하나이다. 본 논문에는 정규화 알고리즘의 수렴 특성 분석이 되어있다. 제안한 알고리즘의 성능분석을 위하여 간단한 FIR 시스템의 시스템 식별을 수행하였다. 이때 성능 비교에 참여한 알고리즘은 LMS, NLMS(normalized least mean square) 알고리즘이다. 그 결과 제안한 알고리즘은 NLMS 알고리즘과 매우 유사한 성능을 가짐을 확인하였다.

**Key words** : Adaptive filtering, Givens Rotation, QR decomposition, Normalized Algorithm

#### ABSTRACT

This paper proposes one of normalized QR-typed LMS (Least Mean Square) algorithms with computational complexity of  $O(N)$ . This proposed algorithm shows the normalized property in terms of theoretical characteristics. This proposed algorithm is one of algorithms which normalize variance of input signal in terms of mean because QR-typed LMS is proportional to variance of input signal. In this paper, convergence characteristic analysis of normalized algorithm was made. Computer simulation was made by the algorithms used for echo canceller. Proposed algorithm has similar performance to theoretical value. And, we can see that proposed method shows similar one to performance of NLMS by comparison among different algorithms.

#### I. 서 론

계산량 때문에 주로 LMS 계열의 알고리즘이 많이 사용되어왔다. 그러나 LMS(least mean square) 계열의 알고리즘은 LS(least square) 계열 알고리즘에 비하면 그 계산 결과 및 추적 능력 등에서 성능이 좋지 못하다. LMS 계열의 알고리즘의 단점을 극복하려는 노력들이 많은 연구자들에 의하여 진행되어왔다. 이 방법들은 대부분 적응상수를 적절히 조절하여 수렴특성과 추적능력을 극대화 시키려는 연구이다<sup>1-3)</sup>. 이와 같은 방법들은 실제적으로 계산량이 증가하게 된다. 이러한 알고리즘 중 대표적인 알고

리즘은 정규화된 LMS 알고리즘이다. NLMS 알고리즘 이용할 때 결정해야 될 파라미터가 있어 이것을 적응적으로 변하게 하는 알고리즘들이 개발되어왔다<sup>1-4)</sup>. 이중 참고문헌[2]는 NLMS 알고리즘에 대한 모든 파라미터를 적응적으로 구하도록 되어있지만 적응 필터를 동작시킬 때 새로운 파라미터가 필요하다. 또한 반향 제거기 및 ANC(active noise controller)등에서 NLMS 알고리즘이 주로 사용되지만 수렴 속도가 늦은 단점이 있다. 이에 수렴 속도를 향상시킨 affine projection 알고리즘이 제안되었지만 projection 차수가 커질 경우 RLS 와 비슷한 연산량을 가지게 되는 문제점이 있다. 이에 참고문

※ 본 연구는 한국과학재단 특장기초연구(No. R01-2006-000-11183-0(2007)) 지원으로 수행되었음.

\* 전북대학교 Next 사업단, \*\* 익산대학 컴퓨터학과, \*\*\* 군산대학교 전자정보공학부 (stefano@kunsan.ac.kr) (° : 교신저자)  
논문번호 : KICS2007-02-068, 접수일자 : 2007년 2월 12일, 최종논문접수일자 : 2007년 9월 1일

현[5-7]에서 수치 해석적인 기법인 Gauss-Seidel 방법을 이용한 알고리즘이 개발되어 사용되고 있다. Gauss-Seidel 방법을 적용한 알고리즘은 새로운 base를 순방향 예측오차 벡터로 정의하고 순방향 예측오차 필터의 계수를 구하는 데 Gauss-Seidel 방법을 사용하여 구한다<sup>[7]</sup>. 일반적인 QR 변환을 이용한 LS 알고리즘 형태는 일반적 데이터 행렬에 유니타리(unitary) 행렬 Q를 앞에서 곱하면 그 결과로 행렬 R을 얻게 된다<sup>[12]</sup>. 위의 과정에서 계산량을 줄일 수 있는 요소가 있으며 그 과정은 참고문헌 [8-11]에서 연구되었다. 이 연구에서 Givens 회전의 cosine 파라미터와 sine 파라미터를 상 삼각행렬  $R(n)$ 과  $R(n-1)$ 의 주대각 요소와 입력벡터로만 얻을 수 있는 관계식이 연구되어 있다. 참고문헌[8-11]의 가정에서 해결해야 될 사항으로는 첫 번째로 반복시간  $n$ 와  $n-1$ 의  $R(n)$ 과  $R(n-1)$ 의 행렬의 구조가 다른 것이고 두 번째로는 입력벡터의 요소들을 모두 적절한 Givens 회전이 되었다는 보장이 어렵다는 것과 세 번째로  $r_{ij}(n)$ 을 제외하고 back substitution을 통하여 얻은 계수벡터가 정확한가 하는 점이다.  $r_{ij}(n)$ 은 상삼각행렬  $R(n)$ 의 대각 요소가 아닌 요소들이다. 본 논문에서는 참고문헌[8-11]에서의 가정을 사용하였다. 그러므로 위의 첫 번째와 두 번째의 사항에 대하여는 논의에서 제외하였다. 마지막 사항을 개선하는 알고리즘을 제안하였다. 이와 같이 유도된 알고리즘은 계수 순환식이 LMS 형태를 취하고 있다. 제안한 알고리즘의 수렴특성 해석 결과 제안한 LMS 형태의 알고리즘은 입력의 분산에 관계되기 때문에 이를 정규화 하는 알고리즘을 제안한다. 제안한 알고리즘의 계산량은  $O(M)$ 이다. 이것에 대한 논의는 II장에서 하였다. III장에서는 정규화된 QR 형태 LMS 알고리즘의 수렴특성에 대하여 고찰하였다. 그리고 IV장에서 컴퓨터 모의 실험을 수행하였고 V장에서 결론 및 고찰을 기술하였다.

