DBpia

시변 신호 부공간 추정을 위한 Prewhitening RLS 기반 PAST (Projection Approximation Subspace-Tracking) 알고리즘

정회원 임 준 석*, 편 용 국**

A Prewhitening RLS based PAST (Projection Approximation Subspace-Tracking) Algorithm for Time Varying Signal Subspace Tracking

Jun-Seok Lim*, Yong-Kug Pyeon** ***Regular Members***

요 약

본 논문에서는 Prewhitening과 가변 망각인자를 사용한 PAST에 기반한 새로운 주성분 분해 알고리즘을 제안한다. Prewhitening 기법과 가변망각인자는 비정재 환경하에서 빠른 계산 능력과 강인성을 갖고 있다. 제안된 알고리즘의 추정 성능은 DOA 추정을 위한 컴퓨터 시뮬레이션으로 증명하였다. 추정결과 기존의 PAST 알고리즘에 비하여 제안된 알고리즘의 성능이 우수함을 입증하였다.

Key Words : PAST, VFF, Prewhitening

ABSTRACT

In this paper, we propose a new PAST algorithm for principle component-extracting. For the performance improvement, we apply prewhitening RLS and variable forgetting factor to the conventional PAST. The prewhitening RLS and the variable forgetting factor make it numerically robust and agile to nonstationary. The estimation capability of the proposed algorithm is demonstrated by computer simulations of DOA(Degree of Arrival). The estimation results of the proposed PAST outperform those of ordinary PAST.

Ⅰ. 서 론

Oja가 [1]에 Hebbian 정의에 근거한 입력 데이터로부터 추출된 후 주성분 분석(PCA)을 제안한 이후로 여러 다양한 알고리즘이 [2],[3]에 제시되었다.

그 중에서도 Yang에 의해서 제안된 PAST (Projection Approximation Subspace-Tracking) 알고리즘은 여러 연구자들이 적극적으로 응용하는 부공간 추정 알고리즘 이다[3]. PAST의 기본적인 아이디어는 RLS 알고리즘을 이용하여 신호 부공간을 예측하고 이를 다시 원신호로 만들어 그 잔차를 최소화하는 접근법이다. 그러나 원래의 PAST 알고리즘은 부공간 추적을 위한 고정망각인자를 사용하기 때문에 시변 환경 및 정재 환경이 혼합된 고속 시변 환경에서는 잘 적응 하지 못한다. 따라서 시변 환경 변화에 잘 적응할 수 있도록 망각인자를 조절하는 가변망각인자의 도입으로 이를 해결할 수 있다. 또한 RLS를 사용하는 PAST 알고리즘은 일반적으로 윈도우 입력 신호 자기상관 행렬의 역행렬 계산에서 불안정해지는 경향이 있다.

$$\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}(n) = \beta^n \delta \mathbf{I} + \sum_{k=1}^{n} \beta^{n-k} \mathbf{x}(k)\mathbf{x}(k) \tag{1}$$

여기서 $\mathrm{X}(k) = [\, x_1(k)\ x_2(k)\ \ldots\ x_N(k)]\mathrm{T}$, $k \geq 1$, 는 입력 신호 행렬이고, N은 시스템 파라미터들의 수, δ는 미소 절대상수, 그리고 β, $0 < \beta < 1$는 망

* 세종대학교 전자공학과 (jslim@sejong.ac.krr), ** 강원도립대학 정보통신과 (pyk12@naver.com)
논문번호 : 09009-0131, 접수일자 : 2009년 1월 31일

www.dbpia.co.kr

각인자이다. 일부 저자들은 수치상 불안정 상태의 최초의 소스가 [4]의 $\mathbf{R}_{xx}(n)$ 나타나듯이 균형의 실패임을 보여주었다. 이런 수치적 불안정은 상관 행렬 $\mathbf{R}_{xx}(n)$를 추정할 때 대칭이 깨지기 때문이라는 것이 알려져 있다[4]. [5]에 이런 점을 고려한 견실화된 RLS가 제안되었다.

본 논문에서는 [5]에 제안된 최소자승 백색화 기법을 PAST에 적용하여 위의 불안정성에 견실함을 더한다. 또 PAST알고리즘이 가지고 있는 단점인 시변 환경에서 성능이 떨어지는 점을 만회하기 위해서 [6]에 제안한 시변 기법을 함께 적용하여 견실화된 새로운 PAST 알고리즘을 제시하고 그것의 추정 성능 향상을 보이고자 한다.

