기울기 평균 벡터의 근거한 시변 스텝사이즈 CMA 등화기에 관한 연구

정회원 임 준 석*, 편 용 국**

A Variable Step Sized Constant Modulus Algorithm Based on an Averaged Gradient

Jun-Seok Lim*, Yong-Kug Pyeon** *Regular Members*

요 약

블라인드 채널 등화기의 일종인 CMA(Constant Modulus Algorithm)방식은 미리 스텝 사이즈를 정하여야 한다. 그러나 한번 정하면 중도에 수정할 수 없어서 채널 상황이 달라짐에 따라 수시로 고칠 수 없다. 본 논문은 새로운 가변 스텝사이즈 CMA 알고리즘을 제안한다. 이를 위해서 새로운 CMA 비용함수를 제안하고 그에 대한 기울기의 평균을 사용하도록 한다.

Key Words : Blind Equalization, CMA, VSS-CMA

ABSTRACT

CMA(Constant Modulus Algorithm) is a kind of blind channel equalization that it must determine step-size beforehand. But it is unable to fix in different channel situations frequently because it should never be corrected by the wayside once it decided. In this paper we propose a new variable step size CMA Algorithm. To achieve this we propose new CMA cost function and use average of its gradient.

Ⅰ. 서 론

순간 기울기를 이용한 알고리즘을 이용한 블라인드 채널 등화기법 중에서 CMA 방식은 여러 응용에서 성공적으로 응용되고 있는 기법이다. CMA는 LMS와 같이 계산량이 적어서 단순한 알고리즘으로도 유명하다. CMA는 LMS와 마찬가지로 순간 기울기에 스텝 사이즈를 곱한 만큼 갱신되는 형태를 취한다. 갱신에 사용되는 스텝사이즈는 알고리즘 전체 성능을 좌우하게 된다. 예로 수렴 속도 및 수렴 후 오류 크기(misadjustment)를 좌우하게 된다.

일반적으로 스텝사이즈가 작으면 수렴 속도가 느리지만 수렴 후의 오류 크기가 작다. 반면 스텝사이즈가 크면 수렴 속도가 빠르지만 수렴 후 오류가 크게 된다[1]. 보통 알고리즘 사용자들은 알고리즘을 적용할 상황에 맞춰서 미리 알맞은 스텝 사이즈를 설정하려고 노력한다. 그러나 미리 예상한 상황이 유지 되지 않고 알고리즘이 운용되는 상황이 변하게 되면 알고리즘의 성능이 미리 예상한 수준에 못 미치게 되는 일이 벌어진다. 이런 현상을 개선하기 위해서 스텝 사이즈를 상황에 따라 변화시키고자 하는 연구가 진행되어 왔다.

예로 Kwong과 Johnston은 가변 스텝 사이즈 기법을 적용한 LMS를 연구하였다. 이 연구에서는 순간 자승 오차로부터 스텝 사이즈를 조절하도록 만들었다[2]. Shin과 Sayed는 각 시간 스텝마다의 등화기 가중치 벡터의 평균 자승 편이를 최소화하는 방식으로 스텝 사이즈를 가변 하는 알고리즘을 제안 하였다[3].

* 세종대학교 전자공학과 (jslim@sejong.ac.kr), ** 강원도립대학 정보통신과(ykpyeon@gw.ac.kr)
논문번호 : 10021-0402, 논문제출일자 : 2010년 4월 2일

그리고 Malenovsky 등은 지수함수적으로 평균화된 기울기 벡터를 사용하는 가변 스텝 사이즈를 적용한 LMS를 제안 하였다[4].

본 논문에서는 Malenovsky 등이 제안한 지수함수적으로 평균화된 기울기 벡터를 사용하는 가변 스텝 사이즈를 적용한 CMA 알고리즘을 제안한다. 그리고 시뮬레이션을 통해서 그 성능을 기존의 고정 스텝 사이즈를 사용하는 경우와 비교한다.

Ⅱ. Constant Modulus Algorithm

블라인드 등화기 중 하나인 CMA는 다음과 같은 목적 함수를 최소화하는 계수 벡터를 구해서 이를 등화기의 계수 벡터로 삼는 방법이다.

$$J_s = (W^H(n)X(n)X^H(n)W(n) - R_2)^2 \tag{1}$$

식(1)의 기울기를 구하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial W^*} &= 2(W^H(n)X(n)X^H(n)W(n) - R_2) \\ &\quad \bullet\ X(n)X^H(n)W(n) \\ &= 2X(n)(|y(n)|^2) - R_2)y^*(n)\end{aligned} \tag{2}$$

여기서,

$$X^T(n) = [x(n), x(n-1), .., x(n-N+1)]$$

또, $y(n) = W^H(n-1)X(n)$이다.