## II. QR 형태의 LMS 알고리즘 및 NLMS 알고리즘

QR-RLS(recursive least square) 알고리즘은 다음 식으로 표현된다.

$$Q(n) \begin{bmatrix} \lambda^{1/2} \mathbf{R}(n-1) & | & \lambda^{1/2} \mathbf{p}(n-1) \\ \mathbf{x}_M^H(n) & | & d(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(n) & | & \mathbf{p}(n) \\ \mathbf{0} & | & e(n) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

위 식(2.1)의 과정은 다음과 같이 각 행렬의 요소로 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} c_i & s_i \\ -s_i^* & c_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \cdots 0 & \sqrt{\lambda} r_{ii}(n-1) & \sqrt{\lambda} r_{i,i+1}(n-1) \cdots \sqrt{\lambda} r_{i,M}(n-1) & \sqrt{\lambda} p_i(n-1) \\ 0 \cdots 0 & x_{i+1}^{(i)}(n) & \cdots & x_M^{(i)}(n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 \cdots 0 & r_{ii}(n) & r_{i,i+1}(n) \cdots r_{i,M}(n) & p_i(n) \\ 0 \cdots 0 & 0 & x_{i+1}^{(i+1)}(n) \cdots x_M^{(i+1)}(n) & e^{(i+1)}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdots 0 & r_{ii}(n) & r_{i,i+1}(n) \cdots r_{i,M}(n) & p_i(n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 \cdots 0 & 0 & x_{i+1}^{(i+1)}(n) \cdots x_M^{(i+1)}(n) & e^{(i+1)}(n) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

식(2.2)는  $x_i^{(i)}(n)$ 을 제거하기 위한 구조이다.  $x_i^{(i)}(n)$ 는  $x_{(n-i+1)}$ 을 ( $i$ )번 Givens 회전시킨 것을 나타낸다.  $p_i(n)$ 은 오차  $e^{(i+1)}(n)$ 과 같이 회전되는 변수이다.

Givens 회전 파라미터  $c_i, s_i$ 는 입력  $x_i^{(i)}(n)$ 을 제거하기 위한 cosine과 sine을 의미한다.  $r_{ii}(n)$ 는 상삼각행렬  $R(n)$ 의 주대각 요소이다. 이것들은 식(2.2)에서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$r_{ii}(n) = c_i \sqrt{\lambda} r_{ii}(n-1) + s_i x_i^{(i)}(n) \quad (2.3)$$

$$0 = -s_i \sqrt{\lambda} r_{ii}(n-1) + c_i x_i^{(i)}(n) \quad (2.4)$$

보조식으로  $c_i$ 와  $s_i$ 는 다음 식을 만족해야 한다.

$$c_i^2 + s_i^2 = 1 \quad (2.5)$$

식(2.3), 식(2.4) 및 식(2.5)로부터  $c_i, s_i$  및  $r_{ii}(n)$ 를 다음과 같이 구해진다.

$$r_{ii}(n) = \sqrt{\lambda r_{ii}(n-1) + |x_i^{(i)}(n)|^2} \quad (2.6)$$

$$c_i = \sqrt{\lambda} r_{ii}(n-1) / r_{ii}(n) \quad (2.7)$$

$$s_i = x_i^{(i)*} / r_{ii}(n) \quad (2.8)$$

그리고  $r_{i+1}(n) = r_{ij}(n), x_{i+1}^{(i+1)}(n) = x_{i+1}^{(j)}(n), p_i(n)$  및  $e^{(i+1)}(n)$ 을 추가적으로 회전 시켜야한다.