Ⅱ. PAST(Projection Approximation Subspace-Tracking)

PAST 알고리즘은 다음과 같은 비용함수의 최소화에 기반한 것이다.

$$J(\mathbf{W}(n)) = \sum_{i=1}^{n} \beta^{t-i} \left\| \mathbf{x}(i) - \mathbf{W}(n)\mathbf{W}^{H}(n)\mathbf{x}(i) \right\|^{2} \tag{2}$$

여기서 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_N]$은 입력값이고 W(n) 은 신호 부공간을 표현하는 N × r 행렬이다. W(n-1)에서 W(n)로 축차적으로 값을 이끌어내기 위하여 [2]에서 Yang 의 $y(i)$ =$\mathbf{W}^{H}(i\text{-}1)\mathbf{x}(i)$ 으로써 $\mathbf{W}^{H}(n)\mathbf{x}(i)$을 근사하게 된다. 그러면 다음과 같은 변형된 비용함수를 얻게 된다.

$$J(\mathbf{W}(n)) = \sum_{i=1}^{t} \beta^{t-i} \left\| \mathbf{x}(i) - \mathbf{W}(n)\mathbf{y}(i) \right\|^{2} \tag{3}$$

이것은 적응필터 이론에서 흔히 쓰는 지수적으로 가중된 최소자승 비용함수가 되고, 그것을 최소화한다면 다음과 같은 해를 얻게 된다.

$$\mathbf{W}(n) = \mathbf{C}_{\mathbf{xy}}(n)\mathbf{C}_{\mathbf{yy}}^{-1}(n) \tag{4}$$

여기서 $\mathbf{C}_{\mathbf{xy}}(n) = \sum_{i=1}^{n} \beta^{n-i}\mathbf{x}(i)\mathbf{y}^{\mathbf{H}}(i)$, $\mathbf{C}_{\mathbf{yy}}(n) = \sum_{i=1}^{n} \beta^{n-i}\mathbf{y}(i)\mathbf{y}^{\mathbf{H}}(i)$

Ⅲ. 최소 자승 백색화 (Prewhitening) PAST

본 절에서는 최소자승 백색화 기법을 앞에서 제시된 PAST 알고리즘 비용함수에 적용한다.

$$J(\mathbf{W}(n)) = \sum_{i=1}^{n} \beta^{t-i} \left\| \mathbf{x}(i) - \mathbf{W}(n)\mathbf{y}(i) \right\|^{2} \tag{5}$$

기존의 RLS 알고리즘에 기반해서 W(n)를 구한다면 다음과 같다[4].

$$\mathbf{e}(n) = \mathbf{x}(n) - \mathbf{W}(n-1)\mathbf{y}(n), \tag{6}$$

$$\mathbf{W}(n) = \mathbf{W}(n-1) + \mathbf{e}(n)\mathbf{k}(n), \tag{7}$$

$$\mathbf{k}(n) = \frac{\mathbf{C}_{\mathbf{yy}}^{-1}(n-1)\mathbf{y}(n)}{\beta + \mathbf{y}^{T}(n)\mathbf{C}_{\mathbf{yy}}^{-1}(n-1)\mathbf{y}(n)}. \tag{8}$$

식(8)의 $\mathbf{C}_{\mathbf{yy}}^{-1}(n-1)$ 을 $\mathrm{P^T}$(n-1)P(n-1)로 대치하면

$$\mathbf{k}(n) = \frac{\mathbf{P}^{T}(n-1)\mathbf{P}(n-1)\mathbf{y}(n)}{\beta + \mathbf{y}^{T}(n)\mathbf{P}^{T}(n-1)\mathbf{P}(n-1)\mathbf{y}(n)}. \tag{9}$$

[5]에 알고리즘 최소 자승 백색화 기법을 적용하면

$$\mathbf{P}^{T}(n)\mathbf{P}(n) = \mathbf{C}_{\mathbf{yy}}^{-1}(n). \tag{10}$$

RLS 알고리즘에서 $\mathbf{C}_{\mathbf{yy}}^{-1}(n)$ 은 다음과 같이 재귀적으로 표시할 수 있다.