위 식(2)를 사용하여 등화기 벡터의 갱신 식을 구하면 아래 식 (3)을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}W(n+1) &= W(n) - \mu\frac{\partial J}{\partial W^*} \\ &= W(n) - \mu X(n)(|y(n)|^2 - R_2)y^*(n)\end{aligned} \tag{3}$$

서론에서 언급한 것과 같이 갱신식의 갱신 정도는 스텝 사이즈로 조절된다.

Ⅲ. 가변 스텝사이즈 CMA

식(3)의 고정 스텝 사이즈를 상황에 따라 변동하는 가변 스텝사이즈로 바꾸기 위하여 다음과 같이 식(1)의 목적함수를 변형된 목적 함수로 만들고 이로부터 CMA를 위한 가변 스텝사이즈를 도출한다.

3.1 변형된 목적 함수

$$J(n) = \sum_{k=0}^{n} \lambda^{n-k}(W^H(n)X(k)X^H(k)W(n) - R_2)^2 \tag{4}$$

위와 같은 목적함수를 아래와 같이 약간의 오차를 감수하고 근사화 한다. 이런 방법은 이미 Chen에 의해서 블라인드 빔형성기 분야에서 사용하는 근사화 방법이다[5].

$$X^H(k)W(n) \rightarrow X^H(k)W(k) \tag{5}$$

$$Z(k) = X(k)X^H(k)W(k) \tag{6}$$

$$\tilde{J}(n) = \sum_{k=0}^{n} \lambda^{n-k}(W^H(n)Z(k) - R_2)^2 \tag{7}$$

3.2 평균 기울기 벡터를 사용한 가변 스텝 사이즈

위 식 (7)처럼 근사화된 목적함수를 등화기 계수 벡터로 미분하면 다음과 같은 축차 방정식을 얻을 수 있다. 이 방정식으로부터 일종의 이동 평균 처리를 하는 효과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}\nabla\tilde{J}(n) &= \sum_{k=0}^{n} \lambda^{n-k}(Z(k)Z^H(k)W(n) \\ &\quad - \sum_{k=0}^{n} \lambda^{n-k}(R_2 Z(k)) \\ &= \lambda\nabla\tilde{J}(n-1) + Z(n)(Z^H(n)W(n) - R_2)\end{aligned} \tag{8}$$

위 식(8)을 $\nabla\tilde{J}(n) = g(n)$로 대치하면 다음과 같은 벡터 갱신 식을 얻을 수 있다.

$$g(n) = \lambda g(n-1) + Z(n)(Z^H(n)W(n) - R_2) \tag{9}$$

또 식(7)를 다음과 같이 식(3)의 갱신 식을 대입하면 스텝 사이즈에 대한 새로운 식을 얻을 수 있다.

$$\tilde{J}(n) = \sum_{k=0}^{n} \lambda^{n-k}\left(\left(W^H(n-1) - \mu^*\left(\frac{\partial J_s}{\partial W^*}\right)^H\right)Z(k) - R_2\right)^2 \tag{10}$$

위 식을 스텝 사이즈에 대해 미분하면 스텝 사이즈

에 대한 최소치를 내는 스텝 사이즈를 구하면 다음과 같은 가변 스텝 사이즈를 구할 수 있다.

$$\frac{\partial \tilde{J}(n)}{\partial \mu^*} = -\left(\frac{\partial J_s}{\partial W^*}\right)^H R_Z\left(W(n-1) - \mu\left(\frac{\partial J_s}{\partial W^*}\right)\right) + R_2\left(\frac{\partial J_s}{\partial W^*}\right)^H E(Z) = 0 \quad (11)$$

$$\mu = \left\{\left(\frac{\partial J_s}{\partial W^*}\right)^H \nabla \tilde{J}(n)\right\} / \left\{\frac{\partial J_s}{\partial W^{*H}} R_2(n)\left(\frac{\partial J_s}{\partial W^*}\right)\right\} \quad (12)$$

3.3 새로운 가변 스텝 사이즈 CMA

위 식(12)에서 얻은 가변 스텝 사이즈를 적용한 CMA의 등화 계수 벡터 갱신 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} W(n+1) &= W(n) - \mu(n)\frac{\partial J}{\partial W^*} \\ &= W(n) - \mu(n)X(n)(|y(n)|^2 - R_2)y^*(n) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\mu(n) = \left\{\left(\frac{\partial J_s}{\partial W^*}\right)^H g(n)\right\} / \left\{\left(\frac{\partial J_s}{\partial W^*}\right)^H R_Z(n)\left(\frac{\partial J_s}{\partial W^*}\right)\right\} \quad (14)$$

Ⅳ. 시뮬레이션 및 결과

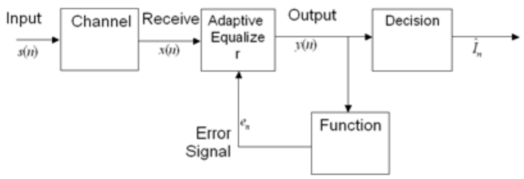
본 절에서는 위에서 제안한 가변 스텝 사이즈 CMA에 대한 성능을 시뮬레이션을 통하여 검증하려고 다음과 같은 통신 환경을 가정한다.

