

CRC-p 코드 성능분석 및 VHF 대역 해양 ad-hoc 무선 통신용 최적 CRC 코드의 결정

정회원 차 유 강*, 정 차 근**

Analysis of CRC-p Code Performance and Determination of Optimal CRC Code for VHF Band Maritime Ad-hoc Wireless Communication

You-Gang Cha*, Cha-Keon Cheong** *Regular Members*

요 약

본 논문에서는 다양한 CRC 코드의 성능분석을 기반으로 새로운 VHF 대역 해양 무선통신용 최적 CRC-p 코드를 제안한다. 이를 위해, 먼저 CRC 코드의 부호어 길이의 변화에 따른 미검출 오류확률과 최소해밍거리를 구하는 방법을 기술한다. 즉 순회 해밍코드나 원시 BCH 코드의 쌍대코드가 최대장 코드가 되는 것을 이용해서 천이 레지스터에 의한 간단한 회로구성으로 무게분포와 미검출 오류확률을 계산하는 방법과 MacWilliam의 항등식에 의한 최소해밍거리를 계산하는 방법을 제시한다. 다음으로 VHF 대역 해양 무선통신 시스템의 전송 프레임의 구성과 주요 통신 파라미터의 규격을 제시하고, 기존의 연구된 다양한 CRC 코드의 생성다항식을 대상으로 미검출 오류확률과 최소해밍거리의 결과를 기반으로 새로운 CRC-p 코드를 선정하고, 라이시안 해양 채널모델과 $\pi/4$ -DQPSK 변복조기에 의한 비트오류율(BER)의 모의실험 결과를 통해 성능을 검증한다.

Key Words : CRC 코드, dual code, undetected error probability, 최소해밍거리, VHF 대역 해양 무선통신, weight distribution

ABSTRACT

This paper presents new CRC-p codes for VHF band maritime wireless communication system based on performance analysis of various CRC codes. For this purpose, we firstly describe the method of determination of undetected error probability and minimum Hamming distance according to variation of CRC codeword length. By using the fact that the dual code of cyclic Hamming code and primitive BCH code become maximum length codes, we present an algorithm for computation of undetected error probability and minimum Hamming distance where the concept of simple hardware that is consisted of linear feedback shift register is utilized to compute the weight distribution of CRC codes. We also present construction of transmit data frame of VHF band maritime wireless communication system and specification of major communication parameters. Finally, new optimal CRC-p codes are presented based on the simulation results of undetected error probability and minimum Hamming distance using the various generator polynomials of CRC codes, and their performances are evaluated with simulation results of bit error rate based on the Rician maritime channel model and $\pi/4$ -DQPSK modulator.

※ 본 연구는 국토해양부 “U-기반 해운물류 구축을 위한 기반기술 연구” 과제 지원으로 수행되었습니다.

* 호서대학교 시스템 제어공학과 신호 및 영상처리 연구실(cheong@hoseo.edu) (* : 교신저자)

논문번호 : KICS2012-01-039, 접수일자 : 2012년 1월 30일, 최종논문접수일자 : 2012년 5월 23일

I. 서 론

CRC (Cyclic Redundancy-Check) 코드는 시스템 구성이 간단하고 빠른 연산이 가능할 뿐만 아니라 양호한 통신오류의 검출성능으로 인해 다양한 디지털 무선통신 시스템에 널리 사용되고 있다. 즉 ATM ($p=8$), IEC TC57, IEEE WG 77.1, CCITT X.25, ANSI, IBM-SDL ($p=16$) 등의 응용과 같이 $p \leq 16$, 길이 $n \leq 1024$ 인 CRC 코드의 특성에 관한 광범위한 분석이 진행되었다¹⁻⁵. 최근 IEEE 802.3 Ethernet와 같이 전송 패킷의 정보량이 많아짐에 따라 전송에러 검출능력을 향상시키기 위해 $p=24, 32$ 등과 같이 패리티 비트 p 값을 크게 한 CRC 코드 사용이 확대되고 있다³.

일반적으로 차수(degree) m 인 원시다항식(primitive polynomial) $p(x)$ 에 의한 부호어 길이 $n=2^m-1$, 정보비트 $k=2^m-1-m$, 최소해밍거리 $d_{\min}(n)=3$ 의 해밍코드는 동일한 무게분포(weight distribution)와 에러검출 특성을 갖는다⁶. 그러나 $n < 2^m-1$ 과 같이 단축된 CRC 코드에서는 부호어 길이 n 과 생성다항식에 따라 최소해밍거리 $d_{\min}(n)$ 과 에러검출 성능이 변화되므로, 부호어 길이 n 에 대한 최적 CRC 코드를 생성하기 위해서는 가장 큰 $d_{\min}(n)$ 과 에러검출 성능이 우수한 생성다항식을 선정해서 사용하는 것이 중요하다.

기존의 연구에서는 부호어의 무게분포를 사용해서 미검출 오류확률 $P_{uc}(\epsilon, n)$ 을 구하고 이를 기반으로 CRC 코드의 유효성을 판단했다^{2,3,7-9,12}. 이로 인해 효율적인 무게분포의 계산을 위한 알고리즘 개발에 많은 연구가 이루어졌다^{2,3,8,10}. 다양한 생성다항식을 대상으로 CRC 코드의 무게분포 계산을 간단한 알고리즘으로 보다 정확하게 구하는 방법에 많은 연구가 집중된 반면, 부호어 길이와 채널특성을 반영한 최적 CRC 코드를 구하는 문제에 관해서는 충분한 연구가 진행되지 못했다. 또한 다양한 통신 시스템에 사용되고 있거나 기존의 연구에서 개발된 CRC 코드는 채널 환경과 부호어 길이의 변화를 충분히 반영하고 있지 못해 전체적인 에러검출 성능이 저하되는 문제가 있다.

실제 디지털 무선통신에서 사용되는 데이터 패킷의 길이는 최대 수천비트 이내로 제한되는 경우가 일반적이고, 부호어 길이는 생성다항식에 의한 단축되지 않은 최대 부호어 길이보다 짧은 경우가 대부분이다.

따라서 해밍부호나 BCH 부호를 단축시킨 CRC 코드가 사용되고 있으나 코드의 단축은 그 성능에 영향을 미친다. 그러므로 목적으로 하는 통신 시스템에 적합한 부호어 길이에 따라 최대의 코드성능을 얻을 수 있는 패리티 비트 p 및 생성다항식을 결정하는 것이 필요하다.

본 논문에서는 다양한 CRC 코드의 성능분석을 통해 VHF 대역 해양 ad-hoc 무선통신용 최적 CRC-p 코드를 개발한다. CRC 코드의 성능은 채널환경을 반영한 부호어 길이 n 에 따른 미검출 오류확률 $P_{uc}(\epsilon, n)$ 과 최소해밍거리 $d_{\min}(n)$ 에 의해 좌우된다. 따라서 기존에 연구된 다양한 생성다항식을 대상으로 부호어 길이 n 의 변화에 따른 $P_{uc}(\epsilon, n)$ 과 $d_{\min}(n)$ 를 구하고, 이를 기반으로 VHF 대역 해양 ad-hoc 무선통신에 적합한 최적 CRC-p 코드의 선정결과를 제시한다. 먼저 순회(cyclic) 해밍코드나 원시 BCH 코드의 쌍대코드(dual code)가 최대장 코드(maximum length code)가 되는 것을 이용해서 천이 레지스터에 의한 간단한 회로구성으로 무게분포와 $P_{uc}(\epsilon, n)$ 을 계산하는 방법을 제시한다. 다음으로 MacWilliam의 항등식에 의한 $d_{\min}(n)$ 의 계산을 위한 방법을 기술한다. 마지막으로 VHF 대역 해양 무선통신 시스템의 전송 프레임의 구성과 주요 통신 파라미터를 제시하고, 라이시안(Rician) 해양 채널환경과 $\pi/4$ -DQPSK 변복조기에 의한 비트 오류율(BER)을 구해서 최적 CRC-p 코드를 선정한다.