$$r_{ij}(n) = c_i \sqrt{\lambda} r_{ij}(n-1) + s_i x_j^{(i)}(n), \quad j = i+1, \dots, M \quad (2.9)$$

$$x_j^{(i+1)}(n) = -s_i \sqrt{\lambda} r_{ij}(n-1) + c_i x_j^{(i)}(n), \quad j = i+1, \dots, M \quad (2.10)$$

$$p_i(n) = c_i \sqrt{\lambda} p_i(n-1) + s_i e^{(i)}(n) \quad (2.11)$$

$$e^{(i+1)}(n) = -s_i \sqrt{\lambda} p_i(n-1) + c_i e^{(i)}(n) \quad (2.12)$$

식(2.6)-식(2.12)는 back substitution을 제외한 QR 분해법을 이용한 순환 최소자승알고리즘을 나타낸다. 참고문헌[8-11]으로부터 QR 분해에서 얻어지는  $R(n-1)$ 이 반복시간  $n-1$ 에서 대각행렬이 될 수 있다. 이것은 식(2.13)과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} c_i & s_i \\ -s_i^* & c_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \cdots 0 & \sqrt{\lambda} r_{ii}(n-1) & 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\lambda} p_i(n-1) \\ 0 \cdots 0 & x_i^{(i)}(n) & x_{i+1}^{(i)}(n) \cdots x_M^{(i)}(n) & \cdots & e^{(i)}(n) & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 \cdots 0 & r_{ii}^{(i)}(n) & r_{i+1}^{(i)}(n) \cdots r_{iM}^{(i)}(n) & \cdots & p_i(n) & \\ 0 \cdots 0 & 0 & x_{i+1}^{(i+1)}(n) \cdots x_M^{(i+1)}(n) & \cdots & e^{(i+1)}(n) & \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

이 경우 Givens 회전행렬의 요소  $c_i$ ,  $s_i$  및  $r_{ii}(n)$ 은 각각 식(2.6)-식(2.8)과 같다. 그리고 식(2.9)-식(2.10)의  $r_{ij}(n)$ ,  $x_j^{(i+1)}$ 은 다음과 같이 된다.

$$r_{ij}(n) = s_i x_j^{(i)}(n) \quad (2.14)$$

$$x_j^{(i+1)}(n) = c_i x_j^{(i)}(n) \quad (2.15)$$

식(2.14) 및 (2.15)를 이용해 식(2.6) 및 (2.8)을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$r_{ii}(n) = \sqrt{\lambda r_{ii}(n-1) + |a_i(n)x_i^{(i)}(n)|^2} \quad (2.16)$$

$$s_i = a_i(n)x_i^{(i)*} / r_{ii}(n) \quad (2.17)$$

여기서  $a_i(n)$ 은 다음과 같다.

$$a_i(n) = c_1 c_2 \cdots c_i = \prod_{j=1}^i c_j \quad (2.18)$$

반복시간  $n-1$ 에서  $R(n-1)$ 이 대각화되어 있다하고, Givens 회전된  $x_i^{(i)}, \dots, x_M^{(i)}$ 들이 서로 직교한다라고 가정한다.  $c_i$ 은  $\lambda^{1/2} r_{ii}(n-1)$ 의 단위벡터,  $s_i$ 은  $a_i(n)x_i^{(i-1)}(n)$ 의 단위 벡터이며  $r_{ii}(n)$ 은 벡터  $[\lambda^{1/2} r_{ii}(n-1), a_i(n)x_i^{(i-1)}(n)]$ 의 크기이다. 특히  $s_i$ 은 Givens 회전된 입력 벡터들의 단위벡터를 생성하게 된다. LMS 형태의 계수벡터 순환식은 다음과 같이 쉽게 얻어진다.

$$\mathbf{w}(n) = \mathbf{w}(n-1) - \mu \alpha_{(M)}(n) \mathbf{s}(n) \tilde{e}(n) \quad (2.19)$$

$$\mathbf{s}^H(n) = [s_1(n), s_2(n), \dots, s_M(n)] \quad (2.20)$$

여기서  $\mu$ 는 step-size이고  $\tilde{e}(n)$ 는 오차로 다음과 같다. 식(2.19)로부터 최적 계수벡터  $w_o^i$ 와 예측된  $w_i(n)$ 과의 계수오차벡터, 식(2.21)의 기대값은 다음과 같다.

