

# 주파수영역 오차함수의 모델링과 분석을 통한 제로위상 FIR 필터 설계

종신회원 전 준 현\*

## Design of Zero-phase FIR Filters Through the Modeling and Analysis of A Frequency-domain Error Function

Joonhyeon Jeon\* *Lifelong Member*

요 약

MAXFLAT(maximally flat) FIR 필터 설계는 폐쇄형 솔루션을 제공하는 장점이 있으나 설계의 정확성을 위하여 평탄차수를 정확하고 효율적으로 결정하는 문제가 아직 남아 있다. 본 논문에서는 폐쇄형 솔루션에서 주파수영역 오차함수를 모델링하고 분석하므로써 직접적이고 정확하게 평탄차수를 결정하는 방법을 제안하였다. 마지막으로 주파수영역 오차함수를 바탕으로 제안한 차단주파수와 의 최소거리 방식이 기존의 Herrmann 방식에 비해 매우 정확하고 효율 적이라는 것을 입증하였다.

**Key Words** : MAXFLAT FIR, nonrecursive filter, zero-phase filter, FIR, digital filter

ABSTRACT

Maximally flat (MAXFLAT) FIR filter design provides the advantage of giving a closed-form solution, but there still remains a problem of exactly and efficiently choosing the order of flatness for the accurate design of filters. This paper provides, through the modeling and analysis of a frequency-domain error function in the closed-form solution, how to determine the order of flatness. A proposed method, based on the frequency-domain error function, is accomplished by computing a minimum distance between its peak frequency and specified cutoff frequency. It is also shown that the proposed scheme is computationally efficient and accurate than the empirical formula given by Herrmann

### I. 서 론

일반적인 MAXFLAT(maximally flat) FIR(Finite Impulse Response) 필터 설계는 폐쇄형(closed form)에서 주파수 응답함수(frequency response function)를 제공하는 장점이 있으나 아직까지 차단주파수오차(cutoff frequency error)가 발생하는 설계적인 문제점이 남아 있다<sup>[1-7]</sup>. 이것은 기존의 폐쇄형 솔루션(closed form solution)들이 설계된 필터의 통과대역(pass

band)과 정지대역(stop band)에서 MAXFLAT 진폭응답을 완벽하게 구현하지만, 폐쇄형에서 필터 평탄차수  $K$ 의 부정확성으로 인하여 천이대역(transition band)에서 원하는 차단주파수응답(desired cutoff frequency response)을 제공하지 못하기 때문이다<sup>[4-7]</sup>. 따라서 필터 설계에서 정확히 요구된 필터차단주파수(filter cutoff frequency response)를 갖는 MAXFLAT FIR 필터들을 얻기 위해서는 주어진 필터차수  $2N$ 과 차단주파수에 대해  $K$ 을 정확하게 결정할 수 있는 분명

※ 본 논문은 교육과학기술부 지식경제부의 출연금으로 수행한 출연금으로 수행한 산학협력중심대학육성사업의 연구 결과입니다.

\* 동국대학교 서울캠퍼스 공과대학 컴퓨터정보통신공학부 (memory@dgu.edu)

논문번호 : KICS2011-01-036, 접수일자 : 2011년 1월 13일, 최종논문접수일자 : 2011년 6월 23일

한 관계식(accurate expression)이 필요하다. 그럼에도 불구하고 대부분의 방법들은 다양한 폐쇄형 함수들을 제시 하였으나 근사화된  $K$ 을 구하는 경험적인 관계식(empirical relation)들을 사용하였다<sup>4,7)</sup>. 이 경우 설계된 필터의 진폭응답에서 심각한 차단주파수 오류가 발생하며, 정확한 진폭응답을 요구하는 디지털 신호처리 시스템에서 많은 문제가 발생하게 된다. Herrmann<sup>4)</sup>이  $K$  결정을 위한 경험적인 관계식을 발표한 이래 많은 설계 방식들에서 그의 공식을 사용하거나 정확도를 높이기 위한 분석이 이뤄졌다<sup>6,7)</sup>. 예로서 Miller<sup>5)</sup>와 Thajchayapong 등은 Herrmann이 제안한 경험적 관계식을 수정 없이 그대로 사용하였으며<sup>6)</sup>, 또한 RAJAGOPAL 등은 Herrmann이 사용한 경험적 관계식에 대한 이론적 분석을 제공하였으나 문제 해결 방법은 제시하지 않았다<sup>7)</sup>. 최근에 발표된 일반화된 폐쇄형 솔루션(Generalized closed-form solution)<sup>8)</sup>은 필터의  $N$ 과  $K$ 에 관계없이 “cuoff-error free”을 갖는  $N$ 개의 선형위상 필터들을 얻을 수 있는 있으나, MAXFLAT 진폭응답을 갖는 하나의 필터를 얻기 위한  $K$ 의 결정 방식이 간접적이고 경험적 관계식일 뿐만 아니라 복잡한 단점이 있다<sup>8)</sup>. 이와 같이 현재까지 발표된 MAXFLAT FIR 필터 설계 방식들에서 폐쇄형 솔루션들은 성공적으로 제안되었으나 필터를 정확하게 구하기 위한  $K$ 의 결정에 대한 문제점은 아직 남아 있음을 알 수가 있다. 따라서 본 논문에서는  $K$ 을 명료하고 정확하게 결정하는 방법을 도출하기 위하여 참고문헌 [8]의 발전된 폐쇄형 솔루션을 수정 보완하여 주파수영역 오차함수를 모델링(frequency-domain error function)하고 분석을 하였다. 또한 이를 바탕으로 기존에 가장 많이 알려진 Herrmann의 경험적 관계식을 분석하고 문제점을 규명하였다. 마지막으로 주파수영역 오차함수를 기반으로 제안된 차단주파수와의 최소거리 방식을 Herrmann<sup>4)</sup>과 참고문헌 [8]의 폐쇄형 솔루션에 적용하여 성능을 평가 분석하였다.

