

# 최소거리가 확장된 극 부호의 연속 제거 리스트 복호 성능

류대현\*, 김재열\*, 김종환\*\*, 김상호°

## Performance of Successive-Cancellation List Decoding of Extended-Minimum Distance Polar Codes

Daehyeon Ryu\*, Jae Yoel Kim\*, Jong-Hwan Kim\*\*, Sang-Hyo Kim°

### 요약

극 부호(polar codes)는 광범위한 이진 입력 이산 무기억 채널(binary input discrete memoryless channel: BI-DMC)에서 채널 용량에 달성하는 것이 이론적으로 증명된 최초의 채널부호이다. 하지만 유한한 길이를 갖는 극 부호는 연속 제거 리스트(successive-cancellation list: SCL) 복호기에서 오류마루(error floor)가 발생하는 문제점이 있다. 선행 연구에 따르면 이 오류마루 현상은 극 부호에 오류 검출 코드(error detection codes) 중 하나인 CRC(Cyclic Redundancy Check) 부호를 연결했을 때 효과적으로 낮출 수 있는 것으로 알려져 있다. 본 논문에서는 외부 부호(outer codes)를 사용하지 않고 극 부호와 RM(Reed-Muller) 부호의 생성 행렬 연관성을 이용하여 기존 극 부호보다 확장된 최소거리를 갖는 극 부호를 제안한다. 그리고 제안된 극 부호와 CRC 부호를 연결한 극 부호의 성능을 비교한다.

**Key Words** : polar codes, Reed-Muller codes, minimum distance, channel polarization, SCL decoder

### ABSTRACT

Polar codes are the first provable error correcting code achieving the symmetric channel capacity in a wide case of binary input discrete memoryless channel(BI-DMC). However, finite length polar codes have an error floor problem with successive-cancellation list(SCL) decoder. From previous works, we can solve this problem by concatenating CRC(Cyclic Redundancy Check) codes. In this paper we propose to make polar codes having extended-minimum distance from original polar codes without outer codes using correlation with generate matrix of polar codes and that of RM(Reed-Muller) codes. And we compare performance of proposed polar codes with that of polar codes concatenating CRC codes.

### I. 서론

극 부호(polar codes)는 2008년 Arikan에 의해 제안된 부호로, 낮은 부·복호화 복잡도를 가지며 일반적인 이진 입력 이산 무기억 대칭 채널

(binary-input discrete memoryless symmetric channel: B-DMC)에서 채널 용량에 달성하는 것이 이론적으로 증명된 최초의 오류 정정 부호이다<sup>[3,4]</sup>. [4]에서 Arikan은 극 부호의 복호 방법으로 연속 제거(successive cancellation: SC) 복호기를 제안하

※ 이 논문은 2011년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(2011-0004150).

♦ 주저자 : 성균관대학교 정보통신대학 통신 및 부호이론 연구실, alestetic@skku.edu, 준회원

° 교신저자 : 성균관대학교 정보통신대학 통신 및 부호이론 연구실, iamshkim@skku.edu, 종신회원

\* 삼성전자 DMC연구소, kimjy@samsung.com

\*\* 성균관대학교 정보통신대학 통신 및 부호이론 연구실, sas2323@skku.edu, 준회원

논문번호 : KICS2012-09-471, 접수일자 : 2012년 9월 30일, 최종논문접수일자 : 2013년 1월 7일

였다. 하지만 유한한 부호 길이  $N$ 을 갖는 극 부호의 SC 복호 성능은 같은 길이의 LDPC(Low Density Parity Check) 부호나 터보 부호의 복호 성능보다 열화된 모습을 보인다. 이러한 성능 차이를 극복하기 위해 극 부호 복호 방법으로 신뢰 전파(belief propagation: BP) 복호와 선형 프로그램(linear program: LP) 복호, 내부 부호(inner codes)를 이용한 SC 복호 방법 등이 제안되었으며<sup>[5-12]</sup>, 최근에는 우수한 성능을 보이는 SCL(SC list) 복호 방법이 제안되었다<sup>[13]</sup>.

