DBpia

몇 개의 불규칙한 LDPC 부호의 Maximum Likelihood(ML) 복호에 대한 성능의 상향 한계와 정점 성능 감쇠 분석

정회원 정 규 혁*

Upper Bounds of Maximum Likelihood (ML) Decoding Performance of a few Irregular LDPC Codes and Peak Degradation Analysis

Kyuhyuk Chung* ***Regular Member***

요 약

본 논문에서는 기존의 단순 한계와 Maximum Likelihood (ML) 추정 입력 출력 무게 분포를 사용하여 몇 개의 불규칙한 LDPC 부호의 ML 복호에 대한 성능의 상향 한계를 구하고 부호의 길이가 길어지면 Belief-Propagation (BP) 복호의 성능이 ML 복호 성능에 단순하게 근접해 간다는 일반적인 견해와는 상반되게 정점 성능 감쇠(Peak Degradation)에 다다르기 이전에는 부호의 길이가 길어지면 오히려 BP 복호의 성능이 ML 복호 성능으로부터 성능 감쇠 폭이 증가하고 정점 성능 감쇠를 지난 후에 일반적인 견해가 적용되는 것을 보인다.

Key Words :Upper Bounds, Irregular LDPC Codes, BP Decoding, Peak Degradation, Simple Bounds

ABSTRACT

This paper presents upper bounds of Maximum Likelihood (ML) decoding performance of a few irregular LDPC codes using the simple bound and ML input output weight distributions and it is shown that contrary to general opinion that as block length becomes longer, BP decoding performance becomes simply closer to ML decoding performance, before peak degradation, as block length becomes longer, BP decoding performance falls behind ML decoding performance more and after peak degradation, general opinion holds.

Ⅰ. 서 론

최근 통신 이론에 있어서 Low Density Parity Check (LDPC) 부호를 위한 반복 복호는[1]-[5] 탁월한 성능 때문에 크나큰 진보를 이루고 있다. 특히, LDPC 부호는[1],[2] 탁월한 성능뿐 아니라 하드웨어 구현의 용이성 때문에 많은 연구가 진행되고 있다. 다수의 모의실험과 성능 한계들이 LDPC 부호의 탁월한 성능을 입증 해주고 있다.

한 논문에서는[6] 균등 분포 인터리버의 가정을 하고 평균 입력 출력 무게 분포를 사용하여 규칙적 LDPC 부호의 cutoff rate 보다 근접한 평균 성능 상향 한계를 구하는 단순 한계(simple bound) 기법이 제시되었다.

추정된 입력 출력 무게 분포와 단순 한계를 사용하여 평균 성능 상향 한계가 아닌 어떤 하나의 규칙적 LDPC 부호의 성능 상향 한계를 구하는 방법이[7] 제시되므로서 몇 개의 불규칙한 LDPC 부호의 성능 상향 한계에 대한 연구가 활성화될 수 있는

※ 이 연구는 2009학년도 단국대학교 대학연구비 지원으로 연구되었음.
* 단국대학교 공과대학 컴퓨터학부 컴퓨터공학전공 (khchung@dankook.ac.kr)
논문번호 : KICS2009-09-382, 논문접수일자 : 2009년 9월 2일, 최종논문접수일자 : 2009년 11월 5일

www.dbpia.co.kr

계기 되었다.

본 논문에서는 기존의 단순 한계와 Maximum Likelihood (ML) 추정 입력 출력 무게 분포를 사용하여 다양한 부호 길이의 몇 개의 불규칙한 LDPC 부호의 ML 복호에 대한 성능의 상향 한계를 구한다. 이렇게 구해진 성능 상향 한계는 Belief-Propagation(BP) 복호 성능과 비교되고 부호의 길이가 길어지면 BP 복호의 성능이 ML 복호 성능에 단순하게 근접해 간다는 일반적인 견해와는 상반되게 정점 성능 감쇠(Peak Degradation)에 다다르기 이전에는 부호의 길이가 길어지면 오히려 BP 복호의 성능이 ML 복호 성능으로부터 성능 감쇠 폭이 증가하고 정점 성능 감쇠를 지난 후에 일반적인 견해가 적용되는 것을 보인다.

