

합산 차등 상관 방식을 활용하는 초기 동기 획득 시의 오율 성능 분석

준회원 김 상 태*, 김 재 원*, 종신회원 장 대 익**, 정회원 김 판 수**, 종신회원 성 원 진*

Error Probability Analysis for the Initial Acquisition Using Sum Differential Correlation Methods

Sangtae Kim*, Jaewon Kim* *Associate Members*, Dae-Ig Chang** *Lifelong Member*,
Pansoo Kim** *Regular Member*, Wonjin Sung* *Lifelong Member*

요 약

통신 시스템에서 초기 동기 획득은 안정적인 송수신 성능을 위해 필수적이며, 특히 신호 대 잡음 비의 변화를 포함하는 다양한 통신 환경에서 동기 획득 성능의 분석은 시스템 설계를 위해 중요한 역할을 한다. 주파수 오차가 존재하는 경우 초기 동기에서 차등 상관 방식의 활용이 바람직하며, 기존 상관 방식의 적절한 변형을 통해 추가적인 성능 향상이 가능하다. 본 논문에서는 차등 상관기 출력 값의 분포를 확률적으로 모델링함으로써 초기 동기 시의 오율을 Marcum Q-function의 형태로 유도하며, 출력 값의 복소 합 또는 크기 합을 이용하는 확장된 차등 상관 방식의 초기 동기 획득 시의 오율 결정으로 일반화한다. 제시된 결과는 DVB-S2 (Digital Video Broadcasting - via Satellite, Second Generation) 표준을 포함하는 다양한 통신 시스템의 동기 성능 검증을 위해 활용될 수 있다.

Key Words : Differential correlation, Initial acquisition, Satellite transmission, Mis-detection probability, Digital video broadcasting

ABSTRACT

In communication systems, initial acquisition is required for the reliable transmission performance, and the analysis of the acquisition performance over various communication environments including different signal-to-noise ratios plays an important role in communication system design. Usage of differential correlation methods in initial synchronization procedure is desired when frequency offsets exist, and additional performance improvement can be achieved through proper modifications of conventional correlation schemes. In this paper, we derive the error probability of the initial acquisition and express it in terms of the Marcum Q-function, via statistical modeling of the differential correlator output. The result is generalized to the error probabilities of the extended differential correlation methods using the complex- and magnitude-sum of the correlator outputs. The derived probabilities can be applied for the acquisition performance verification of various communication systems including the DVB-S2 standard.

※ 본 연구는 지식경제부 및 정보통신연구진흥원의 IT신성장동력핵심기술개발사업의 일환으로 수행하였음. [KCC/IITA 2008-S008-02, 21GHz 대역 위성방송전송기술개발]

* 서강대학교 전자공학과 디지털전송연구실 (wsung@sogang.ac.kr), ** 한국전자통신연구원

논문번호 : KICS2008-05-247, 접수일자 : 2008년 5월 26일, 최종논문접수일자 : 2008년 11월 3일

I. 서 론

초기 동기 획득은 통신 시스템의 송수신 성능 결정에 큰 역할을 하며, 변화하는 신호 대 잡음 비 및 주파수 오차 등 다양한 환경에서의 강건한 동기 획득 성능을 위해 다양한 방법이 제시되었다. 초기 동기 과정에서 수신단에서는 송신 신호 검출을 위해서 수신된 심볼 열과 프리앰블인 SoF (Start of the Frame) 심볼 열을 이용하여 상관값을 구하는 방식이 일반적이다. 기 제안된 최대 우도 (ML; Maximum Likelihood) 상관 방식은 주파수 오차가 존재하지 않는 환경에서는 초기 프레임 동기를 위한 최적의 상관 방식이나, 주파수 오차가 큰 환경에서는 초기 동기 과정에서 심각한 성능 열화가 발생한다. 따라서 주파수 오차가 큰 환경에서는 심볼 간의 위상 차이를 이용한 차등 상관 방식을 사용하여 주파수 오차에 의한 성능 열화를 극복할 수 있으며, 이를 활용하여 주파수 오차에 강건한 성능을 보이는 다양한 차등 상관기가 제안되었다^[1-6].

본 논문에서는 주파수 오차가 있는 환경에서 널리 사용되는 초기 동기 획득 성능에 대해 분석하며, 특히 복소 합산과 크기 합산을 이용하여 확장된 차등 상관기의 확률 밀도 함수 (pdf; Probability Density Function) 및 누적 분포 함수 (cdf; Cumulative Distribution Function)를 제시한다. 각각의 차등 상관값에 대한 pdf 및 cdf를 비 동기 시에는 exponential 함수를 이용하여 닫힌 형태로 유도하였고, 동기 시에는 Bessel function과 Marcum Q-function을 이용하여 닫힌 형태로 유도하였으며, 이를 컴퓨터 시뮬레이션을 이용하여 검증하였다. 또한 프레임 동기 오류 성능을 평가하기 위해서 MDP (Mis-detection Probability)와 FAR (False Alarm Rate)을 유도하여, ROC (Receiver Operating Characteristic) 성능 곡선을 이용한 일반화된 차등 상관 방식의 파라미터 별 성능을 평가하였다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. II장에서는 차등 상관기의 분석을 위한 신호 및 상관기를 모델링 하며, III장에서는 비 동기 시와 동기 시에 대한 pdf 및 cdf를 각각 유도하고 검증한다. 또한 이를 이용하여 MDP와 FAR을 각각 유도하며, IV장 및 V장에서는 크기 합산과 복소 합산을 활용한 차등 상관 방식으로 각각 확장하여 III장에서 유도된 확률 분포를 바탕으로 일반화된 차등 상관 방식의 근사 pdf 및 cdf를 유도하고 파라미터 별 성능을 비교한다. 마지막으로 VI장에서는 결론을 맺는다.