$$\varepsilon_i(n) = w_o^i - w_i(n) \quad (2.21)$$

$$E[\varepsilon_i(n)] = (1 - \beta_i \sqrt{\sigma_{x_i}^2})^n E[\varepsilon_i(0)] \quad (2.22)$$

$$\beta_i = \lambda^{N/2} \sqrt{1 - \lambda} \quad (2.23)$$

여기서  $\sigma_{x_i}^2$ 은 입력신호벡터의 분산을 나타낸다.  $\sigma_{x_i}^2$ 를 제거하기 위해 다음의 정규화 방법을 이용하였다.

$$w_i(n) = w_i(n-1) - \mu \alpha_{(M)}(n) s_i(n) \tilde{e}(n) / r_{i,i}(n) \quad (2.24)$$

$$\mathbf{w}(n) = \mathbf{w}(n-1) - \mu \alpha_{(M)} \mathbf{s}(n) \tilde{e}(n) / \sum_{i=1}^M x_i(n) s_i(n) \quad (2.25)$$

표 1. 정규화된 QR 형태의 LMS 알고리즘.  
Table 1. Normalized QR type LMS algorithm.

```

=====초기조건=====
a_{(1)} = 1.0, r_{i,i}(0) = \delta
for n=1,2,3,...,
\tilde{e}(n) = d(n) - \mathbf{x}^H(n) \mathbf{w}(n-1)
for i=1,2,3,4,...,N
r_{i,i}(n) = \sqrt{\lambda [r_{i,i}(n-1)]^2 + [a_{(i)} x_i(n)]^2}
c_i(n) = \frac{\lambda^{1/2} r_{i,i}(n-1)}{r_{i,i}(n)}, s_i(n) = \frac{a_{(i)}(n) x_i(n)}{r_{i,i}(n)}
a_{(i+1)}(n) = c_i(n) a_{(i)}(n)
end %i loop
\gamma = 0.0
for i=1,2,3,...,M
\gamma = \gamma + s_i(n) x_i(n)
end %i loop
for i=1,2,3,...,M
w_i(n+1) = w_i(n) + a_{(M+1)}(n) s_i(n) \tilde{e}(n) / \gamma
end %i loop
end %n loop
=====
    
```

식(2.25)의 알고리즘을 정규화된 QR 형태의 LMS 알고리즘이라 하겠다. 식(2.19), 식(2.24) 및 식(2.25)에서  $a_{(M)}(n) = \mu a_{(M)}(n)$ , 즉  $\mu = 1.0$ 으로 처리하였다. 표1에 제안한 알고리즘이 요약되어 있다.

### III. 정규화된 QR형태 LMS알고리즘의 수렴특성 고찰

제안한 알고리즘이 평균면에서 최적 계수벡터에 수렴하는 가를 살펴보자. 계수벡터는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} w_i(n+1) &= w_i(n) + a_{(M)}(n) s_i(n) \tilde{e}(n) / \gamma \\ &= w_i(n) + \left[ \frac{a_{(M)}(n) a_{(i-1)}(n)}{r_{i,i}(n) \gamma} \right] x_i(n) \tilde{e}(n) \end{aligned} \quad (3.1)$$

여기서  $[\cdot]$ 을 다음과 같이  $M_{i,i}(n)$ 으로 놓자.

$$M_{i,i}(n) = \frac{a_{(M)}(n) a_{(i-1)}(n)}{r_{i,i}(n) \gamma} \quad (3.2)$$

그리고 원하는 응답  $d(n)$ 은 다음과 같다.

$$d(n) = \mathbf{w}_o^H \mathbf{x}(n) + v(n) \quad (3.3)$$

여기서  $\mathbf{w}_o$ 은 미지의 시스템 파라미터이고  $v(n)$ 은 부가잡음이다. 최적 계수벡터  $w_o^i$ 와 예측된  $w_i(n)$ 와의 계수 오차  $\varepsilon_i(n)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$\varepsilon_i(n) = w_o^i - w_i(n) \quad (3.4)$$

위의 식을 식 (3.1)에 대입 정리하자.

$$\varepsilon_i(n) = \varepsilon_i(n-1) - M_{i,i}(n) x_i(n) \tilde{e}(n) \quad (3.5)$$

여기서 오차는 다음과 같다.

$$\tilde{e}(n) = \mathbf{x}^H(n) \boldsymbol{\varepsilon}(n-1) + v(n) \quad (3.6)$$

식(3.5)에 식(3.6) 대입한 후 정리한 후 기대값을 취하면 다음과 같다.

$$E[\varepsilon_i(n)] = E\left[ [1 - M_{i,i}(n) x_i(n) \mathbf{x}^H(n)] \varepsilon_i(n-1) - E[M_{i,i}(n) x_i(n) v(n)] \right] \quad (3.7)$$

여기서  $\mathbf{x}(n)$ ,  $v(n)$ 은 상관관계가 없으므로 다음의 수식을 얻는다.