본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. II 장에서는 본 논문에서 사용된 기존의 논문들에서 제시된 성능 상향 한계 기법을 요약한다. III 장에서는 다양한 부호 길이의 몇 개의 불규칙한 LDPC 부호의 ML 복호에 대한 성능의 상향 한계와 BP 복호 성능이 비교된다. IV 장에서 본 논문의 결론을 맺는다.

Ⅱ. 단순 한계 기법과 추정 입력 출력 분포

LDPC 부호의 성능은 상당히 큰 블록 길이에서 Shannon의 채널 한계에 근접하다. 그래서 cutoff rate 보다 근접한 성능 한계에 대한 필요성이 증대되었다. 블록 부호의 복호 성능에 대한 그러한 단순 한계(simple bound)가[6] 완성 형태로 구해졌다. 이 성능 한계는 간단한 데 그 이유는 그 최종 단계에서 적분이나 최적화를 요하지 않는다는 것이다.

선형 이진 블록 부호 C를 고려할 때 주어진 코드 C의 ML 복호의 Bit-Error Rate(BER)에 대한 상한 한계는 다음과 같다[6].

$$P_b \le \sum_{d=d_{\min}}^{N-K+1} \min\{e^{-NE(c,d)}, e^{Ng(\delta)} Q(\sqrt{2cd})\} \quad (1)$$

위 식 (1)에서 $c \equiv r(E_b/N_0)$로 정의되는데 여기서 E_b는 정보 비트 에너지이고 N_0는 단방향 잡음 전력 밀도이고 $r \equiv K/N$로 정의되며 N은 부호 길이이고 K는 정보 길이이고 $d_{\min}$은 부호의 최소 거리이다. 또 d는 부호의 Hamming 무게이고 $\delta \equiv d/N$으로 정의된다.

마지막으로 식 (1)에서 사용된 함수의 정의는 $Q(\cdot)$는 complementary unit variance Gaussian 분포 함수이고

$$g(\delta) \equiv \frac{1}{N} \ln\left\{\sum_w \frac{w}{K} A_{w,d}\right\} \quad (2)$$

여기서 $A_{w,d}$는 w와 d를 가지는 부호의 개수이고 w는 정보 블록의 Hamming 무게이고,

$$c_0(\delta) \equiv (1 - e^{-2g(\delta)}) \frac{1-\delta}{2\delta} \quad (3)$$

$$f(c,\delta) \equiv \sqrt{\frac{c}{c_0(\delta)} + 2c + c^2} - c - 1 \quad (4)$$

$E(c,d)$ 는 만약 $c_0(\delta) < c < \frac{e^{2g(\delta)}-1}{2\delta(2-\delta)}$ 이면

$E(c,d) \equiv \frac{1}{2} ln[1 - 2c_0(\delta) f(c,\delta)] + \frac{c f(c,\delta)}{1 + f(c,\delta)}$

그렇지 않다면 $E(c,d) \equiv -g(\delta) + \delta c$ 이다.

단순 한계를 몇 개의 부호에 적용하기 위해서는 입력 출력 무게 분포 $A_{w,d}$를 계산해야만 한다. 그러나 이 계산은 현재로서는 거의 불가능하다. 그래서 ML 추정 입력 출력 무게 분포를[7] 사용하며 다음과 같이 주어진다.

$$\widehat{A}_{w,d} = \binom{K}{w} \frac{k}{N_s} \quad (5)$$

여기서 N_s는 생성한 표본 부호의 개수이고 k는 정보 블록의 Hamming 무게 w를 가지는 N_s개의 부호 중 부호의 Hamming 무게 d를 가지는 부호의 개수이다.

또한 ML 추정 입력 출력 무게 분포를 계산하기 위해서는 LDPC 부호기가 필요하며 LDPC 부호기는 Gaussian elimination을 사용하여 구할 수 있다. 표본 부호는 무작위로 생성한다.