II. 신호 및 상관기 모델

AWGN 채널에서 j 번째 수신 신호 r_j 를

$$r_m = s_m e^{j(2\pi m f_0 T_s + \phi_0)} + n_m, \quad j = 1, \dots, N \quad (1)$$

와 같이 표현할 수 있다. 여수기서 $\{s_m\}$ 는 전송 심볼, $\{n_m\}$ 는 AWGN 샘플을 의미한다. 전송 신호는 QPSK 변조 방식이 적용되었다고 가정하며, 이 가정으로 인해 전송 신호 및 수신 신호는 inphase (I) 와 quadrature (Q) 성분 각각의 확률을 가지며, 이 확률은

$$s_m^I = s_m^Q = d_m^I = d_m^Q = \begin{cases} 1/\sqrt{2}, & P=0.5 \\ -1/\sqrt{2}, & P=0.5 \end{cases} \quad (2)$$

와 같다. 여기서 $\{d_m\}$ 는 수신단에서 동기를 위한 known 심볼 열을 의미하고, 수식 (1)의 $\{n_m\}$ 에 대한 inphase와 quadrature 성분의 각각 평균과 분산은 $n_m^I = n_m^Q \sim N(0, \sigma^2)$ 으로 i.i.d (independent and identically distributed) Gaussian 확률 분포를 따른다. 또한 m 번째 수신 신호에서 k 만큼 떨어진 심볼 간의 차등 상관값 X_k^m 는

$$X_k^m = \sum_{i=0}^{N-k-1} r_{m+i} r_{m+i+k}^* (d_{m+i} d_{m+i+k}^*)^* \quad (3)$$

와 같이 표현할 수 있으며, 이때 N 은 SoF의 개수를 의미한다. 심볼 위치 $m = 0$ 이 동기 지점이라고 가정하고 상관값 $X_k (= X_k^0)$ 를 전개하면

$$\begin{aligned} X_k &= \sum_{i=0}^{N-k-1} r_i r_{i+k}^* (d_i d_{i+k}^*)^* \\ &= \sum_{i=0}^{N-k-1} (s_i e^{j(w_i + \phi_0)} + n_i) \\ &\quad \times (s_{i+k}^* e^{-j(w_{i+k} + \phi_0)} + n_{i+k}^*) (d_i^* d_{i+k}) \\ &= e^{-jw_n k} \left[\sum_{i=0}^{N-k-1} s_i s_{i+k}^* d_i^* d_{i+k} \right. \\ &\quad + \sum_{i=0}^{N-k-1} s_i \tilde{n}_{i+k}^* d_i^* d_{i+k} \\ &\quad + \sum_{i=0}^{N-k-1} s_{i+k}^* \tilde{n}_i d_i^* d_{i+k} \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^{N-k-1} d_i^* d_{i+k} \tilde{n}_i \tilde{n}_{i+k}^* \right] \\ &= e^{-jw_n k} \bar{X}_k \end{aligned} \quad (4)$$

와 같이 4개의 항으로 분리하여 표현할 수 있으며, 이때 $w_n = 2\pi f_0 T_s$, $\tilde{n}_i = n_i e^{-j(w_n i + \phi_0)}$ 를 의미한다.

일반적으로 차등 상관 심볼 간 이격 $k \in \{1, \dots, K\}$ 일 때, K 개의 차등 상관값 X_1, \dots, X_K 에 적절한 가

중치를 두고 활용하면 X_1 만 사용할 때 보다 우수한 동기 검출 성능을 얻을 수 있다. 이하에서는 K 개의 차등 상관값을 활용하는 방법으로 ρ_k 의 가중치를 적용하여 크기 합산으로 구성된 상관기와 [4]

$$\begin{aligned} M &= \sum_{k=1}^K |\rho_k X_k|^2 \\ &= \sum_{k=1}^K |\rho_k e^{-j\omega_k} \bar{X}_k|^2 \\ &= \sum_{k=1}^K |\rho_k \bar{X}_k|^2 \end{aligned} \quad (5)$$

를 고려하며, 이를 변형하여 α_k 의 가중치를 적용하여 만든 복소 합산으로 구성된 상관기

$$\begin{aligned} C &= \left| \sum_{k=1}^K \alpha_k X_k \right|^2 \\ &= \left| \sum_{k=1}^K \alpha_k e^{-j\omega_k} \bar{X}_k \right|^2 \end{aligned} \quad (6)$$

를 제안한다. 본 논문에서는 크기 합산으로 구성된 상관기의 경우 $K = 2$ 까지, 복소 합산으로 구성된 상관기의 경우 $K = N - 1$ 까지 확장하여 분석을 수행한다.