이하 본 논문의 구성은 다음과 같다. II절에서는 CRC 코드의 성능을 분석하는 방법으로 쌍대코드의 무게분포로부터 미검출 오류확률 $P_{uc}(\epsilon, n)$ 의 계산과 MacWilliam의 항등식을 이용해서 최소해밍거리 $d_{\min}(n)$ 를 구하는 방법을 기술한다. 다음으로 III절에서는 VHF 대역 ad-hoc 해양 무선통신 시스템의 구성을 간단히 기술하고, $P_{uc}(\epsilon, n)$ 과 $d_{\min}(n)$ 을 기반으로 VHF 대역 해양 무선통신용 최적 CRC-p 코드의 선정 및 실험결과를 제시하고, 결론으로 본 논문의 주요결과와 과제에 관해 IV절에서 기술한다.

II. CRC 코드의 성능분석

2.1. 쌍대코드에 의한 무게분포의 계산

부호어 길이 n , 정보 비트 수 k , 최소 해밍거리 $d_{\min}(n)$ 인 $(n, k, d_{\min}(n))$ CRC 코드의 성능은 통신 채널 잡음의 영향으로 에러패턴이 정상적인 부호어로 인식되어 에러를 검출할 수 없는 미검출 오류확률에

의해 좌우된다. A_i 와 B_i 를 각각 무게 i 인 코드 C_n 과 쌍대코드 C_n^\perp 의 무게분포라 하면, 미검출 오류확률 $P_{ue}(\epsilon, n)$ 은 MacWilliam의 항등식에 의해 식 (1)과 같이 주어진다^{7,11}.

$$P_{ue}(\epsilon, n) = \sum_{i=1}^n A_i \epsilon^i (1-\epsilon)^{n-i} \quad (1)$$

$$= 2^{-(n-k)} \sum_{i=0}^n B_i (1-2\epsilon)^i - (1-\epsilon)^n$$

여기서 ϵ 은 이진대칭채널(BSC : binary symmetric channel)의 비트 에러 발생확률이다. 미검출 오류확률 $P_{ue}(\epsilon, n)$ 는 $0 < \epsilon \leq 1/2$ 의 경우, 정보비트 k 가 증가하면 $P_{ue}(\epsilon, n) \leq 2^{-p}$ 의 관계가 성립하지만, 이를 만족하는 CRC 코드 설계의 일반적인 방법은 없으며 극히 일부분의 CRC 코드만이 이와 같은 한계를 만족하는 것이 입증되어 있다^{12,13}. 따라서 $P_{ue}(\epsilon, n)$ 을 일정한 범위 이내로 줄이기 위해서는 부호어 길이 n 에 비례해서 패리티 비트 수 p 값을 증가시키는 것이 필요하다.

BSC 채널의 비트 에러율 ϵ 이 $\epsilon \leq 10^{-3}$ 와 같이 충분히 작은 값을 가지면 식 (1)의 $P_{ue}(\epsilon, n)$ 은 식 (2)와 같이 최소 해밍거리 $d_{\min}(n)$ 에서의 무게분포 $A_{d_{\min}(n)}$ 의 값으로 근사시킬 수 있다⁴. 따라서 CRC 코드는 부호어 길이 n 에서의 $d_{\min}(n)$ 의 값이 최대가 되는 생성다항식을 사용하는 것이 요구된다.

$$P_{ue}(\epsilon, n) \approx A_{d_{\min}(n)} \epsilon^{d_{\min}(n)} \quad (2)$$

일반적으로 CRC 코드의 최대 $d_{\min}(n)$ 의 값은 부호어 길이 n 과 생성다항식에 따라 다양한 값을 가지므로 많은 CRC 코드가 개발되어 상용화되어 있다. 또한 $P_{ue}(\epsilon, n)$ 의 값은 정보비트 k 값이 증가하면 생성다항식에 영향을 크게 받지 않지만, 일정한 범위 이내의 k 값에서는 생성다항식의 종류에 따라 영향을 많이 받는 것이 입증되어 있다^{4,13}.

미검출 오류확률 $P_{ue}(\epsilon, n)$ 를 계산하기 위해서는 식 (1)에서 알 수 있는 바와 같이 코드 C_n 의 무게분포 A_i 또는 쌍대코드 C_n^\perp 의 무게분포 B_i 를 구해야 된다. 해밍코드의 경우에는 무게분포 A_i 를 구하는 일반적인 계산방법이 개발되어 있으나, 단축코드에 적용할 수 있는 범용적인 방법은 알려져 있지 않다. 또한 선형 순회코드의 경우 정보비트 k 의 값이 증가함에 따라

모든 부호어를 대상으로 무게분포 A_i 를 직접 계산하는 것은 계산량이 방대하게 증가한다. 그러나 CRC-p 코드의 경우에는 p 가 $p = 8, 16, 24, 32$ 등과 같이 일정한 값으로 한정되므로 2^p 개의 쌍대 부호어의 무게분포 B_i 의 값을 구하는 것이 가능하다.

일반적으로 CRC-p 코드는 순회 해밍코드나 원시 BCH 코드를 단축한 코드로 구성된다. 임의의 정수 $m \geq 3$ 에 대해, 부호어 길이 $n = 2^m - 1$, 최소 해밍거리 $d_{\min}(n) = 3$ 인 순회 해밍코드 $C_{2^m-1} = [2^m - 1, 2^m - 1 - m]$ 를 차수 m 인 원시다항식 $p(x)$

$$p(x) = \sum_{j=0}^m p_j x^j \quad (p_0 = p_m = 1) \quad (3)$$

를 사용해서 생성할 수 있고, 그 쌍대코드 $C_{2^m-1}^\perp$ 는 모든 값이 제로로 구성된 하나의 부호어와 무게 2^{m-1} 인 $2^m - 1$ 개의 최대장 코드가 되는 것은 잘 알려져 있다¹⁴. 따라서 본 논문에서는 이와 같은 특성을 기반으로 천이 레지스터를 사용한 간단한 회로구성을 기반으로 CRC-p 코드의 무게분포를 계산한다^{7,14}.