제2장에서는 기존의 MAXFLAT FIR 필터 설계방식들의 폐쇄형 솔루션에 대한 분석과 평탄차수 결정시의 문제점을 설명하였으며, 제3장에서는 본 논문에서 제시한 주파수영역 오차함수의 모델링과 분석을 하였으며, 이를 바탕으로 평탄차수 결정을 위한 차단주파수와의 최소거리 방식을 제안하였다. 제4장에서는 제안한 방식에 대한 성능을 평가하였으며, 끝으로 제5장에서는 결론을 맺었다.

## II. 기존의 MAXFLAT FIR 필터 설계 방식 분석

### 2.1 폐쇄형 다항식

일반적으로 설계수가 대칭이고 제로위상을 갖는  $2N$ 의 필터 차수의 저역통과 FIR 필터의 전달함수  $H(z)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$H(z) = \sum_{n=0}^{2N} h_n z^{-N+n} \quad (1)$$

여기서  $h_n = h_{2N-n}$ 이다. 이 필터의 주파수응답은  $z = e^{jw}$ 을 대입하므로써 다음과 같이 표현될 수가 있다.

$$H(e^{jw}) = h_N + 2 \sum_{n=1}^N h_{N-n} \cos(nw) \quad (2)$$

이때 저역통과 FIR 필터가 통과대역 과 저지대역에서 MAXFLAT한 진폭응답(magnitude response)을 갖기 위해서는 필터의 진폭응답 함수  $H(w)$ 가 다음과 같은 조건들을 만족해야 한다<sup>4,8)</sup>.

$$\left[ \frac{\partial^k H(e^{jw})}{\partial w^k} \right]_{w=0} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, 2(N-K)+1 \quad (3)$$

$$\left[ \frac{\partial^k H(e^{jw})}{\partial w^k} \right]_{w=\pi} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, 2K-1 \quad (4)$$

여기서  $N-K$ 와  $K$ 는  $w=0$ 과  $w=\pm\pi$ 에서  $H(e^{jw})$ 의 평탄 정도를 나타내는 파라메타들이다.

제로위상을 갖는 MAXFLAT FIR 저역통과 필터 설계를 위하여 사용된 Herrmann<sup>4)</sup>의 Hermite 다항식, Miller<sup>5)</sup>의 등각상상 변환 함수, RAJAGOPAL 등<sup>7)</sup>의 Bernstein 다항식 그리고 “cutoff-error free”의 발전된 폐쇄형 솔루션<sup>8)</sup>의 필터 계수를 얻기 위한 폐쇄형 전달함수는 아래와 같이 나타낼 수가 있다.

$$H(z) = \left( \frac{z^{1/2} + z^{-1/2}}{2} \right)^{2K} \left\{ \sum_{j=0}^{2(N-K)} g_j z^{-(N-K)+j} \right\} \quad (5)$$

여기서  $g_j = g_{2(N-K)-j}$ 이다. 따라서 식(1)의 임펄스 응답  $h_n$ 을 구하기 위해 필요한 중첩계수(interpolation coefficients)  $g_j$ 는 각 폐쇄형 솔루션들을 식(5)와 같은 전달함수로 변환하므로써 구할 수가 있으며, 이때 폐

쇄형 주파수 응답은 다음과 같이 표현될 수 있으므로

$$H(e^{jw}) = \left(\cos \frac{w}{2}\right)^{2K} \times \left\{ g_{N-K} + \sum_{j=1}^{N-K} g_{N-K-j} \cos(jw) \right\} \quad (6)$$