SCL 복호기는  $L$ 개의 부호어 후보를 생성하여 이 중 전송된 부호어를 추정하는 복호기로 SC 복호기보다 향상된 성능을 보인다. 하지만 SCL 복호기를 사용한 유한한  $N$ 을 갖는 극 부호의 복호 성능은 오류 마루(error floor)가 발생하는 문제점이 있다. Tal과 Vardy의 연구에 의하면 이와 같은 문제점은 오류검출부호(error detecting code) 중 하나인 CRC(Cyclic Redundancy Check) 부호를 극 부호와 연결하여 효과적으로 해결할 수 있으며 CRC 부호를 연결한 극 부호의 SCL 복호 성능은 터보 부호나 LDPC 부호에 근접한 성능을 보인다.

본 논문에서는 극 부호와 RM(Reed-Muller) 부호의 생성 행렬의 연관성을 이용하여 CRC 부호와 같은 외부부호(outer code)를 사용하지 않고 기존의 극 부호화 규칙으로 설계된 부호보다 최소거리가 확장된 극 부호 설계 방법을 제안한다. 그 후 제안한 극 부호의 SCL 복호 성능을 확인한다. 또한 이 결과를 토대로 CRC 부호를 연결한 극 부호와 SCL 복호기 사이의 관계를 분석한다.

본 논문은 다음과 같이 구성된다. II장에서는 극 부호와 SCL 복호기에 관하여 살펴보고 III장에서는 본 논문에서 제안하는 방법인 극 부호의 최소거리 확장 방법에 대해 자세히 알아본다. IV장에서는 모의실험을 통해 제안된 극 부호의 성능과 CRC 부호를 연결한 극 부호의 성능을 비교한다. 마지막으로 V장에서 평가 및 결론을 내린다.

## II. 극 부호를 위한 SCL 복호기

### 2.1. 극 부호

극 부호는 채널 양극화(channel polarization) 현상을 이용하여 채널 용량에 달성하는 부호이다. 채널 양극화는  $N$ 개의 독립적인 B-DMC  $W$ 의 합성(combining)과 분리(splitting) 과정을 수행하여  $N$ 이 증가할수록 분리 채널의 채널 용량이 0 또는 1에

가까워지는 현상을 일컫는다.  $N$ 이 무한대가 되면 모든 분리 채널들의 용량은 0 또는 1이 된다. 이 때 용량이 1인 분리 채널의 비율은 기존의 채널  $W$ 의 채널 용량과 일치하게 된다.

본 절에서는 채널 양극화를 야기하는 채널 합성과 분리 과정에 대해 알아본다.  $N=2^n$ ( $n$ 은 양의 정수)를 만족하는  $N$ 에 대하여  $N$ 개의 채널  $W$ 가 병렬적으로 존재하는 것을  $W^N$ ,  $N$ 개의 독립적인 채널  $W$ 의 채널 합성으로 인해 생성된 합성 채널은  $W_N$ , 채널 분리 과정으로 생성된 분리 채널은  $W_N^{(i)}$  ( $1 \leq i \leq N$ )로 표기한다.  $a_i$ 는 행벡터  $(a_i, \dots, a_j)$ 를 나타내며,  $j < i$ 인 경우 공벡터(empty vector)가 된다.