$$\mathbf{C}_{\mathbf{yy}}^{-1}(n) = \frac{1}{\beta}\left[\mathbf{C}_{\mathbf{yy}}^{-1}(n-1) - \frac{\mathbf{C}_{\mathbf{yy}}^{-1}(n-1)\mathbf{y}(n)\mathbf{y}^{\mathbf{T}}(n)\mathbf{C}_{\mathbf{yy}}^{-1}(n-1)}{\beta + \mathbf{y}^{\mathbf{T}}(n)\mathbf{C}_{\mathbf{yy}}^{-1}(n-1)\mathbf{y}(n)} \right] \tag{11}$$

2(11)식의 $\mathbf{C}_{\mathbf{yy}}^{-1}(n)$ 에 $\mathrm{P^T}$(n)P(n)를 대입하면

$$\mathbf{P}^{T}(n)\mathbf{P}(n) = \frac{1}{\sqrt{\beta}}\mathbf{P}^{T}(n-1)\left[\mathbf{I} - \frac{\mathbf{v}(n)\mathbf{v}^{T}(n)}{\beta + \|\mathbf{v}\|^{2}} \right]\mathbf{P}(n-1)\frac{1}{\sqrt{\beta}}, \tag{12}$$

여기서, 백색화된 신호 v(n)은

$$\mathbf{v}(n) = \mathbf{P}(n-1)\mathbf{y}(n). \tag{13}$$

이다. 벡터 v(n)는 다음 특성을 가진다[5]. 즉, 만약 y(n)가 WSS (wide sense stationary) 이라면,

$$\lim_{n\to\infty} E\left\{ \mathbf{v}(n)\mathbf{v}^{T}(n) \right\} \cong (1-\beta)\mathbf{I}. \tag{14}$$

이는 P(n)가 수렴함에 따라, v(n)의 요소들은 서로 상관성이 없고 또 근사적으로 (1-β)에 수렴한다[5]. 이 성질은 일종의 백색화 과정이라고 생각할 수 있다. 식(12)의 오른쪽 변의 대괄호를 다음과 같이 행렬곱으로 분해할 수 있다.

www.dbpia.co.kr

$$\mathbf{B}^T(n)\mathbf{B}(n) = \mathbf{I} - \frac{\mathbf{v}(n)\mathbf{v}^T(n)}{\beta + \|\mathbf{v}\|^2} \quad . \tag{15}$$

그러면 P(*n*)은 다음과 같이 갱신될 수 있다.

$$\mathbf{P}(n) = \frac{1}{\sqrt{\beta}}\mathbf{B}(n)\mathbf{P}(n-1) \quad . \tag{16}$$

(15)의 오른쪽 변은 다음과 같이 변형할 수 있다.

$$\mathbf{B}^T(n)\mathbf{B}(n) = \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{v}(n)\mathbf{v}^T(n)}{\|\mathbf{v}(n)\|^2}\right) + \frac{\beta}{\beta + \|\mathbf{v}(n)\|^2}\frac{\mathbf{v}(n)\mathbf{v}^T(n)}{\|\mathbf{v}(n)\|^2} \tag{17}$$

(17)식에 대칭성과 직교성을 이용하면, $\mathbf{B}^T(n)\mathbf{B}(n)$ 대칭 평방근 인자는

$$\mathbf{B}(n) = \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{v}(n)\mathbf{v}^T(n)}{\|\mathbf{v}(n)\|^2}\right) + \sqrt{\frac{\beta}{\beta + \|\mathbf{v}(n)\|^2}}\frac{\mathbf{v}(n)\mathbf{v}^T(n)}{\|\mathbf{v}(n)\|^2} \tag{18}$$

이다. (16)식에 (18)식을 대입하여 다음과 같은 갱신식을 얻게 된다.

$$\mathbf{P}(n) = \frac{1}{\sqrt{\beta}}\left[\mathbf{P}(n-1) - \varsigma(n)\mathbf{v}(n)\mathbf{v}^T(n)\right] \tag{19}$$

$$\mathbf{u}(n) = \mathbf{P}^T(n-1)\mathbf{v}(n) \tag{20}$$

$$\varsigma(n) = \frac{1}{\|\mathbf{v}(n)\|^2}\left(1 - \sqrt{\frac{\beta}{\beta + \|\mathbf{v}(n)\|^2}}\right) \tag{21}$$

(13)와 (20)을 적용하여 (9)을 새로 표현하면 다음과 같다.

$$\mathbf{k}(n) = \frac{\mathbf{u}(n)}{\beta + \|\mathbf{v}(n)\|^2} \quad . \tag{22}$$

따라서, 식(6)과 (7)을 식(22)과 결합하면, 새로운 백색화 PAST 알고리즘을 얻게 된다. 알고리즘의 복잡함은 기존의 PAST 알고리즘과 유사하나 알고리즘의 견실성은 월등히 향상된다.