각 폐쇄형 솔루션들로부터 얻어진  $H(e^{jw})$ 는 식(3)의 평탄조건을 만족한다. 이때 폐쇄형 솔루션들의 특징은  $g_j$ 가  $N$ 과  $K$  만으로 표현될 수 있으므로 만일  $N$ 과  $K$ 가 주어진다면 필터 임펄스응답인  $h_n$ 은  $g_j$ 와 관계식으로부터 직접 구할 수가 있다는 장점이 있다 (참고문헌 [8]의 식(26)과 식(29) 참조). 따라서  $N$ 이 주어질 경우 식(6)에서처럼 설계되는 필터의 주파수응답은  $K$ 에 의해 결정되기 때문에  $K$ 을 정확하게 선택해야 하는 문제가 있다. 예를 들어 Herrmann은 식(2)에서  $\cos w = 1 - 2x$ 의 변환을 통하여 Hermite 보간 다항식(interpolation polynomial)을 기반으로 하는 다음과 같은 폐쇄형 다항식을 제안하였다

$$P_{N,K}(x) = (1-x)^K \sum_{j=0}^{N-K} d_j x^j, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (7)$$

여기서

$$d_j = \binom{K-1+j}{j} = \frac{(K-1+j)!}{(K-1)! j!} \quad (8)$$

위의 Herrmann 다항식은 필터계수를 구하기 위하여 식(5)의 전달함수로 변환될 수 있는 가장 잘 알려진 폐쇄형 솔루션으로 나중에 발표된 Miller<sup>[5]</sup>의 등각 사상 변환 함수와 RAJAGOPAL 등<sup>[7]</sup>의 Bernstein 다항식들도 이와 동일한 형태의 폐쇄형 다항식으로 표현될 수 있음이 증명되었다.

### 2.2 Herrmann의 설계 방식<sup>[4]</sup>

앞 절에서 설명된 바와 같이 제로위상을 갖는 MAXFLAT FIR 저역통과 필터 설계를 위하여 사용된 Herrmann<sup>[4]</sup>의 Hermite 다항식, Miller<sup>[5]</sup>의 등각 사상 방식, RAJAGOPAL 등<sup>[7]</sup>의 Bernstein 다항식은 모두 동일한 전달함수와 주파수응답함수로 표현할 수가 있다. 따라서 식(7)에  $x = (1 - \cos w)/2$  변환을 사용하여 Herrmann<sup>[4]</sup> 다항식의 저역통과 필터 함수  $H_0(e^{jw})$ ,  $-\pi \leq w \leq \pi$ 을 나타내면 다음과 같이 표현할 수가 있다.

$$H_0(e^{jw}) = \left(\cos \frac{w}{2}\right)^{2K} \sum_{j=0}^{N-K} d_j \left(\sin \frac{w}{2}\right)^{2j} \quad (9)$$

식(17)에서 주어진  $N$ 에 대하여  $H_0(e^{jw})$ 의 진폭응답특성은 평탄차수  $K$ 에 의하여 결정됨을 알 수가 있다. 그러나 필터차수  $2N$ 에 대하여  $N$  개의 서로 다른 진폭응답을 나타내는  $N$  개 필터가 존재한다. 따라서  $N$  개의 다른 진폭응답들 중에서 원하는 차단주파수  $w = w_c$ 을 만족하는  $K$ 을 결정해야 한다. Herrmann<sup>[4]</sup>은 식(9)을 이용하여 주어진 차단주파수  $w_c$ (이때 식(7)의 다항식에서  $x_c = (1 - \cos w_c)/2$ 이 된다)를 갖는 필터의  $K$  값을 결정하기 위하여 다음과 같은 경험적인 관계식을 사용하였다.

$$K = N - \text{int}\left(\frac{1}{2}N(1 - \cos w_c) + 0.5\right) \quad (10)$$

그러나 이러한 관계식은  $H_0(e^{jw})$ 가 결코 원하는 주파수응답을 만족하지 못하는 심각한 문제점을 갖고 있다. 예를 들어 그림 1은 식(10)에서  $w_c = 0.369\pi$ (이것은  $x_c = 0.3$ 에 해당된다)일 때 주어진  $N$ 에 대하여 다양한  $K$ 에 따른  $H_0(e^{jw})$ 의 응답 특성들을 나타낸 것이다. 그림에서 나타낸 바와 같이 필터 차단주파수가 요구되었던  $w_c = 0.369\pi$ 와 많은 차이가 있고, 이때 아래와 같은 차단주파수 이득오차(cutoff-frequency gain error)  $e_{-3dB}$ 을 발생시킨다.