채널 양극화를 야기하는 연산 중 하나인 채널 합성은 극 부호의 부호화 과정과 관련이 있다. 이는 채널  $W^N$ 의 재귀적인 연산을 통하여 채널  $W_N$ 을 생성하는 과정을 일컫는다.  $W_N$ 의 입력  $u_1^N$ 과  $W^N$ 의 입력  $x_1^N$ 은 일대일 대응관계를 갖고 이는 행렬  $G_N$ 으로 표현이 가능하며  $x_1^N = u_1^N G_N$ 이 성립한다.  $G_N$ 은 크기  $N \times N$ 의 행렬로  $B_N F^{\otimes n}$ 으로 정의된다. 따라서 두 채널  $W_N$ 과  $W^N$ 의 천이확률은 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$W_N(y_1^N | u_1^N) = W^N(y_1^N | u_1^N G_N) \quad (1)$$

[4]에서 정의된  $B_N$ 은 bit-reversal의 치환행렬이며  $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ , 연산자  $\otimes$ 는 Kronecker power를 나타낸다.

그림 1은  $W^4$ 에서  $W_4$ 를 생성하는 과정을 보여준다. 그림 1에서  $u_1^4$ 는  $W_4$ 의 입력이며,  $x_1^4$ 는  $u_1^4$ 에 의해 생성된 부호어로서  $W^4$ 의 입력이고  $y_1^4$ 는 채널의 출력이다.  $R_4$ 는 입력  $(s_1, s_2, s_3, s_4)$ 의 순서를  $(s_1, s_3, s_2, s_4)$ 와 같이 치환하는 연산자(bit-reversal operator) 역할을 수행한다.

채널 양극화를 야기하는 다른 연산인 채널 분리는 극 부호의 복호화 과정과 관련이 있다.

$$W_N^{(i)}(y_i^N, u_1^{i-1} | u_i) \equiv \sum_{u_{i+1}^N} \frac{1}{2^{N-1}} W_N(y_1^N | u_1^N) \quad (2)$$

식 (2)는  $W_N$ 을 분리 채널  $W_N^{(i)}$ 로 분리하는 과

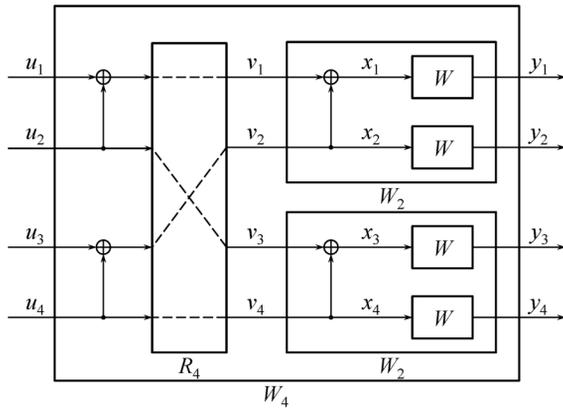


그림 1. 이진 극 부호의 채널 합성 과정 ( $N=4$ )  
 Fig. 1. The process of channel combining of binary polar codes ( $N=4$ )

정을 나타낸다.  $W_N^{(i)}$ 은 채널 출력  $y_1^N$ 과 입력 벡터  $u_1^{i-1}$ 을 채널 출력으로 갖고  $u_i$ 를 입력으로 갖는 채널이다. 개념적으로는  $y_1^N$ ,  $u_1^{i-1}$ 을 완벽히 알고 있을 때  $u_i$  복호화 관련이 있는 채널을 의미한다. 이 개념을 이용한 지니 SC 복호기는  $y_1^N$ ,  $u_1^{i-1}$ 을 완벽히 알고 있을 때  $u_i$ 를 복호하는 복호기이다. 지니 SC 복호기를 통해 실제 복호에 사용될 각 분리 채널의 용량을 계산한다. 극 부호는 SC 복호기로 분리 채널을 실현하기 위해 송신기와 수신기가 모두 알고 있는 고정비트(frozen bit)를 이용한다. SC 복호기는 수식 (2)의 분리 채널의 개념으로 동작하기 위해 용량이 0에 가까운 채널에 0 또는 1로 고정된 고정비트를 두고, 채널 용량이 1에 가까운 채널에는 정보비트(information bit)를 전송한다. 이와 같은 방법으로  $N$ 이 무한대인 극 부호는 채널 용량에 달성하게 된다. 정보 집합(information set)  $I$ 는 [4]에서 소개된 Bhattacharyya 파라미터로 구해질 수 있지만, [14]에서 소개된 밀도 진화(density evolution)를 이용하여 오율  $P_e(W_N^{(i)})$ 가 낮은  $W_N^{(i)}$ 의 인덱스를 선택하는 방법으로도 결정될 수 있다. 본 논문에서는  $P_e(W_N^{(p_j)}) \leq P_e(W_N^{(p_k)}), (j < k)$ 의 조건을 만족하는 인덱스들의 순열을  $\mathbb{P} = (p_1, p_2, \dots, p_N)$ 라고 한다. 따라서 차원  $K$ 인 부호는  $I = \{p_1, p_2, \dots, p_K\}$ 를 갖는다. 예를 들어  $N=8, K=4$ 인 극 부호의  $\mathbb{P}$ 가  $(8, 7, 5, 3, 6, 4, 2, 1)$ 라면  $I = \{8, 7, 5, 3\}$ 이다.