코드 C_{2^m-1} 를 단축시킨 CRC-p ($p = n - m$) 단축 코드 $C_n = [n, n - m]$ (단 $m < n < 2^m$ 임)는 부호어 C_{2^m-1} 에서 $2^m - 1 - n$ 개의 정보비트를 누락시켜 구성한 것이다. 단축코드 C_n 과 쌍대코드 C_n^\perp 의 무게 i 인 부호어의 무게분포를 각각 $A_{n,i}$ 및 $B_{n,i}$ 라 한다. 최대장 코드는 선형 궤환 천이 레지스터(Linear Feedback Shift Register, LFSR)를 이용한 간단한 하드웨어를 사용해서 생성할 수 있다. 즉 식 (3)의 원시다항식을 m 단 천이 레지스터로 구성된 회로에서 초기값으로 $a_0 = 1, a_i = 0 (1 \leq i \leq m - 1)$ 와 같이 설정하면, 최대장 코드는 다음 식 (4)와 같이 주어진다.

$$a_i = \sum_{j=0}^{m-1} p_j a_{i+j-m}, \quad m < i < 2^m - 1 \quad (4)$$

식 (4)로 주어진 비트 단위의 최대장 코드를 구해서 단축 쌍대코드 C_n^\perp 의 무게분포 $B_{n,i}$ 를 구하는 것은 많은 반복연산으로 인해 계산시간이 길어지는 문제가 있다. 이를 해결하기 위해, trace 개념을 도입해⁷ 벡터단위의 연산을 수행할 수 있도록 한다. $GF(2^m)$ 상의 임의의 원소 β 에 대해 식 (5)와 같이 trace $\text{Tr}(\beta)$ 를 정의하고

$$\text{Tr}(\beta) = \sum_{j=0}^{m-1} \beta^{2^j} = \beta + \beta^2 + \beta^4 \dots + \beta^{2^{m-1}} \quad (5)$$

원시다항식 $p(x)$ 의 근(root) α 에 대해 식 (6)으로 정의되는 a_i 를 도입한다.

$$a_i = \text{Tr}(\alpha^i) \quad \text{for } 0 \leq i < 2^m - 1 \quad (6)$$

α^{2^h} 은 근 α 의 conjugation이므로 $p(\alpha^{2^h}) = 0$ ($0 \leq h < m$)가 성립하고^[6], 식 (3)에서

$$\sum_{j=0}^m p_j(\alpha^{2^h})^j = \sum_{j=0}^{m-1} p_j(\alpha^{2^h})^j + (\alpha^{2^h})^m = 0 \quad (7)$$

이 성립하므로 연산자 $\text{Tr}(\cdot)$ 의 선형성으로부터 식 (8)의 관계를 만족한다.

$$a_{i+m2^h} = \sum_{j=0}^{m-1} p_j a_{i+j2^h} \quad (8)$$

따라서 임의의 $u < 2^m$ 에 대해, 쌍대코드 $C_{2^m-1}^\perp$ 의 최대장 부호어를

$$\bar{v} = (a_u, a_{u+1}, \dots, a_{u+2^m-2}) \quad (9)$$

라 하면, 부호어 \bar{v} 의 무게는 제로인 부호어를 제외하고 2^{m-1} 이고, 전체 개수가 $2^m - 1$ 이므로 무게분포의 관계는 식 (10)으로 주어진다.

$$B_{2^m-1-n,i} = B_{n,2^{m-1}-i} \quad (10)$$

$1 \leq i < 2^m$ 에서 N_i 를 $(a_u, a_{u+1}, \dots, a_{u+i-1})$ 의 무게라 하면, $N_0 = 0$ 이고 $B_{n,i}$ 는 정수 i 가 발생하는 개수와 동일하므로 식 (11)과 같이 무게분포 $B_{n,i}$ 를 구할 수 있다.

$$B_{n,i} = \begin{cases} N_{i+n} - N_i & : 0 \leq i \leq 2^m - 1 - n \\ 2^{m-1} - N_i + N_{i-2^{m-1}+n} & : 2^m - 1 - n < i < 2^m - 1 \end{cases} \quad (11)$$

쌍대부호의 무게분포 $B_{n,i}$ 는 식 (8)을 사용해서 쌍대부호의 부호어를 생성하고, N_i 의 값을 계산해서 식 (11)로부터 $B_{n,i}$ 를 직접 계산함으로써 식 (1)에 의해 미검출 오류확률 $P_{ue}(\epsilon, n)$ 을 간단히 구할 수 있다.

2.2. MacWilliam의 항등식에 의한 최소해밍거리 $d_{\min}(n)$ 의 계산

부호어 길이 n 의 변화에 따른 최적 CRC-p 코드를 설계하기 위해서는 미검출 오류확률 $P_{ue}(\epsilon, n)$ 이외에 생성다항식과 n 의 변화에 따른 최소 해밍거리 $d_{\min}(n)$ 을 구하는 것이 필요하다. 코드 C_n 의 최소 해밍거리 $d_{\min}(n)$ 를 구하기 위해서는 무게분포 A_i 를 계산하는 것이 필요하지만 이를 직접 계산하는 것은 $P_{ue}(\epsilon, n)$ 을 구하는 것과 같이 계산량이 방대해져서 어려운 문제이다. 그러나 2.1절에서 구한 쌍대코드 C_n^\perp 의 무게분포 B_i 와 MacWilliam의 항등식을 사용해서 코드 C_n 의 무게분포 A_i 를 구할 수 있으며, 이를 통해 최소해밍거리 $d_{\min}(n)$ 의 계산이 가능하다.

식 (12)와 같이 정의되는 Krawtchouk 다항식 $P_j(i)$ 를 사용하면^[11,15]

$$P_j(i) = \sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{i}{k} \binom{n-i}{j-k} \quad j=0,1,2,\dots \quad (12)$$

이항수열(binomial series) $(1+z)^{n-i}(1-z)^i$ 는 식 (13)과 같이 전개할 수 있다.

$$(1+z)^{n-i}(1-z)^i = \sum_{k=0}^n P_k(i) z^k \quad (13)$$

CRC 코드의 weight enumerator $W_C(Z)$ 는 MacWilliam의 항등식에 의해

$$W_C(z) = \sum_{i=0}^n A_i z^i = \frac{1}{|C_n^\perp|} \sum_{i=0}^n B_i (1+z)^{n-i} (1-z)^i \quad (14)$$

와 같은 관계식을 갖는다^[11]. 여기서 $|C_n^\perp|$ 은 쌍대부호 C_n^\perp 의 전체 부호어의 개수로 $|C_n^\perp| = 2^{n-k}$ 이다. 따라서 코드 C_n 과 쌍대코드 C_n^\perp 의 무게분포 A_i 와 B_i 의 관계는 식 (13)을 식 (14)에 대입해서 정리하면 식 (15)의 결과가 얻어진다.

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n A_j z^j &= \frac{1}{|C_n^\perp|} \sum_{i=0}^n B_i (1+z)^{n-i} (1-z)^i \\ &= \frac{1}{|C_n^\perp|} \sum_{i=0}^n B_i \left[\sum_{j=0}^n P_j(i) z^j \right] \\ &= \sum_{j=0}^n \left[\frac{1}{2^{n-k}} \sum_{i=0}^n B_i P_j(i) \right] z^j \end{aligned} \quad (15)$$

따라서 코드 C_n 의 무게분포 A_j 는 쌍대코드 C_n^\perp 의 무게분포 B_i 로부터 식 (16)과 같이 계산할 수 있다.

$$A_j = \frac{1}{2^{n-k}} \sum_{i=0}^n B_i P_j(i) \quad (16)$$

$$= \frac{1}{2^{n-k}} \sum_{i=0}^n B_i \sum_{l=0}^i (-1)^l \binom{i}{l} \binom{n-i}{j-l}$$

비록 단축 BCH 코드를 대상으로 부호어 길이의 변화에 따른 최소해밍거리 $d_{\min}(n)$ 의 범위를 결정할 수 있으나⁸⁾, CRC-p 코드의 생성다항식에 따른 특성을 충분히 반영하고 있지 않아 정확한 $d_{\min}(n)$ 을 구할 수 없다. 따라서 일반적인 단축코드인 CRC-p 코드에 대한 $d_{\min}(n)$ 의 값을 구하는 방법은 알려져 있지 않으며, 식 (16)과 같이 생성다항식과 부호어 길이 n 의 변화로부터 직접 구하는 것이 보다 정확한 해를 얻을 수 있다.