$$e_{-3dB} = \frac{1}{\sqrt{2}} - H_0(e^{jw_c}) \quad (11)$$

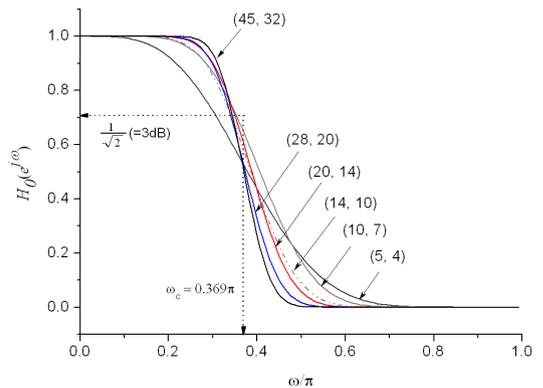


그림 1.  $H_0(e^{jw})$  응답 특성<sup>[4]</sup>

2.3 “cuoff-error free”를 갖는 설계 방식<sup>[8]</sup>

요구된 차단주파수를 갖는 제로위상의 MAXFLAT FIR 저역통과 필터를 정확하게 얻기 위해서는 먼저 임의의 차단주파수  $w_c$ 을 갖는 일반화된 폐쇄형 주파수 응답 함수가 반드시 필요하다. 따라서 참고문헌 [8]의 논문에서는 이러한 함수를 얻기 위하여 Herrmann이 제안한 식(9)의 폐쇄형 주파수 응답 함수에 새로운 차단 오차제어 계수(cutoff-error control coefficient)  $C_K$ 을 도입하여 “cuoff-error free”를 갖는 폐쇄형 주파수 응답 함수를 아래와 같이 제안하였다<sup>[8]</sup>.

$$H(e^{jw}) = \left( \cos \frac{w}{2} \right)^{2K} \times \left\{ \sum_{j=0}^{N-K} d_j \left( \sin \frac{w}{2} \right)^{2j} + 2^{2(N-K)} C_K \left( \sin \frac{w}{2} \right)^{2(N-K)} \right\} \quad (12)$$

여기서 식(12)는 식(9)의 폐쇄형 주파수 응답을 포함한 주파수 응답으로 나타낸 것으로 참고문헌 [8]의 (21) 식을 일부 수정하였으며, 계수  $\Omega_{N-K,K}$ 도  $2^{2(N-K)} C_K$ 로 변경하였다. 따라서 식(12)로부터  $C_K$ 는  $H(e^{jw_c})$ 가 항상 요구된 차단주파수를 만족하도록 -3dB 이득 조건인  $H(e^{jw_c}) = 1/\sqrt{2}$ 을 이용하여 다음과 같이 표현된다.

$$C_K = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - \left( \cos \frac{w_c}{2} \right)^{2K} \sum_{j=0}^{N-K} d_j \left( \sin \frac{w_c}{2} \right)^{2j}}{2^{2(N-K)} \left( \cos \frac{w_c}{2} \right)^{2K} \left( \sin \frac{w_c}{2} \right)^{2(N-K)}} \quad (13)$$

식(12)의  $H(e^{jw})$ 는  $C_K$ 에 의하여  $N-K$ 와  $K$ 에 관계없이  $w = w_c$ 에서  $-3dB (= 1/\sqrt{2})$  값을 항상 만족하며,  $C_K = 0$ 의 경우 식(9)와 동일함을 알 수가 있다. 그러나 식(12)의 주파수 응답을 갖는 필터는 주어진 필터차수  $N$ 에 대하여  $1 \leq K \leq N$ 에 해당하는  $N$ 개의 서로 다른 진폭응답을 갖는 필터가 존재하기 때문에 MAXFLAT 진폭응답을 갖는 필터를 선택하기 위한  $K$ 을 결정하는 문제가 남아 있다.

따라서 참고문헌 [8]에서는  $K$ 을 결정하기 위하여 참고문헌 [8]의 식(19)을 본 논문의 식(12)과 같이 수정하였을 때 다음과 같이 경험적이고 간접적인 관계식을 이용하였다.

$$-1 < C_K \leq 0 \quad (14)$$

즉, 주어진  $N$ 과  $w_c$ 에 대하여  $1 \leq K \leq N$  범위에

서  $C_K$ 의 가장 작은 음의 값을 갖는  $K$ 을 식(14)의 범위 내에서 선택하는 컴퓨터에 의한 최적의 설계 방법으로 매번  $C_K$ 을 계산해야하는 어려움이 존재한다. 또한 참고문헌 [8]에서는 식(14)의 도출에 대한 정확한 분석이 이루어지지 않았었다.

III. 제안 방식

이제까지 설명된 바와 같이 식(12)의 폐쇄형 주파수 응답을 갖는 필터 설계는 “cuoff-error free”를 갖는 필터를 얻을 수가 있으나 MAXFLAT 주파수 응답을 얻기 위한 정밀한  $K$  값을 결정하는 방법론 적인 문제가 남아 있다. 본 장에서는 식(11)에서 주파수영역 오차함수를 모델링하고 분석하므로써 기존 Herrmann이 제안한 경험적 관계식인 식(10)의 문제점을 파악하고 참고문헌 [8]에서 제시한 식(14)보다 간편하고 보다 정밀한  $K$  값을 결정하는 방법을 제시하고자 한다.