### 2.2. SCL 복호기

SCL 복호기는 Arkan이 [4]에서 제안한 SC 복호기의 성능을 개선하기 위해 제안되었다<sup>[13]</sup>. SCL

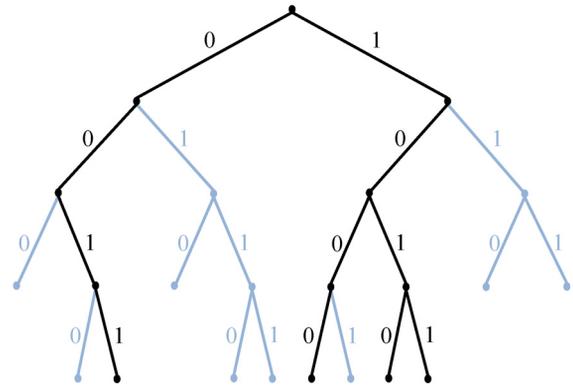


그림 2. 고정비트가 아닌 경우의 복호 경로 ( $L=4$ )  
 Fig. 2. Decoding paths of unfrozen bits ( $L=4$ )

복호기는 확장된 SC 복호기로서 SC 복호기와 마찬가지로 연속제거를 통해  $u_i$ 를 순차적으로 복호한다. 하지만 SCL 복호기는 1개의 복호 경로를 갖는 SC 복호기와는 달리  $L$ 개의 복호 경로를 리스트로 관리하며 최종적으로  $L$ 개의 복호 경로 중 1개의 부호어를 선택한다.

SCL 복호기의 알고리즘은 다음과 같다. SC 복호기 같은 경우에는  $i-1$ 번째 정보비트  $\hat{u}_{i-1}$ 를 복호하는 단계에서 0 또는 1 중 하나의 값으로 결정을 하고  $i$ 번째 비트를 복호하지만 SCL 복호기는  $i-1$ 번째 정보비트  $\hat{u}_{i-1}$ 를 복호하는 단계에서 0 또는 1 두 경우를 함께 고려한다. 그림 2에서 보이는 것과 같이 각 비트를 복호하는 단계에서 고정비트가 아닌 경우에는 복호 경로를 두 개로 나누고 고정비트인 경우에는 0 또는 1로 미리 정해진 고정비트를 선택한다. 단계가 증가함에 따라 경로 또한 지수적(exponential)으로 증가하여  $L$ 개의 경로보다 커지는 경우  $L$ 개만 남겨놓고 나머지는 제거한다. 남길 경로를 결정하는 방법은 각 경로의 확률을 통해 결정한다. 이 과정을 반복적으로 시행하여 최종적으로 복호된  $L$ 개의 부호어 중 사후 확률이 가장 높은 부호어를 전송된 부호어로 선택한다.