Ⅲ. 성능 상향 한계, 모의실험, 그리고 정점 성능 감쇠

본 모의 실험에서는 최대 변수 정도 d_v=9인[8] 불규칙한 LDPC 부호를 고려한다. 그림 1은 여러 가지 블록 길이의 몇 개의 불규칙한 LDPC 부호의

www.dbpia.co.kr

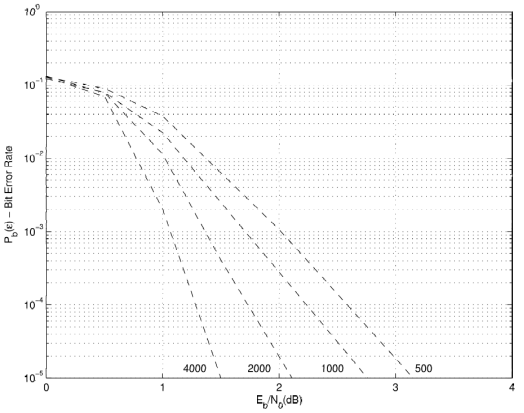

그림 1. BP 복호 성능 (N = 4000, 2000, 1000, and 500.)

BP 복호 성능을 보여 주고 있다. 블록 길이는 구체적으로 500, 1000, 2000, and 4000이다. 부호율은 1/2이다. 최대 반복 복호 횟수는 50이 사용되었다. 부호기를 통해 부호를 얻었으므로 BER은 정보 비트에 대해서만 계산되어질 수 있다. 패리티 첵 행렬은 완전하게 무작위로 생성하지 않고 변수 정도가 2인 노드들은 루프가 없도록 만들었고 모두 비정보 비트에 해당하고 다른 변수 정도들에서는 짧은 사이클들을 피하였다. 그림 2는 기존의 단순 한계와 ML 추정 입력 출력 무게 분포를 사용하여 몇 개의 불규칙한 LDPC 부호의 성능 상향 한계를 보여 주고 있다.

ML 추정 입력 출력 무게 분포를 계산하기 위해서 $w=1,2,\cdots,K$ 에 대해서 각각 N_s=10000 개의 부호를 무작위로 생성하였다. 그림 3에서는 10^{-5}의BER에서 여러 가지 블록 길이에 대한 성

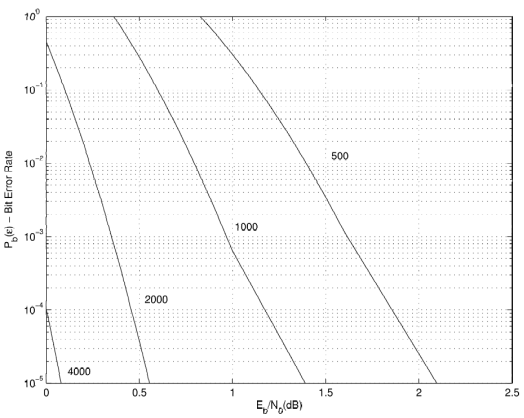

그림 2. 성능 한계 (N = 4000, 2000, 1000, and 500.)

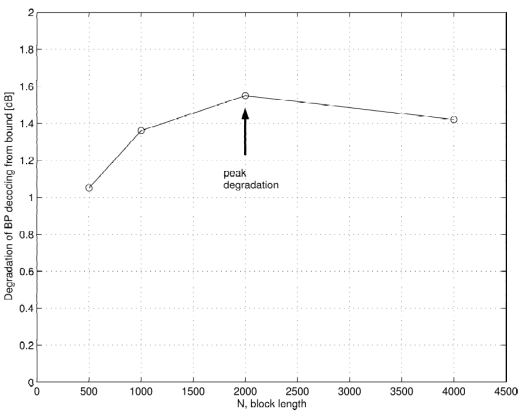

그림 3. 10^{-5}의 BER에서 성능 한계로부터 BP 복호의 E_b/N_0 dB 성능 감쇠와 N=2000 에서 정점 성능 감쇠 (peak degradation)

능 상향 한계로부터 BP 복호의 성능 감쇠를 E_b/N_0 dB로 나타내었다. 그림 3.에서 주목할 만한 점은 부호의 길이가 길어지면 BP 복호의 성능이 ML 복호 성능에 단순하게 근접해 간다는 일반적인 견해와는 상반되게 정점 성능 감쇠(Peak Degradation)에 다다르기 이전에는, 다시 말해 $5\times 10^{2}\le N\le 2\times 10^{3}$ 인 블록길이에서는 부호의 길이가 길어지면 오히려 BP 복호의 성능이 ML 복호 성능으로부터 성능 감쇠 폭이 증가하고 정점 성능 감쇠, 즉 $N=2\times 10^{3}$, 를 지난 후에 일반적인 견해가 적용된다는 것이다.