3.1 주파수영역 오차함수의 모델링과 분석

앞서 설명한 “cuoff-error free”를 갖는 폐쇄형 주파수 응답 함수인 식(12)의  $H(e^{jw})$ 는 Herrmann에 의해 주어진 식(9)의 폐쇄형 주파수 응답  $H_0(e^{jw})$ 을 사용하여 다음과 같이 나타낼 수가 있다.

$$H(e^{jw}) = H_0(e^{jw}) + A(e^{jw}) \quad (15)$$

여기서  $A(e^{jw})$ 는 주파수영역 오차함수로서

$$A(e^{jw}) = 2^{2(N-K)} C_K \left( \cos \frac{w}{2} \right)^{2K} \left( \sin \frac{w}{2} \right)^{2(N-K)} \quad (16)$$

와 같으며, 이때 식(13)의  $C_K$ 는 아래와 같이 다시 표현될 수가 있다.

$$C_K = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - H_0(e^{jw_c})}{2^{2(N-K)} \left( \cos \frac{w_c}{2} \right)^{2K} \left( \sin \frac{w_c}{2} \right)^{2(N-K)}} \quad (17)$$

이때  $w = w_c$ 에서  $A(e^{jw_c})$ 는 식(17)을 식(16)에 대입하므로써 아래와 같이 표현되며

$$A(e^{jw_c}) = \frac{1}{\sqrt{2}} - H_0(e^{jw_c}) \quad (18)$$

식(11)의 Herrmann 오차인  $e_{-3dB}$ 와 같음을 알 수가 있다. 식(15)로부터  $H(e^{jw})$ 는 주어진  $K$ 에 대하여 분명한 두 개의 주파수 함수의 합으로 이뤄진 것을 알 수가 있는데, 하나는 “필터 통과대역과 정지대역의 평탄”의 주파수 응답을 나타내는  $H_0(e^{jw})$ 와 다른 하나는 “주파수영역 오차 특성”을 나타내는  $A(e^{jw})$ 이다. 식(15)을 기반으로 하는 MAXFLAT FIR 저역통과 필터들의 이상적인 설계는  $A(e^{jw})=0$ 을 위한  $K$ 을 선택하는 것이나 식(6)과 같이 표현되는 폐쇄형 솔루션에서는 실제로 불가능하다. 이것은  $C_K=0$ 을 만족 하는 정수 값  $K$ 이 존재하지 않기 때문이다. 그러므로 폐쇄형 솔루션에서의 최적 설계는  $A(e^{jw})=0$  ( $0 \leq w \leq \pi$ )에 가장 근접하도록 하는  $K$ 을 결정하는 것이다.

식(16)으로부터  $A(e^{jw})$ 은  $w=0$  과  $w=\pi$ 에서 “제로 이득”을 갖는 반면 “bell-curve shape”의 이득을 갖는 스펙트럼을 나타냄을 알 수가 있다. 따라서  $A(e^{jw})$ 는 단 하나의 최대 진폭을 갖으며, 이를 통하여  $A(e^{jw})$ 의 진폭응답 특성을 정의할 수가 있다. 만일 주어진  $N$ ,  $K$ 와  $w_c$ 에 대하여  $w=w_K$  ( $0 \leq w_K \leq \pi$ )에서  $A(e^{jw_K})$ 의 최대진폭을  $A(e^{jw_K})$ 라고 하였을 때,  $w_K$ 는  $\partial A(e^{jw})/\partial w=0$ 로부터 아래와 같이 얻을 수가 있으며

$$w_K = \arccos\left(\frac{2K-N}{N}\right) \quad (19)$$

그때  $A(e^{jw_K})$ 는  $w=w_K$ 일 때의 식(19)을 이용하여 구한 다음의 변환 식들을 식(16)에 대입하므로써

$$\begin{aligned} \left(\cos\frac{w_K}{2}\right)^2 &= \frac{1}{2}(1+\cos w_K) = \frac{K}{N} \\ \left(\sin\frac{w_K}{2}\right)^2 &= \frac{1}{2}(1-\cos w_K) = 1 - \frac{K}{N} \end{aligned} \quad (20)$$

아래 식과 같이  $K$ 에 관하여 표현될 수가 있다.

$$A(e^{jw}) = 2^{2(N-K)} C_K \left(\frac{K}{N}\right)^{2K} \left(1 - \frac{K}{N}\right)^{2(N-K)} \quad (21)$$

식(21)에서  $1 \leq K \leq N$ 에 해당되는  $N$ 개의 서로 다른  $A(e^{jw_K})$ 가 존재함을 알 수가 있으며, 만약 식(19)에 따라  $w_K=w_c$ 을 만족하는  $K$ 가 선택되어 질

수 만 있다면  $A(e^{jw_K})$ 의 가장 작은 진폭의 값은 식(18)의  $A(e^{jw_c})$ 가 된다.

$$\begin{aligned} A(e^{jw_K})|_{w_K=w_c} &= A(e^{jw_c})|_{w_c=w_K} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(\frac{K}{N}\right)^{2K} \sum_{n=0}^{N-K} \left(1 - \frac{K}{N}\right)^{2(N-K)} \end{aligned} \quad (22)$$

이때  $C_K$ 는 또한  $K$ 에 관하여 표현되질 수가 있다.