Ⅳ. VFF-PAST

2절에서 정리된 PAST 알고리즘은 망각인자 베타에 의해 비정재환경이 조정된다. 실용적인 주성분 추정 상황은 정재/비정재 혼합형 또는 예측할 수 없는 비정재 환경이 되기 쉽다. 왜냐하면 한 개의 고정망각인자는 효과적으로 그런 다양한 상황에 대처할 수 없기 때문이다. 비정재 환경에 대처하기 위하여, 본 절에서는 상관행렬 $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{xx}}(n)$의 향상된 방정식을 기반으로 한 PAST 알고리즘을 기반 가변망각인자를 소개하려한다.

$$\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{xx}}(n) = \beta(n-1)\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{xx}}(n-1) - \mathbf{X}(n)\mathbf{X}^H(n), \tag{23}$$

여기서 $\beta(n)$은 가변망각인자 입니다. 정확히 가변망각인자는 그 자체가 주성분들의 비정재환경에 맞춘다. 가변망각인자는 각각의 샘플링 때마다 최상의 것으로 갱신되고, 추정에러 **J**(*t*)의 분산을 측정한다. 그것은 다음과 같다.

$$J(n) = E\left\{\mathbf{e}^H(n)\mathbf{e}(n)\right\}, \tag{24}$$

여기서,

$$\begin{aligned} e(n) &= X(n) - W(n-1)y(n) \\ &= (I - W(n-1)W^H(n-1)X(n) \end{aligned}$$

(24)는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} J(n) &= tr\{(I - W(n-1)W^H(n-1))R_{XX}(n) \\ &\quad (I - W(n-1)W^H(n-1))\} \\ &= tr\{(I - W(n-1)W^H(n-1)) \\ &\quad (\beta(n-1)R_{XX}(n-1) + X(n)X^H(n)) \\ &\quad (I - W(n-1)W^H(n-1))\} \\ &= \beta(n-1)J(n-1) \\ &\quad + tr\{(I - W(n-1)W^H(n-1)) \\ &\quad (X(n)X^H(n)) \\ &\quad (I - W(n-1)W^H(n-1))\} \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} \beta(t) &= \frac{J(t)}{J(t-1)} \\ &- \frac{tr\{(I - WW^H)X(t)X^H(t)(I - WW^H)\}}{J(t-1)} \end{aligned} \tag{26}$$

[3]에서 (24)가 충분히 수렴하였다면 (27)과 같은 관계를 예상 할 수 있고 이를 이용하여 (28)와 같은 망각인자를 갱신식을 유도할 수 있다.

$$J(n) = J(n-1) = \cdots = J \quad . \tag{27}$$

$$\begin{aligned} \beta(n) &\approx 1 - \alpha tr\left\{\left(\mathbf{I} - \mathbf{W}(n-1)\mathbf{W}^H(n-1)\right)\left(\mathbf{X}(n)\mathbf{X}^H(n)\right)\left(\mathbf{I} - \mathbf{W}(n-1)\mathbf{W}^H(n-1)\right)\right\} \\ &= 1 - \alpha\mathbf{e}^H(n)\mathbf{e}(n) \end{aligned} \tag{28}$$

(29)에서와 같이, 효과적으로 시변 부공간을 추적하기 위해 PAST을 위한 망각인자를 조절할 수 있다.