III. VHF 대역 해양 무선통신용 최적 CRC-p코드의 선정

3.1 VHF 대역 해양 무선통신 시스템

해상 무선디지털 통신시스템으로 VHF대역과 SO(Self-Organized)-TDMA 방식을 기반으로 한 AIS(Automatic Identification System)와 MF/HF 대역의 PACTOR-III 통신 모뎀 등이 개발되어 운용되고 있다¹⁷⁾. PACTOR-III 모뎀의 경우 최대 40,000km까지의 장거리 통신이 가능하지만 낮은 전송속도로 인해 인터넷이나 메시지 서비스와 같은 다양한 멀티미디어 통신 서비스에 한계가 있다. 이를 해결하기 위해 INMARSAT과 같은 위성통신 시스템을 이용할 수 있으나 높은 통신비용으로 많은 제약이 수반되어 IEEE 802.16/16 표준을 기반으로 한 메쉬(mesh)를 이용한 고속통신 시스템이 개발되고 있다.

본 논문에서는 ITU-R M. 1842-1 VHF 대역 디지털 무선통신 시스템을 기반으로 해양 채널 에러에 의한 재전송율을 최소화함과 동시에 선박의 이동에 의한

재 라우팅 설정율을 최소화시켜 선박간 ad-hoc 통신 성능을 향상시키기 위한 최적 CRC 코드를 제시한다. ITU-R M. 1842-1 VHF 대역 디지털 무선통신 시스템은 25kHz 주파수대역폭에서 $\pi/4$ -DQPSK, $\pi/8$ -D8PSK 및 16-QAM 등의 변조방식에 의한 데이터 전송율을 최저 28.8kbps에서 최대 307.2kbps 까지를 달성하기 위한 연구가 진행되고 있다. 그림 1은 ITU-R M. 1842-1의 무선통신 규격 권고안을 기반으로 VHF 대역 디지털 무선통신을 위한 전송 데이터 프레임 구조의 예를 나타낸 것이다. Ad-hoc 통신의 경우 네트워크 내에 RAS(Radio Access Station)가 존재하지 않아 상향링크와 하향링크의 구분이 없으므로 Carrier Sense(CS)-TDMA 또는 SO-TDMA 등의 다중 액세스 방식이 사용되고 있다¹⁷⁾. 메쉬 또는 ad-hoc 네트워크 구성을 위한 multi-hop 구성으로 2250개의 슬롯(slot)으로 하나의 프레임, 하나의 슬롯은 데이터 패킷과 guard time으로 이루어진 26.67ms로 구성된다.

표 1은 ITU-R M. 1842-1의 무선통신 규격 권고안과 그림 1의 프레임 구성을 기반으로 해서 도출한 변조방식에 따른 VHF 대역 ad-hoc 무선통신 시스템의 주요 파라미터를 나타낸 것이다. 각 슬롯의 데이터 패킷에 포함되는 데이터 비트 수는 768 비트에서 최대 8192 비트까지로 한정된다. 그림 2는 CRC-p 코드에 의한 전송패킷의 구조를 나타낸 것으로, 각각의 페이로드(payload)는 CRC-p1을 사용해서 부호화하고, 하나의 전체 슬롯은 CRC-p2를 사용하는 이중구조의 CRC-p 코드 방식의 사용을 제안한다.

3.2. 최적 CRC-p 코드 선정을 위한 실험결과

그림 2와 같이 제안한 전송패킷의 적용을 위한 최적 CRC-p 코드생성을 위해, 부호어 길이와 BSC 채널의 비트 에러율 ϵ 의 변화에 따른 미검출 오류확률 $P_{ue}(\epsilon, n)$ 을 구하고, 이를 기반으로 최적 생성다항식을

표 1. 변조방식에 따른 VHF 대역 무선통신 시스템의 주요 파라미터
Table 1. Major parameters of VHF band maritime wireless communication system

변조기	Data Rate (kbps)	Bits per Symbol	Symbol Rate (ksps)	BW (kHz)	Coded Symbol Duration (ms)	Number of Symbol per Slot	Number of Bits per Slot
$\pi/4$ -DQPSK	28.8	2	14.4	25	0.069	384	768
$\pi/8$ -D8PSK	47.2	3	14.4	25	0.069	384	1152
16QAM	153.6	4	38.4	50	0.026	1024	4096
	307.2	4	76.8	100	0.013	2048	8192

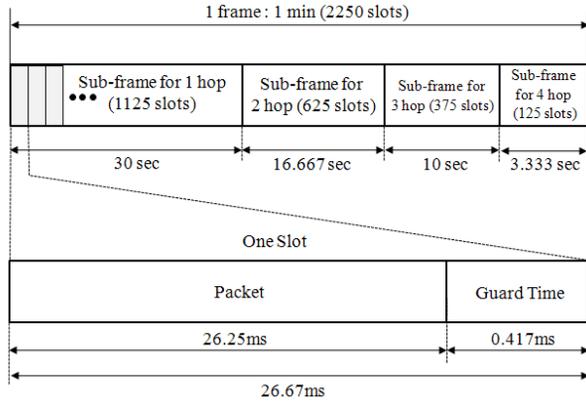


그림 1. VHF 대역 해상 무선통신 시스템의 전송 데이터의 프레임 구성 예

Fig. 1. An example of transmit data frame of VHF band maritime wireless communication system



그림 2. CRC-p 코드를 사용한 전송 데이터 패킷의 블록도
Fig. 2. A block diagram of transmit data packet with CRC-p code

도출할 수 있도록 한다. 일반적으로 차수 m 의 원시다항식으로 생성할 수 있는 단축 CRC 코드는 식 (17)로 주어지는 개수가 존재한다¹⁹⁾.

$$\frac{\Phi(n)}{2m} \quad (n = 2^m - 1, \quad \Phi(n) : \text{Euler totient 함수}) \quad (17)$$

따라서 모든 원시다항식을 대상으로 최상의 CRC-p 코드를 구하는 것은 한계가 있다. 표 2는 본 연구의 실험에 사용된 CRC-16, 24, 32의 생성다항식을 16진 코드로 나타낸 것이다. 즉 CRC-16 코드 중 CCITT-16의 표준 CRC 코드로 사용되고 있는 코드의 생성다항식 $g(x)$ 는

$$g(x) = 11021_H = (x+1)p(x) \quad (18)$$

$$p(x) = x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12} + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

로 주어지는 식이고, $p(x)$ 는 원시다항식이다. 표 2의 생성다항식은 표준 CRC 코드로 사용되고 있는 것과 기존의 연구에서 “good” 코드의 특성을 갖고 성능이 우수한 것으로 평가된 생성다항식들을 엄선해서 정리한 것이다. 본 논문에서는 표 2의 생성다항식을 대상으로 응용에 적합한 최적 CRC-p 코드를 생성할 수 있도록 한다.