Ⅳ. 결 론

본 논문에서는 기존의 단순 한계와 ML 추정 입력 출력 무게 분포를 사용하여 몇 개의 불규칙한 LDPC 부호의 ML 복호에 대한 성능의 상향 한계를 구하였다. 그리고 부호의 길이가 길어지면 BP 복호의 성능이 ML 복호 성능에 단순하게 근접해 간다는 일반적인 견해가 관찰될 것으로 예상했었으나 처음 기대와는 상반되게 정점 성능 감쇠에 다다르기 이전에는 부호의 길이가 길어지면 오히려 BP 복호의 성능이 ML 복호 성능으로부터 성능 감쇠 폭이 증가하고 정점 성능 감쇠를 지난 후에 일반적인 견해가 적용되는 것을 보였다. 이러한 새로운 분석은 여러 가지 측면에 유용하게 적용될 수 있을 것으로 예상된다. 예를 들어, 불규칙한 LDPC 부호의 정도 분포가 주어 졌을 때 정점 성능 감쇠 부근의 블록 길이는 피하는 것이 바람직하다는 부호 길

www.dbpia.co.kr

이 선택의 하나의 지표가 될 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

〔1〕 R. Gallager, "Low density parity check codes," MIT press, 1963.

〔2〕 D. J. C. MacKay, "Good error-correcting codes based on very sparse matrices," *Electronics Letters*, vol. 33, March 1997, pp. 457 - 458.

〔3〕 C. Berrou and A. Glavieux, "Near optimum error correcting coding and decoding: turbo-codes," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 44, October 1996, pp. 1261 - 1271.

〔4〕 S. Benedetto, D. Divsalar, G. Montorsi, and F. Pollara, "Serial concatenation of interleaved codes: performance analysis, design, and iterative decoding," *IEEE Trans. Inform. Theory*, May 1998, pp. 909 - 926.

〔5〕 L. R. Bahl, J. Cocke, F. Jelinek, and J. Raviv, "Optimal decoding of linear codes for minimizing symbol error rate," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-20, March 1974, pp. 284 - 287.

〔6〕 D. Divsalar, "A simple tight bound on error probability of block codes with application to turbo codes," *TMO Progress Reports* 42-139, Jet Propulsion Lab, November 1999.

〔7〕 K. Chung and J. Heo, "Upper bounds for the performance of turbo-like codes and low density parity check codes," *KICS Journal of Communications and Networks,* vol. 10, no. 1, March 2008, pp. 5 - 9.

〔8〕 T. Richardson, A. Shokrollahi, and R. Urbanke, "Design of capacity-approaching low-density parity-check codes," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 47, Feb. 2001, pp. 619 - 637.

정 규 혁 (Kyuhyuk Chung) 정회원

1997년 2월 성균관대학교 전자 공학과 졸업

1998년 12월 University of Southern California 전기공학 석사

2003년 12월 University of Southern California 전기공학 박사

1999년 8월 ~ 2000년 5월 미국 Integrated Device Technology, Inc., Member of Technical Staff

2001년 5월 ~ 2002년 5월 미국 TrellisWare Technology, Inc., Senior Engineer

2004년 2월 ~ 2005년 8월 LG전자 이동통신기술연구소 표준화그룹 선임연구원

2005년 9월 ~ 현재 단국대학교 공과대학 컴퓨터학부 컴퓨터공학전공 조교수

<주관심분야> Channel coding, Iterative detection, LDPC codes, Turbo codes, Near-channel capacity approaching codes

www.dbpia.co.kr