III. 차등 상관 방식의 오율

본 장에서는 수식 (5)와 (6)에서 $K = 1$ 및 $\alpha_1 = \rho_1 = 1$ 일 경우, 비 동기 시와 동기 시의 차등 상관기에 대한 분석을 수행 한다. 여기서 $s_i \neq d_i$ 인 경우의 비 동기 시 상관값을 $W = |X_1|^2$ 로 정의하고, $s_i = d_i$ 인 경우의 동기 시 상관값을 $Z = |X_1|^2$ 로 각각 정의한다. 성능 분석을 위해 수식 (4)의 4개의 성분을

$$\begin{aligned} X_{k,1} &= \sum_{i=0}^{N-k-1} s_i^* d_{i+k} \\ X_{k,2} &= \sum_{i=0}^{N-k-1} s_i \tilde{n}_{i+k}^* d_{i+k} \\ X_{k,3} &= \sum_{i=0}^{N-k-1} s_{i+k}^* \tilde{n}_i d_{i+k} \\ X_{k,4} &= \sum_{i=0}^{N-k-1} d_i d_{i+k} \tilde{n}_i \tilde{n}_{i+k}^* \end{aligned} \quad (7)$$

로 정의한다.

3.1 비 동기 시의 분석

비 동기 시인 경우 $X_{1,1}$, $X_{1,2}$, $X_{1,3}$, $X_{1,4}$ 에 대한

확률 분포를 유도한 후, $\bar{X}_1 (= X_{1,1} + X_{1,2} + X_{1,3} + X_{1,4})$ 을 이용하여 W 에 대한 확률 분포를 구한다.

$X_{1,1}$ 의 $s_i s_{i+1}^* d_i^* d_{i+1}$ 에 대한 inphase와 quadrature 성분을 각각 ψ_i^I 와 ψ_i^Q 라고 정의할 때, ψ_i^I 와 ψ_i^Q 의 확률은 다음과 같다.

$$\psi_i^{I,Q} = \begin{cases} 1, & P = 0.25 \\ 0, & P = 0.5 \\ -1, & P = 0.25 \end{cases} \quad (8)$$

그러므로 ψ_i^I 와 ψ_i^Q 각각의 평균은 $-1 \times P(-1) + 1 \times P(1) = (-1) \times 0.25 + 1 \times 0.25$ 이므로 0이고, 분산은 $(-1)^2 \times P(-1) + (1)^2 \times P(1) = (-1)^2 \times 0.25 + (1)^2 \times 0.25$ 이므로 0.5이다. $X_{1,1}$ 의 inphase 성분과 quadrature 성분을 각각 $X_{1,1}^I$ 과 $X_{1,1}^Q$ 라고 정의할 때 $X_{1,1}^I$ 과 $X_{1,1}^Q$ 의 분포는 중심 극한 이론을 활용하여 다음과 같은 Gaussian 확률 분포로 나타낼 수 있다.

$$X_{1,1}^I = X_{1,1}^Q \sim N(0, (N-1)/2). \quad (9)$$

한편 $X_{1,2}$ 의 $s_i \tilde{n}_{i+1}^* d_i^* d_{i+1}$ 는 $P(s_i \tilde{n}_{i+1}^* d_i^* d_{i+1}) = P(s_i \tilde{n}_{i+1}^*)$ 이고, 그 확률은

$$\begin{aligned} P(s_i \tilde{n}_{i+1}^*) &= P\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{j}{\sqrt{2}}\right) (n_{i+1}^I - j n_{i+1}^Q) \\ &= P\left(\pm \frac{n_{i+1}^I}{\sqrt{2}} \pm \frac{n_{i+1}^Q}{\sqrt{2}}\right) + j \left(\pm \frac{n_{i+1}^I}{\sqrt{2}} \mp \frac{n_{i+1}^Q}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned} \quad (10)$$

와 같다. 수식 (10)에서 $s_i \tilde{n}_{i+1}^*$ 의 inphase 성분과 quadrature 성분을 각각 β_i^I 와 β_i^Q 로 정의하면, 수식 (10)에 의해 $P(\beta_i^I) = P(\beta_i^Q) \sim N(0, \sigma^2)$ 와 같은 Gaussian 확률 분포를 따른다. 또한, $X_{1,3}$ 의 $s_i \tilde{n}_{i+1}^* d_i^* d_{i+1}$ 는 $P(s_{i+1}^* \tilde{n}_i d_i^* d_{i+1}) = P(s_{i+1}^* \tilde{n}_i)$ 이 성립하므로, $s_i \tilde{n}_{i+1}^*$ 와 같은 확률 분포를 가지게 된다. 따라서 $X_{1,2}^I$, $X_{1,2}^Q$, $X_{1,3}^I$, $X_{1,3}^Q$ 은 각각 다음과 같은 Gaussian 확률 분포를 따른다.

$$X_{1,2}^I = X_{1,2}^Q = X_{1,3}^I = X_{1,3}^Q \sim N(0, (N-1)\sigma^2) \quad (11)$$