표 2. 모의실험에 사용된 CRC-16, 24, 32의 생성다항식 $g(x)$

Table 2. Generator polynomial $g(x)$ of CRC-16, 24, 32 that are used in simulation

CRC-16	CRC-24	CRC-32
11021 _H	1864CFB _H	104C11DB7 _H
11FB7 _H	1328B63 _H	1A833982B _H
1A2EB _H	199BCFF _H	11EDC6F41 _H
16AFB _H	199999B _H	
1DFFF _H	1C5C57F _H	
11B2B _H	1800603 _H	
111F3 _H	100001B _H	
158DF _H	1129249 _H	
12F3D _H	1100821 _H	
1FB7F _H	1092121 _H	
14003 _H	11AC3A9 _H	
18005 _H		

3.2.1. $P_{ue}(\epsilon, n)$ 의 시뮬레이션 결과

그림 3~그림 5는 표 2의 생성다항식을 대상으로 2.1절에서 기술한 방법을 사용해서 미검출 오류확률 $P_{ue}(\epsilon, n)$ 을 구해서 나타낸 것이다. 이들 그림에서 CRC-16 및 CRC-24 코드의 경우 표 2의 생성다항식에 따라 $P_{ue}(\epsilon, n)$ 이 유사한 특성을 보여 구분하기 어려운 생성다항식을 생략하고 도론했다. 부호어 길이 n 은 $n = 128 \sim n = 1152$ 까지 8의 배수 단위로 변화시켜 각 생성다항식의 $P_{ue}(\epsilon, n)$ 을 구했다.

CRC-16 코드의 경우 부호어 길이 n 이 512 이하인 경우 생성다항식에 따라 에러 발생확률 ϵ 이 증가할 때 $P_{ue}(\epsilon, n)$ 가 단조증가 하지 않는 “improper” 코드 특성을 갖는 생성다항식도, n 값이 512 이상이 되면 모든 생성다항식의 CRC 코드가 “proper” 특성을 갖는 것을 확인할 수 있었다¹⁸⁾.

이는 n 이 증가함에 따라 $P_{ue}(\epsilon, n) \approx 2^{-n}$ 에 근사화 되는 특성에 좌우되기 때문이다. 또한 CRC-24 코드의 경우 생성다항식 1800603_H 및 199999B_H에 의한 코드는 $n = 1152$ 에서도 “proper” 특성을 갖지 못하면서 “good” 코드로서의 특성을 잃어버리는 것을 알 수 있다. 마지막으로 CRC-32 코드의 경우에는 실험에 사용한 모든 생성다항식이 주어진 부호어 길이에서는 “improper” 특성을 보이고 있으며, 부호어 길이가 증가함에 따라 그 특성이 강화되고 있어, “proper” 특성을 갖는 새로운 CRC-32 생성다항식의 개발이 요구된다.

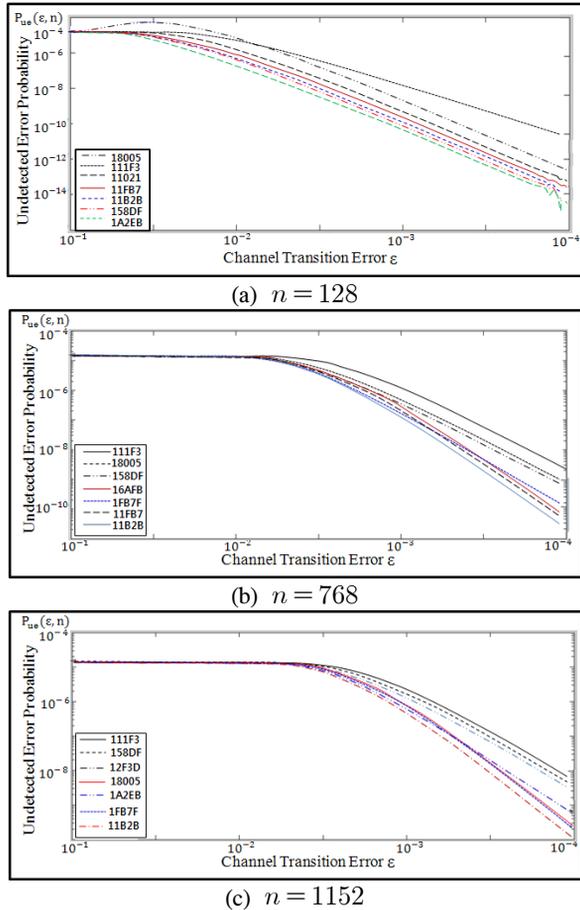


그림 3. 부호어 길이 n 에 대한 CRC-16의 $P_{ue}(\epsilon, n)$ 의 실험결과
 Fig. 3. Simulation results of $P_{ue}(\epsilon, n)$ of CRC-16 for codeword length n

CRC-16 코드에서 부호어 길이 $n = 128 \sim 512$ 에서는 158DF_H, 12F3D_H 등의 생성다항식이 우수한 미검출 오류 특성을 나타내고, $n = 768 \sim 1152$ 에서는 11B2B_H, 1FB7F_H가 좋은 특성을 갖는 것을 알 수 있다.

또한 CRC-24 코드에서는 부호어 길이 $n = 128 \sim 512$ 에서는 1092121_H, 1C5C57F_H 등의 생성다항식이 평균적으로 좋은 성능을 나타내고 있으며, $n = 768 \sim 1152$ 에서는 1328B63_H, 1864CFB_H의 생성다항식의 $P_{ue}(\epsilon, n)$ 특성이 우수하다. CRC-32 코드에서는 부호어 길이의 변화와 무관하게 11EDC6F41_H의 생성다항식이 좋은 성능을 보였다. 또한 2.1절에서 기술한바와 같이 CRC-16 및 CRC-24 코드에서 부호어 길이 n 이 작은 경우 채널오류 발생확률 ϵ 의 값에 상관없이 생성다항식에 따라 $P_{ue}(\epsilon, n)$ 의 특성이 변화되는 것을 알 수 있다. 그러나 n 이 증가함에 따라 $\epsilon \geq 10^{-2}$ 에서는 모든 생성다항식에서 동일한

$P_{ue}(\epsilon, n)$ 을 갖지만, ϵ 이 감소하게 되면 생성다항식에 따라 $P_{ue}(\epsilon, n)$ 의 특성이 변화되는 것을 나타내고 있다. CRC-32 코드의 경우 그림 5에 나타난 바와 같이 실험에서 사용한 부호어 길이 n 의 범위에서는 서로 다른 $P_{ue}(\epsilon, n)$ 의 특성을 보였으나, n 을 보다 더 큰 값으로 증가시키면 CRC-16 및 24와 유사한 특성을 갖는 것이 예상된다.