www.dbpia.co.kr

V. 모의실험

모의실험에서는 비정재 환경 상 R_{xx}에서 계산 오차에 대응하는 강인함과 부공간 추적성능에 대해서 보여준다. 이것을 위해 두개의 다른 크기의 고정 망각인자를 정한다. 큰 크기의 각인자는 R_{xx}를 계산하는데 쓰이는 유효 데이터 길이를 길게 하는 효과가 있고, 작은 크기의 망각인자는 이 망각인자는 이 반대의 영향을 미친다. 이 때문에 시불변 환경에서는 가급적 망각인자가 큰 것을 사용하여 추정 오차를 줄인다. 그러나 시변 환경일 경우 유효데이터 길이가 길면 추정 오차가 커지게 되므로 망각인자를 조절하여 유효데이터 길이를 작게 하여야 한다. 더구나, 시변특성이 시시때때로 변하는 경우는 한가지의 망각인자로 추정하는 것은 좋은 결과를 얻지 못하게 되어 가변 망각인자가 필요하게 된다. 이런 망각인자는 RLS 계산에서 수치적 불안정성의 원인이 되기도 한다. 따라서 견실성이 있는 방법도 요구된다.

다음은 제안된 알고리즘이 시변 환경에 잘 적용되고 또 견실성도 있다는 것을 보이기 위한 예로 시변 DOA 추정을 중심으로 한 몇 개의 시뮬레이션 결과를 제시한다. DOA 추정을 위해 8개의 센서를 가진 선형 균등 배열을 이용함으로서 SNR이 15 dB에서 시변 협대역 밴드 원방소스의 주성분 부공간을 추적하고 그것을 DOA의 추정에 ESPRIT 방법을 적용한다.

본 실험에서는 DOA신호가 150번 타임스텝에 일정각도 -30°에서 다른 각도 -40°로 급격하게 변하는 시나리오를 가정하였다. 그림 1은 제안된 알고리즘의 결과와 0.98과 0.8의 고정망각인자를 사용한 실험 결과를 함께 보여준다. 그림 1을 보면 제안한 알고리즘이 0.98의 고정망각인자를 사용한 경우보다 빠르게 급변하는 방위를 추정하는 것을 보여준다. 그리고 그 결과는 0.8의 고정망각인자를 가지는 경우와 거의 유사한 결과를 보인다. 그러나 이 결과만으로 추정 성능의 우열을 단정할 수 없다. 이를 위해서 그림 2와 그림3의 실험 결과를 추가한다. 그림 2는 추정 에러의 분산을 나타낸다. 그 결과 제안된 알고리즘은 0.8 망각인자를 가지는 PAST 알고리즘과 유사한 시변 적응성을 보이나 더 작은 분산값을 나타내므로 실제로는 더 양질의 결과를 만들다는 것을 알 수 있다. 이것은 0.98 망각인자를 가지는 PAST알고리즘과 그 수준이 거의 같다. 그 이유는 제안된 알고리즘이 갖는 견고함이 역행렬 계산시에 따르는 불안정상태로부터 막아 줄 뿐 만 아니라 가변망각인자 알고리즘이 효과적으로 망각인자를 조정하기 때문이기도 하다. 그림 3은 [4]와[6]에서 보여주듯이 추정된 부공간과 실제의 부공간사이의 얼마

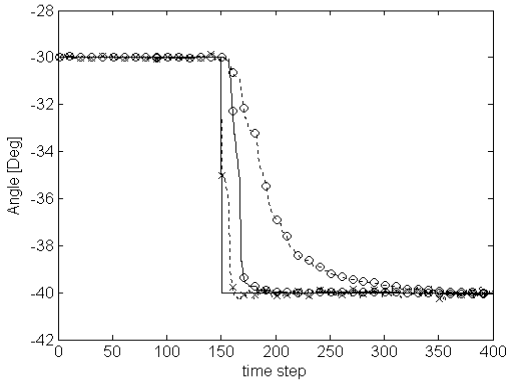

그림 1. 추정결과비교 (점선과 O표시: 망각인자 0.98 일때 PAST 결과, 실선과 O표시 : 제안된 방법, 점선과 x표시: 망각인자가 0.98 일때 PAST)

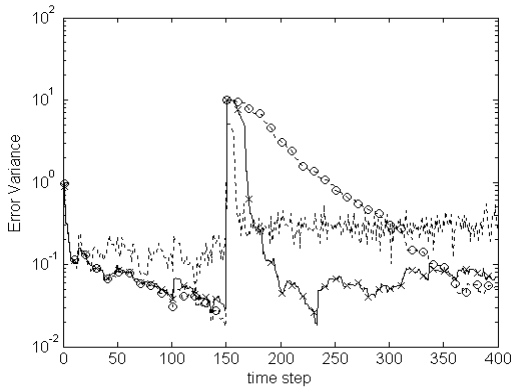

그림 2. 추정오차 및 에러분산비교 (점선과 O표시: 망각인자 0.98 일때 PAST 결과, 실선과 x표시 : 제안된 방법, 점선: 망각인자가 0.98 일때 PAST)