$$\begin{aligned} E[\varepsilon_i(n)] &= E\left[ [1 - M_{i,i}(n) x_i(n) \mathbf{x}^H(n)] \varepsilon_i(n-1) \right] \\ &\approx [1 - E[M_{i,i}(n)] E[x_i(n) \mathbf{x}^H(n)]] E[\varepsilon_i(n-1)] \end{aligned} \quad (3.8)$$

식(3.8)에서,

$E[x_i(n) \mathbf{x}^H(n)] \approx E[x_i(n) x_i^H(n)] = E[x_i^2(n)]$ 이라 가정하고  $E[M_{i,i}(n)]$ 를 먼저 계산하자.

$$E[M_{i,i}(n)] = E\left[ \frac{a_{(M)}(n) a_{(i-1)}(n)}{r_{i,i}(n) \gamma} \right] \approx \frac{E[a_{(M)}(n) a_{(i-1)}(n)]}{E[r_{i,i}(n)] E[\gamma]} \quad (3.9)$$

$E[M_{i,i}(n)]$ 의 계산에 필요한 각 변수들은 다음과 같다.

$$E[a_{(M)}] = \prod_{k=1}^M E[c_k(n)] = \lambda^{M/2} \quad (3.10)$$

$$E[r_{i,i}^2(n)] = \frac{\lambda \sigma_{x_i}^2}{(1-\lambda)} \quad (3.11)$$

$$E[c_i(n)] = \lambda^{1/2} \frac{E[r_{i,i}(n-1)]}{E[r_{i,i}(n)]} \approx \lambda^{1/2} \quad (3.12)$$

식(3.9)의  $E[\gamma]$ 를 계산하기 위하여 다음을 계산하자.

$$E[\gamma] = E\left[ \sum_{i=1}^M s_i(n) x_i(n) \right] \approx \sum_{i=1}^M \frac{E[a_{(i-1)}(n)] E[x_i^2(n)]}{E[r_{i,i}(n)]} \quad (3.13)$$

식(3.13)에 식(3.10)과 식(3.11)를 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$E[\gamma] \approx \sum_{i=1}^M \frac{\lambda^{(i-1)/2} \sigma_{x_i}^2}{\sqrt{\lambda \sigma_{x_i}^2} \sqrt{(1-\lambda)}} \approx \sum_{i=1}^M \sqrt{\sigma_{x_i}^2} \sqrt{(1-\lambda)} \quad (3.14)$$

여기서  $E[x_i^2(n)] = \sigma_{x_i}^2$  및  $\sqrt{\lambda^{(i-1)}} \approx \sqrt{\lambda}^{i-1}$ 이라 가정하였다. 그러면 식(3.14)의  $E[\gamma]$ 를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$E[\gamma] \approx \sum_{i=1}^M (1-\lambda)^{1/2} (\sigma_{x_i}^2)^{1/2} = M(1-\lambda)^{1/2} (\sigma_{x_i}^2)^{1/2} \quad (3.15)$$

여기서  $M$ 은 필터 차수이다. 그러면 식(3.9)을 분모항 부분을 계산할 수 있다.

$$E[r_{i,i}(n)]E[v] = \sqrt{\frac{\lambda \sigma_x^2}{(1-\lambda)}} M(1-\lambda)^{1/2} (\sigma_x^2)^{1/2} \quad (3.16)$$

$$= M \lambda^{i/2} \sigma_x^2$$

식(3.9)의 분자항을 정리하면 다음과 같다.

$$E[\alpha_{(M)}(n) \alpha_{(i-1)}(n)] \approx \prod_{k=1}^M E[c_k(n)] \prod_{j=1}^i E[c_j(n)] = \lambda^{(M+i)/2} \quad (3.17)$$

식(3.16), (3.17)을 식(3.9)에 대입해 다음 식을 얻는다.

$$E[M_i(n)] \approx \frac{\lambda^{(M+i)/2}}{M \lambda^{i/2} \sigma_x^2} = \frac{\lambda^{M/2}}{M \sigma_x^2} \quad (3.18)$$

식(3.8)의  $[1 - E[M_i(n)]E[x_{i,i}(n) \mathbf{x}^H(n)]]$ 을 계산하자.

$$1 - E[M_i(n)]E[x_{i,i}(n) \mathbf{x}^H(n)] \approx 1 - E[M_i(n)]E[x_i^2(n)] \quad (3.19)$$

$$= 1 - \frac{\lambda^{M/2}}{M \sigma_x^2} \sigma_x^2 = 1 - \beta, \quad \beta = \lambda^{M/2}/M$$

여기서  $\beta = \lambda^{M/2}/M$ 은 작은 양의 실수 값이다. 그러므로  $1 - \beta$ 는 1보다는 작고 1에 근접한 값을 가지게 될 것이다. 식(3.8)의 계수 오차의 기대값은 다음과 같다.