$$C_K = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - \left(\frac{K}{N}\right)^{KN-K} \sum_{n=0}^{N-K} \left(1 - \frac{K}{N}\right)^n}{2^{2(N-K)} \left(\frac{K}{N}\right)^K \left(1 - \frac{K}{N}\right)^{N-K}} \quad (23)$$

또한 식(19)로부터  $K$ 는 다음 아래 식과 같이 나타낼 수가 있다

$$K = \frac{N(1+\cos w_K)}{2} = N - \frac{N(1-\cos w_K)}{2} \quad (24)$$

### 3.2 평탄차수 $K$ 결정을 위한 방법

평탄함수  $H_0(e^{jw})$ 와 오차함수  $A(e^{jw})$ 로 기술되는 식(15)의 주파수 응답  $H(e^{jw})$ 을 갖는 필터 설계의 경우 서로 다른 진폭응답을 갖는  $N$ 개의 다른 필터들 가운데 MAXFLAT 진폭응답을 갖는 최적 필터를 얻기 위한  $K$ 을 선택하는 문제가 아직 남아 있다. 식(15)에서  $A(e^{jw})$ 는  $H(e^{jw})$  스펙트럼에 정확한 차단주파수 응답을 제공하는 반면  $w=w_K$ 주변에 불필요한 진폭을 갖는 스펙트럼을 제공한다. 따라서 앞서 설명한 바와 같이 폐쇄형 솔루션에서의 최적 설계는  $A(e^{jw})=0$  ( $0 \leq w \leq \pi$ )에 가장 근접하는, 즉  $A(e^{jw_K})=0$ 에 근사하도록 하는  $K$ 을 결정하는 것이다. 예를 들어 그림 2는  $N=15$ 와  $w_c=0.369\pi$ 일 때  $K$  증가에 따른  $A(e^{jw_K})$ 와  $H(e^{jw})$ 을 나타낸 것이며, 표1에서는 관련된 파라미터 값들을 보여준다. 결론적으로  $K=10$ 일 때  $A(e^{jw}) \approx 0$ 으로 인한  $H(e^{jw})$ 는 어떠한 진폭 오차도 갖지 않는 MAXFLAT 주파수 응답을 갖는다는 사실을 알 수가 있다. 이것은  $K=10$  (: 식(19)로부터 얻은  $w_{10}=0.393\pi$ )일 때,  $A(e^{jw_K})$ 의 가장 적은 음의 진폭(smallest negative amplitude) 값에 해당되는  $A(e^{jw_{10}})=-0.0145$ 을 갖기 때문이다. 이때  $w_K-w_c$ 는 가장 적은 양의 값(smallest positive value)인  $w_{10}-w_c=0.0228\pi$ 을 갖는 다는 사실을 알 수가 있

다. 특히,  $w_K$ 가 주어진  $w_c$ 로부터 멀어질수록 통과대역에서  $A(e^{j\omega}) > 0$ 에 의한 오버슈트(overshoot) 또는 정지대역에서  $A(e^{j\omega}) \ll 0$ 에 의한 언더슈트(undershoot)와 같은 왜곡이 발생함을 알 수가 있다. 결론적으로 식(15)에서 MAXFLAT 주파수 응답을 갖는 필터를 실현시키기 위한  $K$ 는 식(19)에 따라 얻어진  $w_K$ 가 다음 식의 표현과 같이  $w_K - w_c$ 의 가장 적은 양의 값을 갖을 때 얻어진다.

$$K := (w_K - w_c > 0)_{min} \quad (25)$$

현재까지의 결과를 바탕으로 하였을 때, 그림 3은 폐쇄형 솔루션을 사용한 MAXFLAT FIR 필터의 설계과정을 예로써 나타낸 것이다.

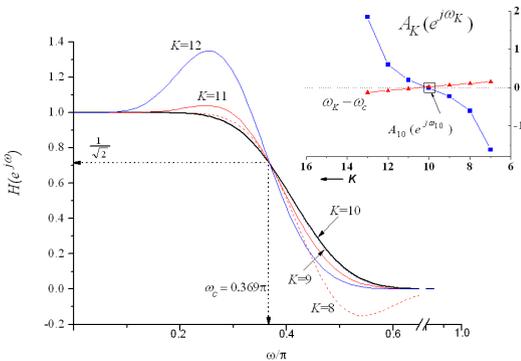


그림 2.  $N=15$ 와  $w_c = 0.369\pi$ 일 때 증가하는  $K$ 에 따른  $A(e^{j\omega_K})$ 와  $H(e^{j\omega})$