마지막으로 $X_{1,4}$ 의 $d_i d_{i+k} \tilde{n}_i \tilde{n}_{i+k}^*$ 은 $P(d_i d_{i+k} \tilde{n}_i \tilde{n}_{i+k}^*) = P(\tilde{n}_i \tilde{n}_{i+k}^*)$ 이고, 그 확률은

$$P(\tilde{n}_i \tilde{n}_{i+1}^*) = P((n_{i+1}^I + n_{i+1}^Q) + j(n_{i+1}^Q - n_{i+1}^I)) \quad (12)$$

이다. $X_{1,4}^I$ 와 $X_{1,4}^Q$ 은 각각 $2(N - 1)$ 개의 independent한 Gaussian 분포의 곱으로 구성되어 있으므로, 이를 다음과 같은 Gaussian 확률 분포로 근사화 할 수 있다.

$$X_{1,4}^I = X_{1,4}^Q \sim N(0, 2(N-1)\sigma^4). \quad (13)$$

이상의 논의를 바탕으로 정리하면, $\bar{X}_1 (= X_{1,1} + X_{1,2} + X_{1,3} + X_{1,4})$ 이므로 \bar{X}_1 의 inphase와 quadrature 성분 각각의 확률 분포는

$$X_1^I = X_1^Q \sim N(0, \frac{N-1}{2} + 2(N-1)\sigma^2 + 2(N-1)\sigma^4) \quad (14)$$

와 같다. 따라서 $W = |\bar{X}_1|^2 = (X_1^I)^2 + (X_1^Q)^2$ 이므로 Gaussian 확률 분포의 제곱의 합인 W 는 exponential 분포를 가지며^[7], W 의 pdf와 cdf는 다음과 같이 닫힌 형태로 표현 할 수 있다.

$$f_W(w) = \frac{1}{2\sigma^2 w} \exp\left(-\frac{w}{2\sigma^2 w}\right), \quad w \geq 0, \quad (15)$$

$$F_W(w) = 1 - \exp\left(-\frac{w}{2\sigma^2 w}\right), \quad w \geq 0. \quad (16)$$

여기서 W 의 분산은 $\sigma_w^2 = \sigma_{X_1^I}^2 = \sigma_{X_1^Q}^2 = (N-1)/2 + 2(N-1)\sigma^2 + 2(N-1)\sigma^4$ 이다. 이를 이용하여 FAR을 유도하면 문턱값 v 에 대하여

$$P_F(v) = \int_v^\infty f_W(w)dw = 1 - F_W(v) = \exp\left(-\frac{v}{2\sigma^2 w}\right) \quad (17)$$

와 같다.

3.2 동기 시의 분석

동기시에도 앞 절의 비동기시와 유사하게 $X_{1,1}$, $X_{1,2}$, $X_{1,3}$, $X_{1,4}$ 에 대한 확률 분포를 유도한 후, $\bar{X}_1 (= X_{1,1} + X_{1,2} + X_{1,3} + X_{1,4})$ 을 이용하여 $Z = \|\bar{X}_1\|^2$ 에 대한 확률 분포를 구한다.

우선 동기 시 $s_i d_i^* = 1$ 의 성질을 이용한 $X_{1,1}$ 의 inphase와 quadrature 성분은

$$X_{1,1}^I = N-1, \quad X_{1,1}^Q = 0 \quad (18)$$

와 같다. 또한 $X_{1,2}$ 를 전개하면,

$$\begin{aligned} X_{1,2} &= s_0 \tilde{n}_1^* d_0^* d_1 \\ &\quad + \dots + s_{N-2} \tilde{n}_{N-1}^* d_{N-2}^* d_{N-1} \\ &= \tilde{n}_1^* d_1 + \dots + \tilde{n}_{N-1}^* d_{N-1} \end{aligned} \quad (19)$$

와 같고 $X_{1,3}$ 를 전개하면,

$$\begin{aligned} X_{1,3} &= s_1^* \tilde{n}_0 d_0^* d_1 \\ &\quad + \dots + s_{N-1}^* \tilde{n}_{N-2} d_{N-2}^* d_{N-1} \\ &= \tilde{n}_0 d_0^* + \dots + \tilde{n}_{N-2} d_{N-2}^* \end{aligned} \quad (20)$$

와 같다. $X_{1,2} + X_{1,3}$ 를 계산하기 위해 $\tilde{n}_i^* d_i$ 를 \forall_i 로 정의하면, \forall_i 는 $\forall_i^I = (\forall_i^I)^*$ 와 $\forall_i^Q = -(\forall_i^Q)^*$ 의 특성을 가지게 된다. 또한 $2 \times N(0, \sigma^2) = N(0, 4\sigma^2)$ 의 특성을 이용하여 $X_{1,2} + X_{1,3}$ 의 inphase와 quadrature성분의 확률 분포는 각각 다음과 같이 Gaussian 확률 분포로 나타낼 수 있다.

$$X_{1,2}^I + X_{1,3}^I \sim N(0, (4N-6)\sigma^2), \quad (21)$$

$$X_{1,2}^Q + X_{1,3}^Q \sim N(0, 2\sigma^2). \quad (22)$$

동기 시의 $X_{1,4}$ 의 확률 분포는 비 동기 시의 $X_{1,4}$ 의 확률 분포와 같으므로, 수식 (13)과 같은 형태의 다음 Gaussian 확률 분포 형태로 나타낼 수 있다.