$$E[\varepsilon_i(n)] = (1 - \beta)^n E[\varepsilon_i(0)] \quad (3.20)$$

식(3.20)에서 반복 횟수  $n$ 이 증가함에 따라  $i$ 번째 계수 오차는 0으로 수렴하여 제안한 알고리즘은 평균면에서 최적계수 벡터 값에 수렴할 것이다.

$$E[\varepsilon_i(n)] = 0 \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, N, \quad n \rightarrow \infty \quad (3.21)$$

식(3.20)에서  $\lambda$ 의 범위는 다음과 같다.

$$0 < \lambda \leq 1 \quad (3.22)$$

양상블 평균 학습 곡선(ensemble average learning curve)에 대하여 개략적으로 살펴보자.

$$\tilde{e}(n) = d(n) - \mathbf{x}^H(n)(\mathbf{w}_o - \mathbf{e}(n-1)) \quad (3.23)$$

$$= e_o(n) + \mathbf{e}^H(n-1) \mathbf{x}(n)$$

여기서  $e_o(n)$ 은 추정잡음이고 입력 신호 벡터

$\mathbf{x}(n)$ 과 독립(independent)이고 평균은 0, 분산은  $\sigma_o^2$ 을 갖는다. 양상블 평균의 학습곡선을 다음 식과 같이 정의된다.

$$J(n) = E[|\tilde{e}(n)|^2] = E[|e_o(n)|^2] + E[e_o(n) \mathbf{x}^H(n) \mathbf{e}(n-1)] \quad (3.24)$$

$$+ E[\mathbf{e}^H(n-1) \mathbf{x}(n) e_o^*(n)]$$

$$+ E[\mathbf{e}^H(n-1) \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n) \mathbf{e}(n-1)]$$

식(3.24)은 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$J(n) = \sigma_o^2 + E[\mathbf{e}^H(n-1) \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n) \mathbf{e}(n-1)] \quad (3.25)$$

$$= \sigma_o^2 + \text{tr}[E[\mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n)]E[\mathbf{e}(n-1) \mathbf{e}^H(n-1)]]$$

식(3.25)에서 다음을 가정하자.

$$E[\mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n)] \approx \text{diag}[E[x_1^2(n)], E[x_2^2(n)], \dots, E[x_M^2(n)]] \quad (3.26)$$

$$E[\mathbf{e}(n-1) \mathbf{e}^H(n-1)] \approx \text{diag}[E[(w_1(n-1) - w_o^1)^2], \dots, E[(w_N(n-1) - w_o^M)^2]] \quad (3.27)$$

식(3.26)과 식(3.27)을 식(3.25)에 대입 정리하자.

$$J(n) = \sigma_o^2 + \sum_{i=1}^M E[x_i^2(n)]E[(w_i(n-1) - w_o^i)^2] \quad (3.28)$$

$$= \sigma_o^2 + \sigma_x^2 \sum_{i=1}^M E[(w_i(n-1) - w_o^i)^2]$$

식(3.28)에 식(3.21)의 결과를 이용하면 식(3.28)는 다음과 같이 됨을 추론 할 수 있다.

$$J(n) \approx \sigma_o^2, \quad \text{for } n \rightarrow \infty \quad (3.29)$$

그러므로 제안한 알고리즘은 최적계수벡터와 추정잡음의 분산에 수렴함을 알 수 있다.

#### IV. 모의 실험 및 검토

식(2.19)의 LMS 형태 알고리즘을 시스템 식별에 적용하였다. 백색 가우시안 잡음  $r(n)$ 을 식(4.1)에 통과시켜 유색잡음  $u(n)$ 을 얻은 후 이것을 식(4.2)와 같은 시스템에 통과시켜  $x(n)$ 을 얻었다. 그리고 추정잡음  $v(n)$ 은  $r(n)$ 과 상관관계가 없는

백색가우시안 잡음으로 식(4.2)의 출력신호  $x(n)$ 에 적절한 S/N비를 갖도록 첨가하여 원하는 응답을 얻었다. 각 실험은 100번의 독립된 실험을 수행한 후 앙상블 평균하여 나타냈다.

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.9z^{-1}} \quad (4.1)$$

$$H(z) = -0.43 - 1.66z^{-1} + 0.12z^{-2} + 0.58z^{-3} - 1.14z^{-4} - 2.19z^{-5} \quad (4.2)$$

그림 1에서  $\lambda = 0.98$ ,  $\mu = 0.15$ 로 하였고, NLMS 알고리즘에서는  $\alpha = 0.12$ , LMS 알고리즘에서는  $\mu = 0.003$ 으로 하였다. 그리고 S/N=-80dB으로 하여 수행했다.