표 1. 그림 1과 관련된 파라미터들

parameters	K					
	7	8	9	10	11	12
$N - K$	8	7	6	5	4	3
$C_K$	-0.784	-1.176	-1.342	-0.207	4.673	17.152
$w_K/\pi$	0.521	0.479	0.436	0.392	0.346	0.292
$\frac{w_K - w_c}{\pi}$	0.152	0.110	0.067	0.023	-0.024	-0.074
$A(e^{j\omega_c})$	-0.278	-0.243	-0.162	-0.015	0.192	0.410
$A(e^{j\omega_K})$	-1.621	-0.608	-0.227	-0.015	0.200	0.604
$\delta_U/\delta_S$	-1.7011)	-0.1501)	-1E-71)	0	0.0402)	0.3492)

- 1)  $\delta_U$  : peak undershoot
- 2)  $\delta_S$  : peak overshoot

#### IV. 실험 결과

본 장에서는 앞서 설명한 주파수영역 오차함수 모

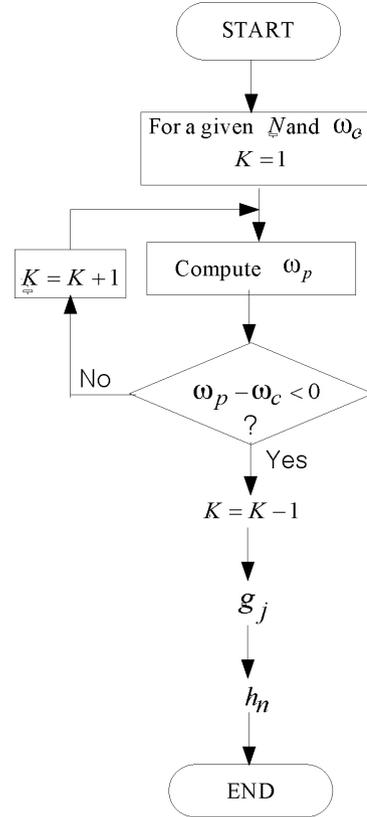


그림 3. MAXFLAT FIR 저역 필터를 얻기 위한 설계과정

델팅과 분석 결과로서 도출된 차단주파수 근접에 의한 평탄차수  $K$ 의 결정 방식을 식(9)와 식(12)의 폐쇄형 솔루션에 적용하였을 때의 필터 주파수응답 특성을 나타내었으며, 이를 바탕으로 제안한 차단주파수와 의 최소거리 방식의 타당성을 입증하고자 한다. 그림 4는  $w_c = 0.369\pi$ 일 때 임의의 필터차수  $N$ 에 대하여 식(10)의 Herrmann 방식과 제안된 식(25)의 제안 방식에 적용하였을 때 얻어진  $K$ 들에 대하여 비교한 결과이다. 그림 5는 그림 4의  $K$  결과 값들을 Herrmann의 폐쇄형 솔루션인 식(9)의  $H_0(e^{j\omega_c})$ 에 적용하여 차단이득오차인 식(11)의  $e_{-3dB}$ 을 비교한 것이며, 그림 6은 주어진  $N=20$ 일 때 Herrmann의 폐쇄형 솔루션인 식(9)에 의해 설계된 필터의 주파수 응답을 비교한 것이다. 그림 5와 그림 6에서 나타난 바와 같이 제안된 방식 식(25)가 Herrmann이 사용한 경험적인 식(10)보다 줄어든  $e_{-3dB}$ 을 갖는 것을 알 수가 있다. 그림 7은 식(12)의 폐쇄형 솔루션  $H(e^{j\omega})$ 에 적용하였을 때 주파수 응답을 나타낸 것으로 평탄한 주파수 응답을 갖는 것을 알 수가 있다.