$$X_{1,4}^I = X_{1,4}^Q \sim N(0, 2(N-1)\sigma^4). \quad (23)$$

그러므로 X_1^I 와 X_1^Q 의 확률 분포는

$$X_1^I \sim N(N-1, 2(2N-3)\sigma^2 + 2(N-1)\sigma^4), \quad (24)$$

$$X_1^Q \sim N(0, 2\sigma^2 + 2(N-1)\sigma^4) \quad (25)$$

와 같다. $Z = Z^I + Z^Q = |\bar{X}_1|^2 = (X_1^I)^2 + (X_1^Q)^2$ 이고 수식 (24)의 X_1^I 는 평균이 $N-1$ 인 Gaussian 확률 분포를 따르므로, Z^I 는 다음의 non-central chi-square의 분포를 가진다.

$$f_{Z^I}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi z \sigma_{Z^I}^2}} \exp\left(-\frac{z + s^2}{2\sigma_{Z^I}^2}\right) \cosh\left(\frac{s\sqrt{z}}{\sigma_{Z^I}^2}\right), \quad z \geq 0. \quad (26)$$

여기서 non-central parameter인 $s = N-1$ 이고, $\sigma_{Z^I}^2 = \sigma_{X_1^I}^2 = 2(2N-3)\sigma^2 + 2(N-1)\sigma^4$ 이다. 또한 수식 (23)의 X_1^Q 는 평균이 0인 Gaussian 확률 분포를 따르므로, Z^Q 는 다음과 같은 central chi-square 분포를 가진다.

$$f_{Z^Q}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi z \sigma_{Z^Q}^2}} \exp\left(-\frac{z}{2\sigma_{Z^Q}^2}\right), \quad z \geq 0 \quad (27)$$

여기서 $\sigma_{Z^Q}^2 = \sigma_{X_1^Q}^2 = 2\sigma^2 + 2(N-1)\sigma^4$ 이다. 따라서 $Z = Z^I + Z^Q$ 임을 이용하여 Z 의 pdf는 수식 (26)의 non-central chi-square 분포와 수식 (27)의

central chi-square 분포의 독립적인 합의 형태를 가지는 분포를 나타내며, Z 의 pdf와 cdf는 다음과 같이 닫힌 형태로 표현할 수 있다⁷⁾.

$$f_Z(z) = \frac{\exp\left(-\frac{z+s^2}{2\sigma_{Z'}^2}\right)}{2\sigma_{Z'}\sigma_{Z^q}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1/2+i)}{\Gamma(i+1)\Gamma(1/2)} \times \left(\frac{\sqrt{z}(\sigma_{Z^q}^2 - \sigma_{Z'}^2)}{s\sigma_{Z^q}}\right)^i I_i\left(\frac{\sqrt{z}s}{\sigma_{Z'}^2}\right), \quad z \geq 0, \quad (28)$$

$$F_Z(z) = \frac{\sigma_{Z'}}{\sigma_{Z^q}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1/2+i)}{\Gamma(i+1)\Gamma(1/2)} \left(\frac{\sigma_{Z^q}^2 - \sigma_{Z'}^2}{s\sigma_{Z^q}}\right)^i \times \left(1 - Q_{1+i}\left(\frac{s}{\sigma_{Z'}}, \frac{\sqrt{z}}{\sigma_{Z'}}\right)\right), \quad z \geq 0. \quad (29)$$

여기서 수식 (28)의 $I_i(\cdot)$ 는 i -th order modified Bessel function of the first kind를 의미하며,

$$I_i(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{i+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(i+k+1)} \quad (30)$$

와 같이 정의되고, 수식 (29)의 $Q_m(\cdot)$ 은 m -th Marcum Q-function으로

$$Q_m(\alpha, \beta) = \frac{1}{\alpha^{m-1}} \int_{\beta}^{\infty} x^m \exp\left(-\frac{x^2 + \alpha^2}{2}\right) I_m(\alpha x) dx \quad (31)$$

로 정의된다. 또한 $\Gamma(\cdot)$ 는 Gamma function으로

$$\Gamma(\delta) = \int_0^{\infty} t^{\delta-1} e^{-t} dt \quad (32)$$

와 같이 정의되며, 이를 이용하여 MDP를 유도하면 문턱값 v 에 대하여

$$P_M(v) = \int_0^v f_Z(z) dz = F_Z(v) \quad (33)$$

$$= \frac{\sigma_{Z'}}{\sigma_{Z^q}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1/2+i)}{\Gamma(i+1)\Gamma(1/2)} \left(\frac{\sigma_{Z^q}^2 - \sigma_{Z'}^2}{s\sigma_{Z^q}}\right)^i \times \left(1 - Q_{1+i}\left(\frac{s}{\sigma_{Z'}}, \frac{\sqrt{v}}{\sigma_{Z'}}\right)\right)$$

으로 표현된다.