### 2.3. 극 부호의 오류마루현상

그림 3은 SC 복호기와 SCL 복호기의 성능을 비교하고 있다. 비교를 위해 이진입력 부가백색 정규 잡음 채널(binary input AWGN channel: BI-AWGNC)을 고려한다. 극 부호의 부호 길이  $N=2048$ , 부호율  $R=0.5$ 이며 SCL 복호기의  $L=16, 32$ 이다. 사용된 극 부호는 밀도 진화를 이용하여  $E_b/N_0 = 2$  dB에 최적화되도록 설계되었다. 그림 3에서 확인할 수 있듯이 극 부호의 SCL 복호

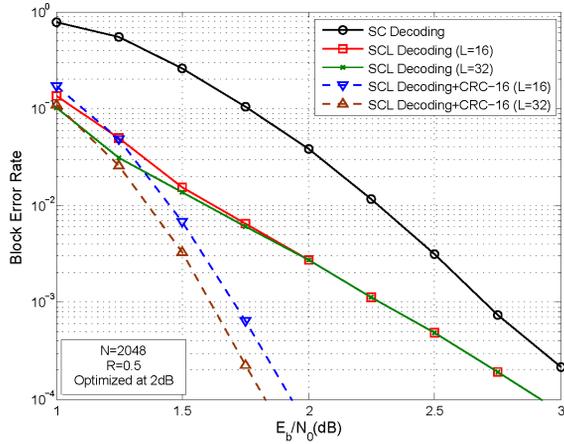


그림 3. 극 부호의 SC, SCL 복호기 블록 오류 성능  
Fig. 3. BLER performance of SC, SCL decoder of polar codes

성능은 SC 복호 성능보다 우수하지만 오류마루가 발생하는 문제점이 있다.  $L$ 의 크기를 키우더라도 오류마루에서 성능 향상은 더 이상 보이지 않게 된다. Tal과 Vardy는 CRC 부호를 연결시킴으로써 극 부호 복호결과의 오류마루현상을 효과적으로 해결하였다. 그림 3은 16비트의 CRC 부호를 연결한 극 부호의 SCL 복호 성능을 보여주고 있다.  $L=32$ 일 때 그림 3에서 보이는 것처럼 CRC 부호를 연결한 극 부호의 복호 성능은 기존 극 부호의 SCL 복호 성능보다 블록 오류(block error rate: BLER)  $10^{-4}$  기준으로 약 1 dB 개선된다.

일반적으로 오류마루의 기울기는 최소거리와 관계가 있다. 따라서 복호 성능은 최소거리의 지배를 받게 된다. 그러므로 본 논문에서는 SC 복호를 가정하고 생성된 기존의 극 부호 생성 규칙을 수정하여 극 부호의 최소거리를 확장하는 기법을 제안한다. 이렇게 생성된 단일 극 부호의 성능을 CRC가 연결된 극 부호의 성능과 비교한다.

### III. 극 부호의 최소거리 확장

RM 부호는 Reed와 Muller에 의해 제안된 부호로  $RM(r,n)$ 으로 표기되며  $r$ 은  $0 \leq r \leq n$ 의 정수,  $n$ 은  $1 \leq n$ 의 정수이다. RM 부호의 부호 길이는  $N_{RM} = 2^n$ , 차원은  $K_{RM}$ 이고 최소거리는  $d = 2^{n-r}$ 으로 표기한다. 차원  $K_{RM}$ 은 다음과 같이 구한다 [1,15,16].

$$K_{RM} = \sum_{i=0}^r \binom{n}{i} \quad (3)$$

부호 길이  $N$ 의 극 부호와 RM 부호의 생성행렬은 II장에서 소개된 같은  $G_N$ 에서  $K$ 만큼 행을 선택하여 얻어진다. 하지만  $G_N$ 의 행을 선택하는 방법에서 차이점이 존재한다. 극 부호는 분리 채널의 용량을 이용하여  $K$ 개의 오류가 낮은 분리 채널에 대응되는 행( $i$ 번째 분리 채널은  $G_N$ 의  $i$ 번째 행과 대응됨)을 선택하여 생성행렬을 얻지만 RM 부호는 해밍 무게(Hamming weight)가 최대인 행을 선택하여 생성행렬을 얻는다. 따라서  $N$ 에 관계없이 같은 부호율일 때 극 부호의 최소거리는 RM 부호의 최소거리보다 작거나 같게 된다.