이상과 같이 성능이 우수한 것으로 평가된 생성다항식에 의한 CRC-p 코드들의 성능이 p 와 부호어 길이 n 에 따라 변화되는 것을 알 수 있다. 일반적으로 CRC-p 코드의 성능은 생성다항식에 좌우되는 무계분포 A_i 와 부호어 길이 n 에 의해 결정된다. 또한 무계분포 A_i 는 생성다항식의 차수 m 과 부호어 길이 n 에 따라 변화되고, 이들의 관계를 나타내는 구체적인 이론적 해석수단은 제시되어 있지 않다. 따라서 부호어 길이에 따른 최적의 CRC-p 코드는 실험적인 방법으로 구하는 것이 일반적이다¹⁶⁾

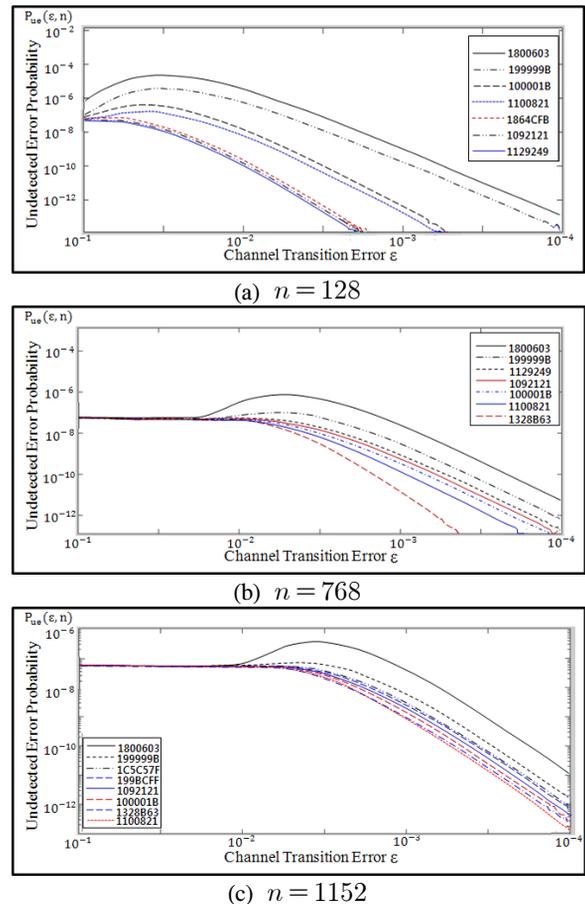


그림 4. 부호어 길이 n 에 대한 CRC-24의 $P_{ue}(\epsilon, n)$ 의 실험결과
 Fig. 4. Simulation results of $P_{ue}(\epsilon, n)$ of CRC-24 for codeword length n

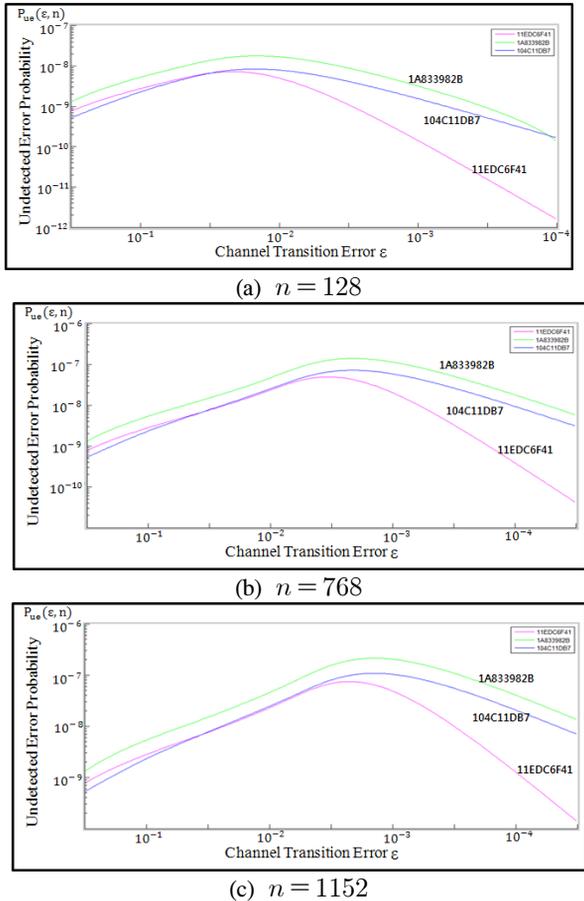


그림 5. 부호어 길이 n 에 대한 CRC-32의 $P_{ue}(\epsilon, n)$ 의 실험결과
 Fig. 5. Simulation results of $P_{ue}(\epsilon, n)$ of CRC-32 for codeword length n

3.2.2. 최소해밍거리 $d_{min}(n)$ 의 결정

2.2절의 식 (16)을 사용해서 C_n^\perp 의 무게분포 B_i 로부터 C_n 의 무게분포 A_i 를 구한다. CRC-p 코드의 최소해밍거리 $d_{min}(n)$ 은 A_0 를 제외하고 처음으로 $A_j \neq 0$ 일 경우 $d_{min}(n) = j$ (단 $A_i = 0, i = 0, 1, 2, \dots, j-1$)으로 정의된다. 표 2의 생성다항식을 대상으로 부호어 길이 $n = 128 \sim 8192$ 사이의 $d_{min}(n)$ 을 구해서 나타낸 것이 표 3~표 5이다. 표 3 및 표 4에 나타낸 생성다항식은 표 2의 CRC-16 및 CRC-24 생성다항식에서 $P_{ue}(\epsilon, n)$ 의 특성이 나쁜 것을 제외했다. 그림 3~그림 5에서 제시한 미검출 오류확률 $P_{ue}(\epsilon, n)$ 의 결과로부터 동일한 $d_{min}(n)$ 의 값을 갖는 생성다항식에서도 “improper” 특성을 갖는 생성다항식보다 “proper” 특성을 갖는 생성다항식이 보다 좋은 코드가 되는 것을 확인할 수 있다.

표 5의 결과는 IEEE 802.3 표준의 CRC-32 코드

만을 대상으로 부호어 길이 $33 \leq n < 12144$ 의 변화에 대한 $d_{min}(n)$ 을 조사하고 에러검출성능을 분석한 결과^[2]와 잘 일치하고 있음으로 보여주고 있다. CRC-24 코드의 경우 생성다항식 1328B63_H의 $d_{min}(n)$ 특성이 가장 우수하고, 이는 $P_{ue}(\epsilon, n)$ 의 특성과 잘 일치하고 있다. 특히 CRC-32 코드의 경우에도 IEEE 802.3 표준 CRC-32 코드보다 11EDC6F41_H에 의한 CRC-32 코드의 특성이 우수함을 알 수 있다. 뿐만 아니라 CRC-16 코드의 $d_{min}(n)$ 은 최대로 $d_{min}(n) = 4$ 이고 이는 기존의 여러 연구결과와 일치한다. 또한 이들의 결과는 단축코드에 대한 이론적 $d_{min}(n)$ 의 값과는 다르게 생성다항식에 따라 다양한 $d_{min}(n)$ 의 값을 갖는 것을 알 수 있다^[8].

표 3~표 5의 결과로부터 생성다항식에 따른 $d_{min}(n)$ 의 변화가 많지 않은 것을 알 수 있다. 또한 동일한 $d_{min}(n)$ 의 생성다항식의 경우에도 3.2.1절에 제시한 바와 같이 부호어 길이 n 에 따라 $P_{ue}(\epsilon, n)$ 의 변화가 발생하기 때문에 최상의 CRC 코드 생성은 $d_{min}(n)$ 만으로는 결정할 수 없다.

3.2.3. VHF 대역 해양채널에 대한 CRC-p 코드의 선정과 성능분석

3.1절에서 기술한 VHF 대역 해양 무선통신 시스템에의 적용을 위한 CRC-p 코드의 성능을 분석하기 위해, 표 1에서 제시한 주요 규격 중 $\pi/4$ -DQPSK 변복조기를 대상으로 모의실험을 수행했다. 표 1에서 제시한 바와 같이 데이터 전송율은 28.8kbps, 슬롯 단위별 최대 전송 비트수는 768비트로 한정된다.