3.3 검증

시뮬레이션을 통해 유도된 pdf를 검증 하기 위해 0dB SNR에서 대역폭 대비 최대 20%의 주파수 오차 (f_{max})를 uniform하게 $[-f_{max}, f_{max}]$ 의 구간에서 발생시켜 실험을 수행하였다. 그림 1은 $N = 26, 50, 75$ 로 N 을 증가시키며 실험을 하였으며, 여기서 $N = 26$ 은 DVB-S2 표준인 SoF 심볼 개수에 해당한다^{8,9)}. 그림에서 ‘Synchronous case’로 표기된 점선

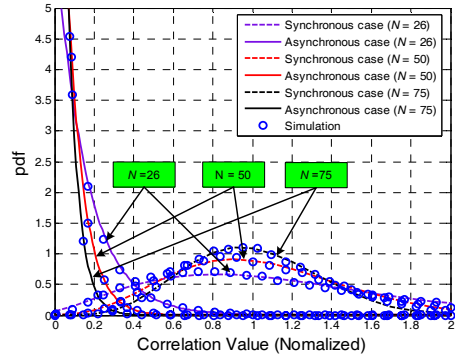


그림 1. 차등 상관 방식의 pdf 검증 ($K = 1$)

은 수식 (26)의 동기 시 상관값 Z 에 대한 pdf이며, ‘Asynchronous case’로 표기된 실선은 수식 (13)의 비 동기 시의 상관값 W 에 대한 pdf이다. 또한 ‘Simulation’으로 표기된 원은 컴퓨터 시뮬레이션 결과를 나타낸 것이다. N 이 증가함에 따라 유도식과 시뮬레이션 결과가 정확히 일치함을 확인할 수 있다.

IV. 크기 합산을 이용한 차등 상관 방식의 오율

본 장에서는 크기 합산을 이용한 차등 상관기 수식 (5)의 상관값 C 에 대하여 근사 pdf 및 cdf를 $K = 2$ 인 경우에 대해 유도한다.

4.1 비 동기 시의 분석

크기 합산을 이용한 $K = 2$ 일 경우의 차등 상관값은 $M = \sum_{k=1}^2 (X_k^I)^2 + (X_k^Q)^2$ 로 표현할 수 있다. 여기서 X_1 과 X_2 는 각각 독립적이라고 가정한다. 크기 합산을 이용한 비 동기 시의 상관값을 $W_M = M$ 이라고 정의 할 때, W_M 의 pdf는 각각의 자유도가 2이고 서로 독립적인 두 개의 central chi-square 분포의 합의 형태인

$$f_{W_M}(w) = \frac{\exp\left(-\frac{w}{2\sigma_{M,2}^2}\right) - \exp\left(-\frac{w}{2\sigma_{M,1}^2}\right)}{2(\sigma_{M,1}^2 - \sigma_{M,2}^2)}, \quad w \geq 0 \quad (34)$$

로 나타낼 수 있다. 여기서 $\sigma_{M,1}^2 = \alpha_1^2 \sigma_{X_1}^2 = \alpha_1^2 \sigma_{X_1^q}^2$ 이고 $\sigma_{M,2}^2 = \alpha_2^2 \sigma_{X_2}^2 = \alpha_2^2 \sigma_{X_2^q}^2$ 이며, cdf는

$$F_{W_M}(w) = 1 - \frac{\sigma_{M,2}^2}{\sigma_{M,2}^2 - \sigma_{M,1}^2} \exp\left(-\frac{w}{2\sigma_{M,2}^2}\right) + \frac{\sigma_{M,1}^2}{\sigma_{M,2}^2 - \sigma_{M,1}^2} \exp\left(-\frac{w}{2\sigma_{M,1}^2}\right), \quad w \geq 0 \quad (35)$$

와 같다^[7]. 이를 이용한 FAR은 $P_F(v) = 1 - F_{W_c}(v)$ 이다.

4.2 동기 시의 분석

동기 시에는 높은 SNR과 큰 N 을 가정하였을 경우 $K = 2$ 일 때, 크기 합산을 이용한 동기 시의 상관값 $Z_M \approx X_1' + X_2'$ 로 근사화 할 수 있다. 이 때 Z_M 의 pdf는 각각의 자유도가 1인 두 개의 서로 독립적인 non-central chi-square 분포의 합의 형태인

$$f_{Z_M}(z) = \frac{\exp\left(-\frac{z+s_1^2}{2\sigma_{M,1}^2} - \frac{s_2^2}{2\sigma_{M,2}^2}\right)}{2\sigma_{M,1}\sigma_{M,2}} \times \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1/2+i+l)}{i!l!\Gamma(1/2+l)} \left(\frac{\sqrt{z} s_2 \sigma_{M,1}^2}{2\sigma_{M,2}^2}\right)^l \times \left(\frac{\sqrt{z}(\sigma_{M,2}^2 - \sigma_{M,1}^2)}{s_1 \sigma_{M,2}^2}\right)^i I_{i+l}\left(\frac{\sqrt{z} s_1}{\sigma_{M,1}^2}\right), \quad z \geq 0 \quad (36)$$