그림1과 그림2에서 녹색 라인은 NLMS 알고리즘, 붉은색 라인은 제안한 알고리즘 및 검정색 라인은 LMS 알고리즘의 학습곡선을 각각 나타내고 있다. 그림1에서 제안한 알고리즘은 그 형태가 LMS 형태 이지만 NLMS 알고리즘과 비슷한 수렴특성을

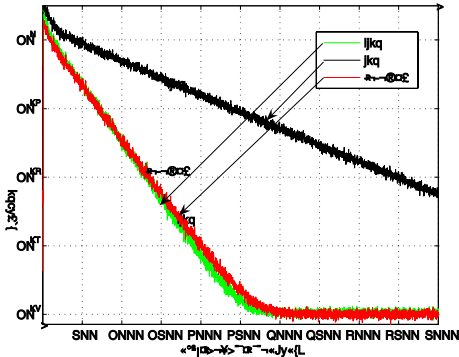


그림 1. S/N=-80dB인 경우 여러 가지 알고리즘의 학습곡선들.  
Fig. 1 Learning curves of various algorithm with S/N=-80dB.

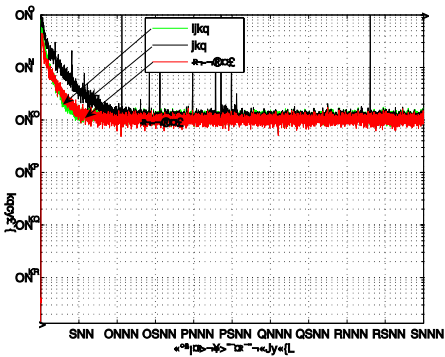


그림 2. S/N=-10dB인 경우 여러 가지 알고리즘의 학습곡선들.  
Fig. 2 Learning curves of various algorithm with S/N=-10dB.

나타내고 있음을 확인할 수 있다. 그림 2는 S/N=-10dB인 경우 LMS 알고리즘의 step-size을  $\mu = 0.006$ 로 하고 NLMS 알고리즘과 제안한 알고리즘의  $\mu = \alpha = 0.15$ 로 하여 모의실험한 결과이다. LMS 알고리즘은 학습곡선이 매우 불안정한 모습이고 제안한 알고리즘은 NLMS 알고리즘에 비하여 수렴은 느리지만 수렴 후 MSE 값은 약간 적음을 알 수 있다. 알고리즘의 비교에서 제안한 알고리즘은 측정잡음의 분산값에 정확히 수렴함을 알 수 있다. 식(2.25)의 제안한 알고리즘을 식(4.1) 및 식(4.2)와 같이하여 시스템 식별에 적용하였다. 모든 실험은 제안된 알고리즘은  $\lambda = 0.98$ ,  $\mu = 0.5$ 로 하였고, NLMS 알고리즘에서는  $\alpha = 0.5$ , LMS 알고리즘에서는  $\mu = 0.003$ 으로 하여 모의 실험하였다. 그림 3 및 4는 측정 잡음의 영향이 거의 없는 경우에 대한 모의실험으로 제안한 알고리즘과 NLMS 알고리즘은 거의 유사한 성능을 나타내고 있음을 확인할 수 있다. 그림5에서  $E[wNk]$ ,  $E[wLk]$  및  $E[wk]$ 는 NLMS 알고리즘, LMS 알고리즘 및 제안한 알고리즘의 k번째 계수의 궤적을 나타냈다.

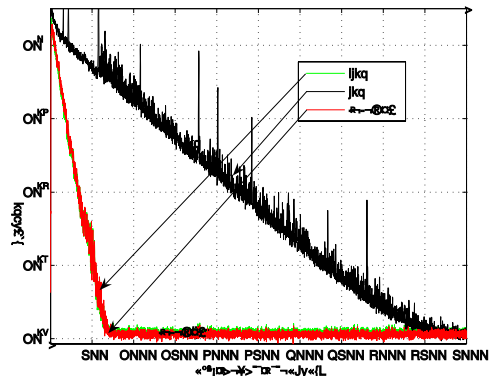


그림 3. S/N=-80dB인 경우 여러 가지 알고리즘의 학습곡선들.  
Fig. 3 Learning curves of various algorithm with S/N=-80dB.

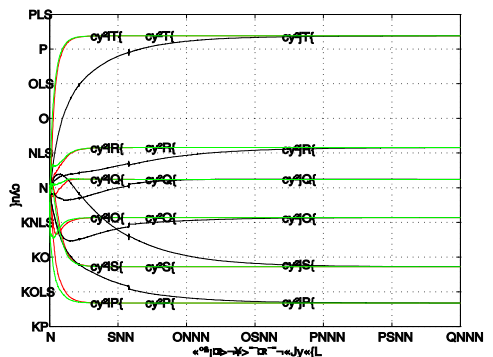


그림 4. S/N=-80dB인 경우 계수들의 궤적.  
Fig. 4 Tracking of the weight vector with S/N=-80dB.