4.1 설정된 시뮬레이션 환경

시뮬레이션을 위해서 아래와 같은 채널을 사용하였다[1].

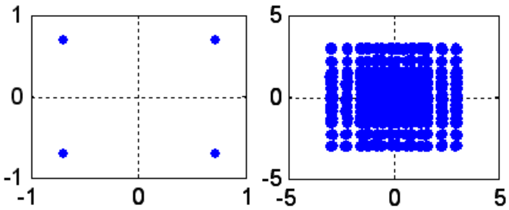
$$C(Z) = 0.5 + 1.2Z^{-1} + 1.5Z^{-2} - Z^{-3} \quad (15)$$

성능의 비교를 위해서 통산적인 CMA와 제안된 CMA를 같은 채널을 통과한 수신 신호를 가지고 수렴성과 수렴후 성상도로 비교하였다. 등화기 각각의 길이는 35로 동일하고, 신호대 잡음비는 30dB로 그리고 고정 스텝 사이즈는 0.0001로 하였다.

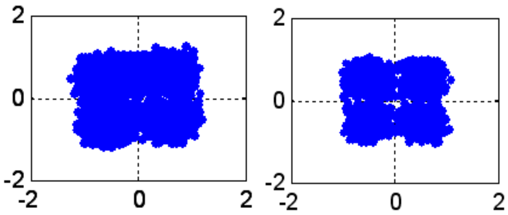


4.2 시뮬레이션 결과

4.1과 같이 설정된 환경하에서 실험한 결과는 그림1과 그림2에 도시 하였다. 그림1의 (a)는 본 신호의 성상도이고, (b)는 채널을 통과하고 수신된 신호의 성상도이다. (c)는 고정 스텝 사이즈를 사용한 CMA로 등화한 결과 신호의 성상도이며, (d)는 가변 스텝 사

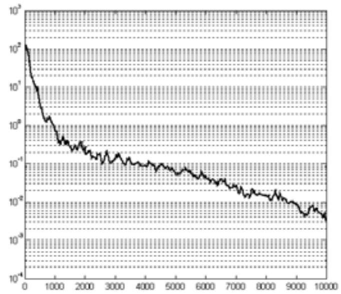


(a) 원 신호 성상도 (b) 수신 신호 성상도

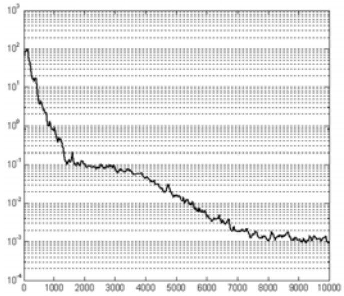


(c) 등화 후 성상도 (통산적인 CMA) (d) 등화 후 성상도 (제안된 알고리즘)

그림 1. 성상도를 통한 등화기 성능 비교



(a) 통산적인 CMA의 수렴 곡선



(b) 제안된 CMA의 수렴 곡선

그림 2. 수렴 곡선을 이용한 성능 비교

이즈 CMA의 등화 결과이다. 이 결과를 보면 상대적으로 성상도 분포가 우수함을 알 수 있다. 그림 2는 시간에 따라 수렴되는 성능을 비교하였다. 그림 2의 (a)는 통산적인 CMA의 수렴 곡선이고, (b)는 제안된 알고리즘의 수렴 곡선이다. 두 곡선을 보면 스텝 사이즈가 가변 되는 제안된 방법이 수렴 후 오차가 작음을 알 수 있다.

참 고 문 헌

〔1〕 A.H.Sayed, *Fundamentals of Adaptive Filtering*, Wiley,NJ,2003

〔2〕 R.H. Kwong and E. W. Johnston, "A Variable Step Size LMS Algorithm," IEEE Trans. on Signal Processing, Vol.40, Jul. 1992, pp.1633~1642.

〔3〕 H.C. Shin and A. H. Sayed, "Variable-Step NLMS and Affine Projecion Algorithms," IEEE Signal Processing Letter, Vol.11, No.2, Feb. 2004, pp.132~135.

〔4〕 Vladimir Malenovsky, Zdenek Smekal and Ivan Koula, "Optimal Step-Size LMS Algorithm Using Exponentially Averaged Gradient Vector," EUROCON 2005, pp.1554~1557

〔5〕 Yuxin Chen, Tho Le-Ngoc, Benoit Champagne, and Changjiang Xu, "Recursive Least Squares Constant Modulus Algorithm for Blind Adaptive Array," IEEE Trans. on Signal Processing, Vol.52, No.5, MAY 2004, pp.1452~1456

임 준 석 (Jun-Seok Lim) 정회원

제28권 12T호 참조.

편 용 국 (Yong-Kug Pyeon) 정회원

제28권 12T호 참조.