로 표현할 수 있다. 여기서 $s_1 = N-1$, $s_2 = N-2$ 이고, $\sigma_{M,1}^2 = \rho_1^2 \sigma_{X_1}^2$, $\sigma_{M,2}^2 = \rho_2^2 \sigma_{X_2}^2$ 이다. 또한 cdf는

$$F_{Z_M}(z) = \frac{\sigma_{M,1}}{\sigma_{M,2}} \exp\left(-\frac{s_2^2}{2\sigma_{M,2}^2}\right) \times \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1/2+i+l)}{\Gamma(1/2+l)} \times \left(\frac{s_2 \sigma_{M,1}^2}{2\sigma_{M,2}^2}\right)^l \left(\frac{\sigma_{M,2}^2 - \sigma_{M,1}^2}{\sigma_{M,2}^2}\right)^i \times \left(1 - Q_{1+i+l}\left(\frac{s_1}{\sigma_{M,1}}, \frac{\sqrt{z}}{\sigma_{M,1}}\right)\right), \quad z \geq 0 \quad (37)$$

이며^[7], 이를 이용한 MDP는 $P_M(v) = F_{Z_M}(v)$ 와 같이 나타낼 수 있다.

4.3 검증

그림 2는 크기 합산을 이용한 차등 상관값의 pdf를 검증하기 위해 0dB SNR에서 $K = 2$ 및 $\rho_1 = \rho_2 = 1$ 인 경우에 대해 대역폭 대비 최대 20%의 주파수 오차를 uniform하게 발생시켜 실험을 수행한 결과이다. SNR 0dB와 $N = 26$ 의 파라미터를 사용하였으며, 분석과 실험 결과 간의 미세한 차이는 변수 $\{X_k\}$ 간의 비 독립성 관계 때문이다.

4.4 파라미터 평가

수식 (5)에 있는 ρ_k 를 평가하기 위해서 $K = 2$ 일 경우 $\rho_2/\rho_1 = \eta$ 로 정의하고, η 를 0.2, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0의 경우에 대해 ROC 곡선을 이용하여

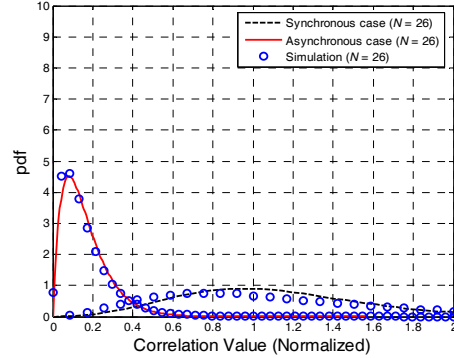


그림 2. 크기 합산을 이용한 차등 상관 방식의 pdf 검증 ($K = 2$)

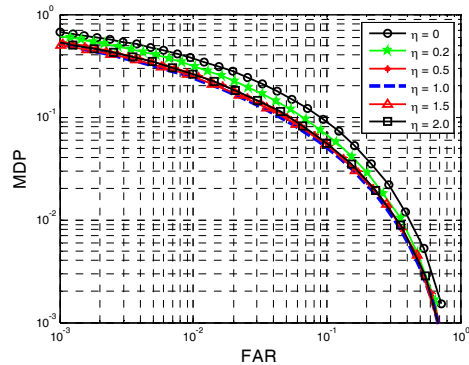


그림 3. 크기 합산을 이용한 차등 상관 방식의 η 의 변화에 따른 성능 비교

그림 3 같이 성능을 비교하였다. 크기 합산을 이용한 차등 상관 방식은 $K = 2$ 일 경우 $\eta = 1$ 에서 최소 오류의 성능을 보였다.

V. 복소 합산을 이용한 차등 상관 방식의 오율

III장에서 유도된 $K = 1$ 및 $\alpha_1 = 1$ 인 경우에 대한 차등 상관 방식의 pdf를 확장하여, 복소 합산을 이용한 상관기 수식 (6)의 상관값에 대한 근사 pdf를 유도할 수 있다. 근사 pdf를 유도하기 위해 수식 (6)에서 X_k ($k = 1, 2, \dots, K$)가 각각 독립적이며, $w_n=0$ 인 상황을 가정한다.

5.1 비 동기 시의 분석

복소 합산을 이용한 차등 상관값 W_c 의 pdf 및 cdf는 수식 (15) 및 (16)과 같은 형태로 표현할 수 있다. 단, 분산값 σ_w^2 대신 $\sigma_{W_c}^2$ 를 대입한다. 여기서 상관값 X_k' 와 X_k^Q 의 분산을 $\sigma_{X_k'}^2 = \sigma_{X_k^Q}^2 = (N-k)/2 + 2(N-k)\sigma^2 + 2(N-k)\sigma^4$ 로 확장할 수 있으며,

X_k ($k = 1, 2, \dots, K$)는 각각 독립적인 Gaussian 확률 분포를 가지므로 W_c 의 분산은

$$\sigma_{W_c}^2 = \sum_{k=1}^K a_k^2 \sigma_{X_k}^2 \quad (38)$$

와 같다. 또한 FAR도 수식 (17)과 같은 형태를 가진다.