표 3. CRC-16 코드 생성다항식의 최소 해밍거리 $d_{min}(n)$
 Table 3. Minimum Hamming distance $d_{min}(n)$ for generator polynomial of CRC-16 code

생성다항식	$d_{min}(n)$	
	4	3
11021 _H	128 ~ 8192	
1A2EB _H	128 ~ 8192	
158DF _H	128 ~ 275	276 ~ 8192
12F3D _H	128 ~ 478	479 ~ 8192
1DFFF _H	128 ~ 8192	
11B2B _H	128 ~ 1165	1166 ~ 8192
1FB7F _H	128 ~ 663	664 ~ 8192
11FB7 _H	128 ~ 8192	

표 4. CRC-24 코드 생성다항식의 최소 해밍거리 $d_{\min}(n)$
 Table 4. Minimum Hamming distance $d_{\min}(n)$ for generator polynomial of CRC-24 code

생성다항식	$d_{\min}(n)$			
	6	5	4	3
1864CFB _H	128 ~ 541		542 ~ 8192	
1129249 _H	128 ~ 155	156 ~ 311	312 ~ 3336	3337 ~ 8192
11AC2A9 _H	128 ~ 181	182 ~ 541	542 ~ 6200	6201 ~ 8192
1C5C57F _H	128 ~ 333		3334 ~ 8192	
1328B63 _H	128 ~ 846		847 ~ 8192	
1100821 _H		128 ~ 655	656 ~ 2661	2662 ~ 8192
100001B _H		128 ~ 534	535 ~ 5839	5840 ~ 8192
1092121 _H	128 ~ 192	193 ~ 361	362 ~ 6993	6994 ~ 8192

CRC 코드의 성능을 도출하는 것이 목적이므로 그림 2의 전송 패킷 모델 중 CRC-p1만을 대상으로 한정하고 부호어 길이 n 을 $n=128 \sim 768$ 으로 가변시켜 CRC-p 코드의 에러검출 및 정정능력을 BER로 측정했다.

해양채널의 특성을 반영하기 위해 세이핑 필터로 21 탭의 SRRC(square root raised cosine) 필터와 roll off

계수 $\alpha=0.5$ 의 값을 사용했으며, 해양채널로서 식 (19)와 같은 2-ray 라이시안 페이딩 채널을 가정했다.

$$\begin{aligned}
 f_{Rician}(r) &= \sqrt{\frac{K}{K+1}} + \sqrt{\frac{1}{K+1}} f_{Rayleigh}(r) \\
 &= \sqrt{\frac{K}{K+1}} + \sqrt{\frac{1}{K+1}} \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

여기서 K 는 $K=A^2/\sigma^2$ 와 같이 정의되는 값이고, 이는 페이딩성분과 비페이딩성분간 상대전력의 세기를 나타내는 변수이고, 실험에서는 $K=9$ 의 값을 사용했다. 또한 선박의 이동성을 반영하기 위해, 도플러 주파수는 $f_d=10.6Hz$ 를 적용했다.

3.2.2절의 최소해밍거리 계산에서 사용한 생성다항식을 대상으로 신호대 잡음비 E_b/N_0 의 변화에 CRC 코드의 BER 결과를 나타낸 것이 그림 6~그림 8이다. CRC-16 코드의 경우, 부호어 길이 $n=128$ 에서는 생성다항식에 따른 BER 성능의 변화가 $E_b/N_0=6dB$ 까지 변화가 거의 없이 동일하지만 $E_b/N_0 > 6dB$ 에서는 생성다항식에 따라 BER 성능변화를 보이고 있다. 그러나 $n=768$ 과 같이 부호어 길이가 증가함에 따라 생성다항식에 따른 BER 성능 변화가 적고, $E_b/N_0 \geq 8dB$ 의 구간에서 생성다항식간의 BER 성능 차이를 보이고 있다. 이러한 경향은 CRC-24 코드에서도 동일하다.

표 5. CRC-32의 최소 해밍거리 $d_{\min}(n)$

Table 5. Minimum Hamming distance $d_{\min}(n)$ for generator polynomial of CRC-32 code

생성다항식	$d_{\min}(n)$							
	18	17	16	15	14	13	12	11
104C11DB _{7H} (IEEE-802)				32 ~ 42			43 ~ 44	45~53
1A833982B _H				33 ~ 35			36 ~ 49	50~53
11EDC6F41 _H	33		34 ~ 38		39 ~ 40		41 ~ 52	

생성다항식	$d_{\min}(n)$						
	10	9	8	7	6	5	4
104C11DB _{7H} (IEEE-802)	54~66	67~89	90~123	124~203	204~300	301~3006	3007~8192
1A833982B _H	54~59		60~90	91~113	114~1092	1093~8192	
11EDC6F41 _H	53~79		80~209		210~5275		5276~8192

특히 CRC-32 코드의 경우 실험에서 사용한 생성다항식간의 BER 성능변화는 크지 않은 것을 확인했다. 또한 CRC-p 코드에 따른 BER 성능변화가 크지 않은 것은 CRC 코드가 갖는 오류검출 및 정정의 한계점에 기인한 것이다. 즉 표 3에 나타난 것처럼 최소해밍거리 $d_{\min}(n)$ 가 부호어 길이 $n \geq 512$ 에서는 3~4 정도의 값만을 가지므로 에러정정능력은 1비트에 지나지 않기 때문이다.

BER 및 미검출 오류확률 $P_{ue}(\epsilon, n)$ 의 결과들을 기반으로 최적의 CRC-p 코드는 CRC-16의 경우 11B2B_H, CRC-24의 경우 1328B63_H, CRC-32의 경우 11EDC6F41_H의 생성다항식들이 최적의 코드 생성다항식임을 확인했다. 이는 표준코드로 사용되는 코드보다 이들 생성다항식에 의한 CRC 코드의 오류검출 및 정정능력이 우수함을 보이고 있다.

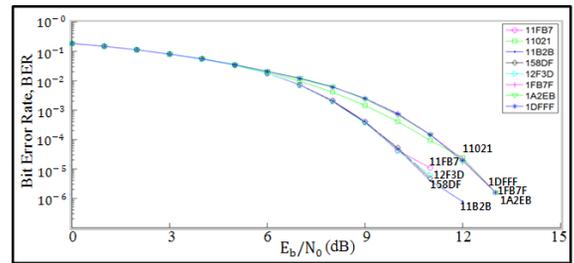
IV. 결 론

본 논문에서는 VHF 대역 해양 ad-hoc 무선통신용 최적 CRC-p 코드를 개발하기 위해, 다양한 생성다항식을 대상으로 CRC 코드의 성능을 분석했다. 이를 위해 순회 해밍코드나 원시 BCH 코드의 단축으로 생성되는 CRC 코드에 대해, 미검출 오류확률과 최소해밍 거리를 계산하는 방법을 제시했으며, 라이시안 해양 채널환경과 $\pi/4$ -DQPSK 변복조기에 의한 비트 오류율을 구해서 최적 CRC-p (p=16, 24, 32) 코드를 도출했다. 다양한 CRC-p 코드 생성을 위한 생성다항식을 대상으로 미검출 오류확률 $P_{ue}(\epsilon, n)$ 을 계산해서 부호어 길이의 변화에 대한 최적 CRC-p 코드의 생성다항식을 제시했다. 또한 최소해밍거리 $d_{\min}(n)$ 의 계산으로부터, CRC 코드의 오류검출 성능은 $d_{\min}(n)$ 에 의해 결정되지 않고 각 코드의 무게분포 특성에 좌우되는 것을 보였다.