V. 결론 및 고찰

본 논문에서는 QR 형태 LMS 알고리즘이 평균면에서 입력신호의 분산에 비례하여 수렴하는 것을 정규화하기 위한 하나의 방법을 제시하였다. 그리고 이론적인 측면에서 정규화됨을 보였다. 그리고 정규화된 QR 형태 LMS 알고리즘 역시 계산량은  $O(N)$ 으로 고속 알고리즘이다. 또한 제한한 알고리즘의 안정도와 수렴 특성에 대하여 이론적으로 고찰하였다. 그 결과 정규화된 QR 형태 LMS 알고리즘은 최적 계수 벡터에 수렴함을 알 수 있었다. 제한한 정규화된 QR 형태 알고리즘을 간단한 FIR 시스템 식별에 적용하여 컴퓨터 모의실험을 수행하였다. 그 결과 이론값과 거의 유사하게 동작함을 확인할 수 있었다. 그리고 컴퓨터 모의실험을 통한 여러 알고리즘과 비교에서 NLMS 알고리즘과 유사한 수렴특성을 나타냄을 확인하였다. 앞으로 본 알고리즘은 정확한 수렴특성 해석이 요구되며 비선형 적응 신호처리 문제등에 대한 응용을 더욱 연구해 볼 필요성이 있다.

참 고 문 헌

[1] J. B. Evans, P. Xue and B. Liu, "Analysis and implementation of variable step size adaptive algorithms," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 41, no. 8, pp.2517-2535, August 1193.

[2] D. P. Mandic, "A generalized normalized gradient descent algorithm," *IEEE Signal processing Letters*, vol. 11, no. 2, Feb., 2004.

[3] V. J. Mathews and Z. Xie, "A stochastic gradient adaptive filter with gradient adaptive step size," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 41, pp.2075-2087, June 1993.

[4] W. P. Ang and B. Farhang-Boroujeny, "A new class of gradient adaptve step-size LMS algorithms," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 49, pp.805-810, Apr. 2001.

[5] F. Albu and H.K. Kwan, "Fast block exact Gauss-Seidel pseudo affine projection algorithm," *Electronics letters*, vol. 40, issue 22, 28, pp.1451-1453, Oct., 2004.

[6] F. Albu and H.K. Kwan, "A new block exact affine projection algorithm [acoustic echo cancellation system example]," *Circuits*

and Systems, 2005. ISCAS 2005. *IEEE International Symposium on 23-26*, Vol. 5, pp.4337 - 4340, May 2005.

[7] F. Albu and A. Fagan, "The Gauss-Seidel pseudo affine projection algorithm and its application for echo cancellation," *Signals, Systems and Computers, 2003. Conference Record of the Thirty-Seventh Asilomar Conference on Volume 2*, pp.1303 - 1306, Nov., 2003.

[8] Z. S. Liu, "QR methods of  $O(N)$  complexity in adaptive parameter estimation," *IEEE Trans, Signal Processing*, vol. 43, pp.720-729, 1995.

[9] Z. S. Liu and J. Li, "A QR-based least mean squares algorithm for adaptive parameter estimation," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. 45, pp.321-329, Mar. 1998.

[10] S. C. Chan, X. X. Yang, "Improved approximate QR-LS algorithms for adaptive filtering," *IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Express Briefs*, vol. 51, Issue 1, pp.29 - 39, Jan 2004.

[11] S. C. Chan, Y. Zhou and W. Y. Lau, "New Approximate QR-LS Algorithms for Minimum Output Energy(MOE) Receivers in DS-CDMA Communication Systems," *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, vol. 3, pp.2631 - 2634, May 2005.

[12] 안봉만, 조주필, 황지원, "정규화된 D-QR-RLS 알고리즘의 특성 분석(I)(KICS2007-02-067)," 한국통신학회.

[13] J. G. Proakis, C. M. Rader, F. Ling and C. L. Nikias, *Advanced Digital Signal Processing*, Macmillan Publishing Co., 1992.

안 봉 만 (Bong-Man Ahn) 정회원  
한국통신학회논문지 '07-9 Vol.32, No.8 참조

황 지 원 (JeeWon Hwang) 정회원  
한국통신학회논문지 '07-9 Vol.32, No.8 참조

조 주 필 (Juphil Cho) 정회원  
한국통신학회논문지 '07-9 Vol.32, No.8 참조