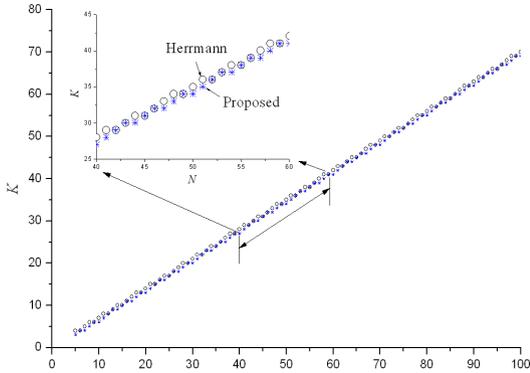


그림 4.  $w_c = 0.369\pi$ 일 때  $N$ 에 따른  $K$  값 결정방식 비교

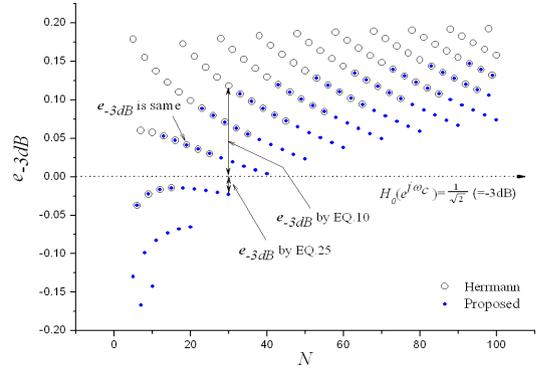


그림 5. 그림 4에 따른  $H_0(e^{j\omega_c})$ 의  $e_{-3dB}$  비교

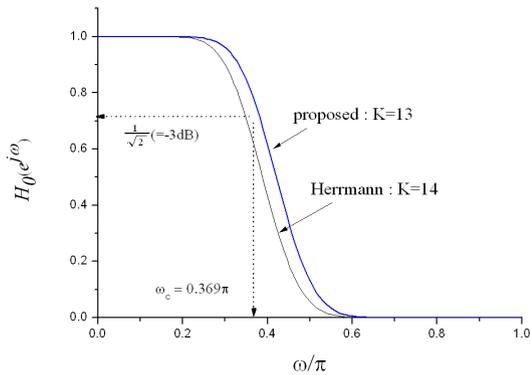


그림 6.  $N=20$ 일 때 두 방식의  $H_0(e^{j\omega})$  비교

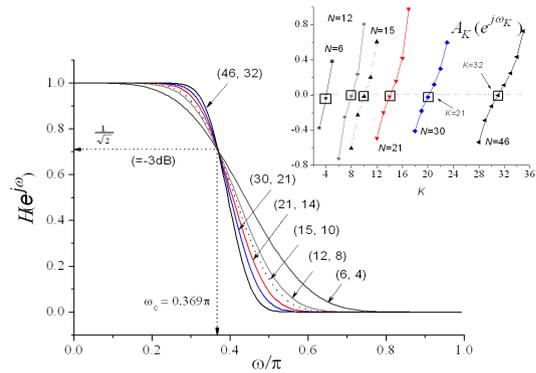


그림 7. 차단주파수와의 최소거리 방식을 적용한  $A(e^{j\omega_k})$ 와  $H(e^{j\omega})$  응답 특성

## V. 결 론

본 논문에서는 먼저 폐쇄형 주파수 응답을 제공하는 MAXFLAT FIR 필터 설계에서 매우 중요한 평탄차수 결정을 위해 기존에 제안되었던 Herrmann<sup>[4]</sup>과 JEON<sup>[8]</sup>의 문제점을 분석하였다. 이러한 기존 방식들이 갖고 있는 경험적이면서 부정확하거나 컴퓨터에 의한 최적의 설계 방법으로 계산효율이 복잡하다는 단점을 극복하기 위하여 폐쇄형 주파수응답함수에서 주파수영역 오차 함수를 모델링하고 분석하여 차단주파수 근접에 따른 평탄차수  $K$ 의 결정 방식을 제안하였다. 제안된 차단주파수와의 최소거리 방식은 기존의 방식들에 비해 간단하며 실험결과 JEON<sup>[8]</sup>의 성능에 근접하며, 계산적인 효율이 뛰어난이 입증되었다.

## 참 고 문 헌

[1] J. L. Sullivan and J. W. Adams, "A new

nonlinear optimization algorithm for asymmetric FIR digital filters," in *Proc. IEEE Int. Symp. Circuits Syst. (ISCAS)*, 2, pp.541-544, 1994.

- [2] Saed Samadi and Akinori Nishihara. : 'The world of flatness,' *IEEE Trans. Circuits and Systems Magazine*, Third quarter 2007, pp.38-44.
- [3] 전준현, "제로위상을 갖는 광대역저역통과 MAXFLAT FIR 필터설계를 위한 새로운 폐쇄형전달함수" 한국통신학회논문지, Vol.32, No.7, pp.658-666, August 2007
- [4] O. Hemmann. "On the approximation problem in nonrecursive digital filter design." *IEEE Trans Circuit Theory* 18 pp.411-413. 1971
- [5] J.A. Miller, "Maximally flat nonrecursive digital filters," *Electron. Lett.* Vol.8., pp.157-158, Mar. 1972.

- [6] P. Thajchayapong, M. Puangpool and S. Banjongjit, "Maximally flat f.i.r filters with prescribed cut-off frequency," *Electron. Lett.* Vol.16, pp.514-515, June 1980.
- [7] L. R. Rajagopal and S. C. Dutta Roy, "Design of Maximally-flat FIR filters using the bernstein Pynomial," *IEEE Trans.on circuits and system*, Vol.cas-34, No.12, pp.1587-1590, Dec. 1987.
- [8] 전준현, "MAXFLAT FIR 필터의 일반적이고 간편한 설계를 위한 새로운 기술", 한국통신학회논문지, Vol.35, No.4, pp.377-385, August 2010

전 준 현 (Joonhyeon Jeon)

중신회원



1984년 동국대학교 전자공학과 학사

1986년 한국과학기술원 전기 및 전자 공학석사

1991년 한국과학기술원 전기 및 전자 공학박사

1991년~1999년 한국통신 인터넷 연구실장 및 사업부장

2000년~2001년 한누리투자증권 리서치팀 이사

2000년~2001년 드림라인 전무

2001년~현재 동국대학교정보통신공학전공 부교수

<관심분야> 영상통신, 영상압축, 에너지변환 등