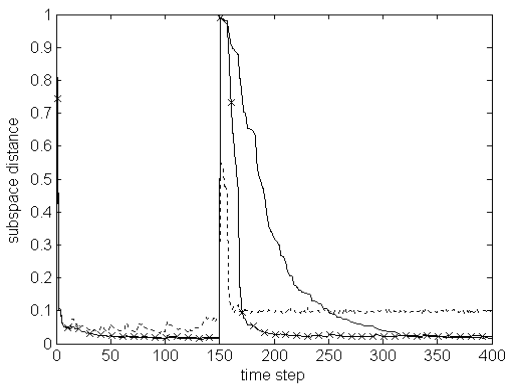

그림 3. 부공간 거리 비교 (실선: 망각인자 0.98 일때 PAST, 실선과 x표시: 제안된 방법, 점선: 망각인자 0.8 일때 PAST)

www.dbpia.co.kr

나 같은 가를 그 떨어진 거리로써 추정 품질을 증명한다. 거리를 나타내는 식은 다음과 같다[4][6].

$$\sin\theta(S,\widetilde{S}) \equiv \left\| (I-P)\widetilde{P} \right\|, \qquad (29)$$

여기서 S는 실제 부공간이고, $\widetilde{S}$ 는 추정된 부공간이다. P는 S에 도달하는 투영행렬이고 $\widetilde{P}$ 는 $\widetilde{S}$ 에 도달하는 투영행렬이다. 그림 3은 제안된 알고리즘이 추정 부공간 거리 면에서나 시변 추적성 면에서 모두 최상의 추정을 제공하고 있음을 보여준다. 0.98의 망각인자를 가지는 PAST알고리즘은 거의 같은 부공간 거리를 보여주지만 시변 추적성은 제안된 알고리즘보다 느리다. 0.8의 망각인자를 가지는 PAST 알고리즘은 빠른 시변 추적성에도 불고하고 추정 부공간의 품질면에서 세 가지 경우 중에 제일 성능이 낮은 것으로 나타난다. 이런 결과를 보면, 제안된 알고리즘이 추정 정확성과 시변 추적성 모두 좋은 능력을 가지고 있음을 보여준다.

Ⅵ. 결 론

본 논문에서는 백색화 기법과 가변망각인자를 가지는 PAST 알고리즘에 기반한 새로운 신호 부공간 추정 알고리즘을 제안한다.

제안된 알고리즘은 기존의 PAST 알고리즘보다 수치적인 강인성과 시변 환경에서의 민첩성을 가진다. 모의실험 결과는 본 논문에서 제안한 알고리즘이 기존의 PAST 알고리즘보다 성능이 우수함을 입증하였다.

참 고 문 헌

〔1〕 Oja, E., “A simplified neuron model as a principal component analyzer,” J. Math. Biol., 15, pp. 267–273, 1982.

〔2〕 Diamantaras, K. I., and Kung. S. Y.: Principal Component Neural Networks—Theory and Applications. Wiley, New York, 1996.

〔3〕 Yang, B., “Projection Approximation Subspace Tracking,” IEEE Trans. Signal Proc., 43, pp. 95-107, 1995.

〔4〕 Haykin, S., Adaptive Filter Theory, 3rd ed. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 1996

〔5〕 Douglas, S.C., “Numerically - robust. O(N2) recursive least-squares estimation using leastsquares prewhitening,” Proceeding of International Conference of Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP00), 1, pp.412–415, 2000.

〔6〕 임준석, 편용국, “시변 부공간 추적을 위한 PAST(Projection Approximation Subspace Tracking) 알고리즘,” 한국통신학회논문지, 제29권, 제8T호, pp.285~289, 2004.

임 준 석 (Jun-Seok Lim) 정회원
제28권 12T호 참조.

편 용 국 (Yong-Kug Pyeon) 정회원
제28권 12T호 참조.

www.dbpia.co.kr