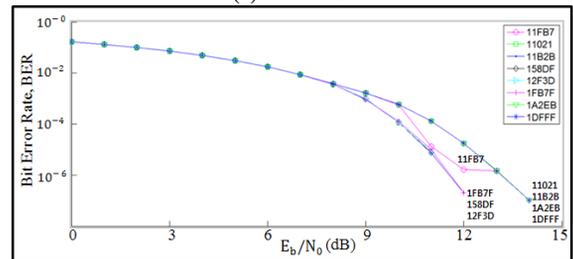
VHF 대역 해양채널에 대한 CRC-p 코드의 에러검출 및 정정능력을 검증하기 위해, 라이시안 채널모델과 $\pi/4$ -DQPSK 변복조를 한정해서 제안한 데이터 전송패킷을 기반으로 E_b/N_0 의 변화에 대한 각 CRC 코드의 BER 변화특성을 측정했다. $P_{ue}(\epsilon, n)$ 과 BER의 실험결과로부터, CRC-16의 경우 11B2B_H, CRC-24의 경우 1328B63_H, CRC-32의 경우 11EDC6F41_H와 같이 기존 표준 CRC 코드와 다른 최적의 CRC 코드 생성다항식을 도출했다.

CRC-32의 경우 모의실험에서 계산량의 문제로 인

해 부호어 길이 n 을 $n \leq 1152$ 으로 제한하고, 매우 한정된 종류의 생성다항식만을 사용했다. 이로 인해 $n \geq 1152$ 와 같이 보다 긴 부호어의 경우, 충분한 CRC-32 코드 특성의 분석이 얻어지지 못했다. 또한 본 실험에서 사용한 CRC-32 코드는 “improper” 특성을 나타내고 있어 새로운 CRC-32 코드 생성을 위한 생성다항식의 개발이 필요하다.

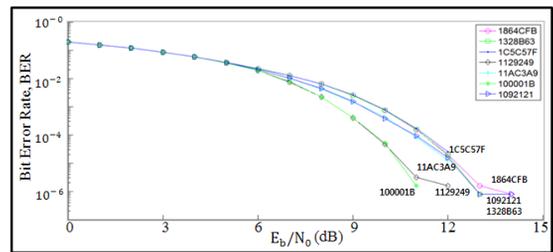


(a) $n = 128$

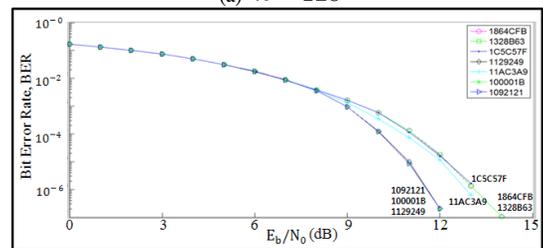


(b) $n = 768$

그림 6. CRC-16 코드에 의한 BER 결과
Fig. 6. The results of BER for CRC-16 codes



(a) $n = 128$



(b) $n = 768$

그림 7. CRC-24 코드에 의한 BER 결과
Fig. 7. The results of BER for CRC-24 codes

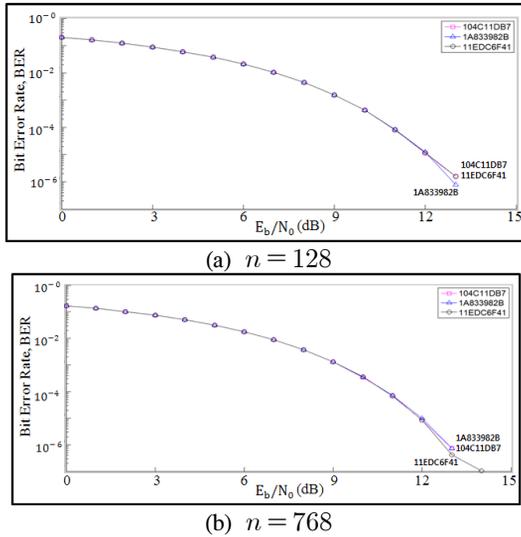


그림 8. CRC-32 코드에 의한 BER 결과
 Fig. 8. The results of BER for CRC-32 codes

참고 문헌

[1] K. A. Witzke and C. Leung, "A comparison of some error detecting CRC code standards," *IEEE Trans. Communications*, vol. COM-33, no. 9, pp. 996-998, Sept. 1985.

[2] Tohru Fujiwara, Tadao Kasami, and Shu Lin, "Error detecting capabilities of the shortened Hamming codes adopted for error detection in IEEE standard 802.3," *IEEE Trans. Communications*, vol. COM-37, no. 9, pp. 986-989, Sept. 1989.

[3] Guy Castagnoli, Stefan Brauer, and Martin Herrmann, "Optimization of cyclic redundancy-check codes with 24 and 32 parity bits," *IEEE Trans. Communications*, vol. 41, no. 6, pp. 883-892, June 1993.

[4] Guy Castagnoli, Jurg Ganz, and Patrick Graber, "Optimum cyclic-check codes with 16-bit redundancy," *IEEE Trans. Communications*, vol. 38, no. 1, pp. 111-114, Jan. 1990.

[5] Namgi Kim, "Variable CRC scheme for efficient data transmission control for IEEE 802.16e wireless network," *Korean Institute of Information Technology(Ki-iT)*, vol. 7, no. 3, pp. 109-115, 2009. 06.

[6] Shu Lin and Daniel J. Costello, *Error*

Control Coding, 2nd ed., Prentice Hall, 2004.

[7] Tohru Fujiwara, Tadao Kasami, Atsushi Kitai, and Shu Lin, "On the undetected error probability for shortened Hamming codes," *IEEE Trans. Communications*, vol. COM-33, no. 6, pp. 570-574, June 1985.

[8] Phillip Merkey and Edward C. Posner, "Optimum cyclic redundancy codes for noisy channel," *IEEE Trans. Information Theory*, vol. IT-30, no. 6, pp. 865-867, Nov. 1984.

[9] G. Funk, "Determination of best shortened linear codes," *IEEE Trans. Communications*, vol. 44, no. 1, pp. 1-6, Jan. 1996.

[10] Peter Kazakov, "Fast calculation of the number of minimum weight words of CRC codes," *IEEE Trans. Information Theory*, vol. 47, no. 3, pp. 1190-1195, March 2001.

[11] F. J. MacWilliams and N. J. A. Sloane, *The Theory of Error-Correcting Codes*, North-Holland, 1977.

[12] T. Baicheve, S. Dodunekov and P. Kazakov, "Undetected error probability performance of cyclic redundancy-check codes of 16-bit redundancy," *IEE Proceeding Communications*, vol. 147, no. 5, pp. 253-256, Oct. 2000.

[13] Tenkasi V. Ramabadran and Sunil S. Gaitonde, "A tutorial on CRC computations," *IEEE Micro*, vol. 8, no. 4, pp.562-74, August 1988.

[14] Dexter Chun and Jack Keil Wolf, "Special hardware for computing the probability of undetected error for certain binary CRC codes and test results," *IEEE Trans. Communications*, vol. 42, no. 10, pp. 2769-2772, Oct. 1994.

[15] Vladimir I. Levenshtein, "Krawtchouk polynomials and universal bounds for codes and designs in Hamming spaces," *IEEE Trans. Information Theory*, vol. 41, no. 5, pp. 1303-1321, Sept. 1995.

[16] Philip Koopman and Tridib Chakravarty, "Cyclic redundancy code (CRC) polynomial selection for embedded networks," *The International Conference on Dependable*