본 논문에서는 기존 극 부호의 부호화 규칙을 따르면서 극 부호의 최소거리가 증가되도록 부호를 설계한다. 극 부호의 최소거리는 다음과 같이 정의할 수 있다<sup>2)</sup>.

$$d_{polar} = \min_{i \in I} 2^{wt(i)} \quad (1 \leq i \leq N) \quad (4)$$

식 (4)의  $i$ 는 분리 채널 인덱스를 나타내며  $wt(i)$ 는  $i-1$ 을  $n$ 비트로 이진 확장했을 때 1의 개수이다. 예를 들어,  $N=8$ 이고  $K=4$ 일 때  $I = \{9, 7, 5, 3\}$ 이다. 이 때 정보 집합  $I$  중  $2^{wt(i)}$ 를 최소로 하는  $i=3$ 이며  $i-1$ 의 3비트 이진확장 값은 010이다. 따라서  $wt(i)=1$ 이 되고  $d_{polar} = 2$ 가 된다. 식 (4)에 따르면 극 부호는  $I$ 에 의해 최소거리가 결정된다. 따라서  $I$ 의 변화에 따라 최소거리 확장이 가능하다. 극 부호의 최소거리를 확장하는 알고리즘은 크게 두 단계로 나눌 수 있다. 첫 번째 단계에서는 RM 부호와의 비교를 통해 극 부호의 최소거리를 확장 가능한지 확인하고 두 번째 단계에서는 첫 번째 단계에서 구한 최대 확장 가능한 거리를 이용하여 기존 극 부호의 최소거리를 확장한다. 각 단계별 알고리즘은 알고리즘 1과 알고리즘 2에서 자세히 설명된다.

#### 알고리즘 1: 최소거리 확장 여부 확인

- 입력: 극 부호의 부호 길이  $N=2^n$ , 차원  $K$ ,  $d_{polar}$
  - 출력: 확장 불가능 또는 최대 확장 가능한 최소거리
- ①  $r$ 을 0으로 초기화
  - ②  $RM(r,n)$ 의 차원을 식 (3)에 따라 계산
  - ③  $K_{RM} < K$ 이면,  $r$ 을 1 증가시키고 ②부터 반복,  $K_{RM} \geq K$ 이면,  $d_{RM}$ 과  $d_{polar}$ 의 크기를 비교
  - ④  $d_{RM} = d_{polar}$ 이면 확장 불가능 출력,  $d_{RM} < d_{polar}$ 이면 최대 확장 가능한 거리로  $d_{max} = d_{RM}$

**알고리즘 2:** 극 부호의 최소거리 확장

- 입력: 극 부호의  $N$ ,  $K$ ,  $\mathbb{P}=(p_1, p_2, \dots, p_N)$ , 확장될 최소거리  $d_{\text{ex}}$  ( $d_{\text{polar}} < d_{\text{ex}} \leq d_{\text{max}}$ )
  - 출력: 최소거리 확장된 극 부호  $\mathbb{P}_{\text{ex}}=(p_1, p_2, \dots, p_N)$ ,  $I_{\text{ex}} = \{q_1, q_2, \dots, q_K\}$
- ①  $j = N - K$ ,  $k = N - K + 1$ 로 초기화
  - ②  $2^{wt(p_j)} \geq d_{\text{ex}}$  이면,  $2^{wt(p_j)} < d_{\text{ex}}$  까지  $j$ 를 1씩 감소
  - ③  $2^{wt(p_k)} < d_{\text{ex}}$  이면,  $2^{wt(p_k)} \geq d_{\text{ex}}$  까지  $k$ 를 1씩 증가
  - ④  $p_j$ 와  $p_k$  위치를 치환 후,  $j$ 를 1 감소  $k$ 를 1 증가
  - ⑤ 단계부터 반복,  $j=1$ 이 되면  $\mathbb{P}$ 에서 각 원소의 위치가 치환된  $\mathbb{P}_{\text{ex}}$ 와 새로운 정보 집합  $I_{\text{ex}}$  출력