5.2 동기 시의 분석

동기 시에도 상관값 X_k^I 와 X_k^Q 의 분산을 $\sigma_{X_k^I}^2 = 2(2N-k-2)\sigma^2 + 2(N-k)\sigma^4$ 와 $\sigma_{X_k^Q}^2 = 2k\sigma^2 + 2(N-k)\sigma^4$ 로 확장할 수 있다. 복소 합산을 이용한 동기 시의 상관값 ZC의 pdf 및 cdf는 수식 (28)및 (29)와 같은 형태이며, 분산값 $\sigma_{Z_c}^2, \sigma_{Z_c^Q}^2$ 대신 Z_c', Z_c^Q 의 분산인

$$\sigma_{Z_c'}^2 = \sum_{k=1}^K a_k^2 \sigma_{X_k^I}^2, \quad \sigma_{Z_c^Q}^2 = \sum_{k=1}^K a_k^2 \sigma_{X_k^Q}^2 \quad (39)$$

를 대입한다. 또한 s 대신 복소 합산의 non-central parameter s_c 를 대입하며, 여기서 $s_c = \sum_{k=1}^K N-k$ 이다. 복소 합산을 이용한 차등 상관 방식의 MDP도 수식 (33)과 같은 형태를 가진다.

5.3 검증

그림 4는 5.1장과 5.2장에서 유도한 복소 합산을 이용한 차등 상관값의 pdf를 검증하기 위해 0dB SNR에서 $K = 2$ 및 $a_1 = a_2 = 1$ 인 경우에 대해 대역폭 대비 최대 20%의 주파수 오차를 uniform하게 발생시켜 실험을 수행한 결과이다. 실험 결과와 근사식 사이의 미세한 차이는 변수 $\{X_k\}$ 간의 비독립성 및 $w_n \neq 0$ 으로 인한 오차이다.

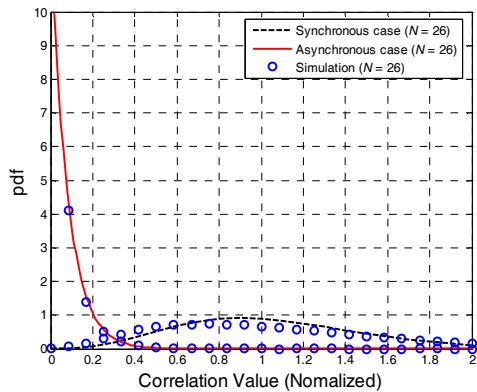


그림 4. 복소 합산을 이용한 차등 상관 방식의 pdf 검증 ($K = 2$)

5.4 파라미터 평가

수식 (6)의 복소 합산을 이용한 차등 상관기의 파

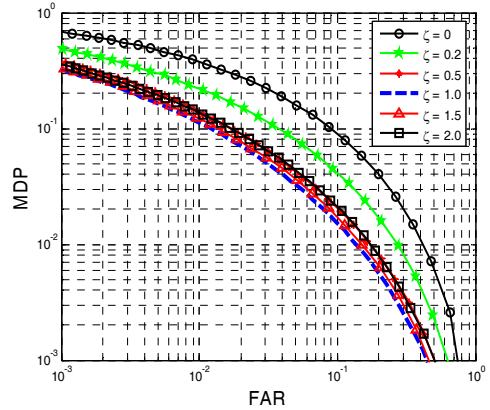


그림 5. 복소 합산을 이용한 차등 상관 방식의 ζ 의 변화에 따른 성능 비교

라미터 a_k 를 평가하기 위해서 $K = 2$ 일 경우 $a_2/a_1 = \zeta$ 로 정의하고, ζ 를 0.2, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0의 경우에 대해 ROC 곡선을 이용하여 그림 5과 같이 성능을 비교하였다. 여기서 $\zeta = 0$ 인 경우는 $K = 1$ 인 경우의 차등 상관기와 같으며, $K = 2$ 로 증가하면서 상관기 성능이 향상되는 것을 알 수 있다. 또한 $K = 2$ 일 경우 $\zeta = 1$ 에서 최소 오율의 성능을 보였다. 따라서 $K = N - 1$ 로 확장하였을 경우 $a_k = 1$ ($k = 1, 2, \dots, N - 1$)일 때 복소 합산을 이용한 차등 상관기의 성능이 향상됨을 알 수 있다.

VI. 결론

본 논문에서는 낮은 SNR과 큰 값의 주파수 오차가 존재하는 환경에서 주파수 오차에 강건한 프레임 동기 성능 분석을 위해 차등 상관 방식의 오율을 유도하였다. 우선 간단한 차등 상관 방식에 대해 pdf와 cdf를 유도한 후, 복소 합산과 크기 합산을 이용한 차등 상관기로 확장하여 비 동기 시에는 exponential 함수를 이용하여 닫힌 형태의 pdf와 cdf를 각각 제시하였다. 또한 동기 시에는 Bessel function과 Marcum Q-function을 이용하여 닫힌 형태의 pdf와 cdf를 각각 나타내었다. 이를 활용하여 초기 동기 성능 획득의 오율 분석을 위한 FAR과 MDP를 유도하였다. 분석 결과는 대역폭 대비 최대 20%의 주파수 오차가 존재하는 환경에서의 0dB SNR 값에서 검증하였으며, 유도된 결과가 컴퓨터 시뮬레이션과 일치함을 확인하였다. 또한 ROC를 이용한 사용 파라미터 별 상관기의 성능의 비교를 통해, 향상된 상관기의 성능을 평가하였다.