밀도 진화를 이용하여  $E_b/N_0 = 2$  dB에 최적화되도록 설계한  $N=2048$ ,  $K=1024$ 인 극 부호의 최소거리  $d_{\text{polar}} = 16$ 이다. 반면, 같은 길이와 같은 부호율을 갖는 RM(6,11)의 최소거리  $d_{\text{RM}} = 64$ 이다. 따라서  $N=2048$ ,  $K=1024$ 인 극 부호의 최소거리는  $I$ 를 변화시켜 최대  $d_{\text{polar}} = 64$ 까지 확장가능하다.  $d_{\text{polar}} = 64$ 로 확장한다면 모든  $i \in I$ 에 대해  $2^{wt(i)} < 64$ 인  $i$ 를  $2^{wt(j)} \geq 64$ 를 만족하는  $j \in I'$ 와 일대일로 교환한다. 이 때 밀도 진화로 계산된 분리 채널  $W_N^{(i)}$ 의 오류율이 작은  $j$ 가  $i$ 에 우선적으로 포함된다.  $W_N^{(j)}$ 의 오류율이 작은  $j$ 가  $I$ 에 우선적으로 포함되는 이유는  $I$ 의 변화로 인한 SC 복호의 성능 열화를 최소화하기 위함이다. 이와 다르게 최소거리  $d_{\text{polar}} = 8$ 을 갖는  $N=64$ ,  $K=32$ 인 극 부호는 확장이 불가능하다. 그 이유는  $G_{64}$ 의 행렬에서  $2^{wt(i)} \geq 16$ 인  $i$ 를 갖는  $K$ 는 최대 22이기 때문에  $K=32$ 인 극 부호는  $2^{wt(i)} < 16$ 인  $i$ 를  $I$ 에 반드시 포함할 수밖에 없기 때문이다.

표 1은  $R=0.5$ 일 때 부호 길이에 따른 최소거

표 1.  $R=0.5$ 일 때 부호 길이에 따른 최소거리 확장  
Table 1. Extending minimum distance based on block length with  $R=0.5$

$N$	MD	E-MD	Channel replacement ratio (%)	Remarks
32	4	8	6.3	○
64	8	불가	-	-
128	8	16	7.8	○
256	8	16	0.8	-
512	16	32	12.5	○
1024	16	32	4.6	-
2048	16	32	0.9	-
		64	14.7	○

리 확장 가능 여부를 보여준다. MD(minimum distance)는 기존 극 부호의 최소거리, E-MD(extended-MD)는 확장된 극 부호의 최소거리를 의미한다. 비고(Remarks)는 최소거리 확장 시 RM 부호와 동일 여부를 나타낸다.  $N$ 이 32, 128, 512일 때 최소거리를 확장한 극 부호와 RM 부호는 동일하며  $N=2048$ 인 경우는 기존 극 부호의 최소거리를 64로 네 배 확장했을 시 RM 부호와 동일하다.  $N=512$ 와 최소거리를 네 배 확장한  $N=2048$ 인 제안된 극 부호의 복호 성능은 기존 극 부호의 복호 성능보다 열화된 모습을 보인다. 성능이 열화되는 이유는 기존  $I$ 에 상대적으로 오류율이 높은 분리 채널  $W_N^{(j)}$ 의 인덱스  $j \in I'$ 가  $I$ 에 포함되기 때문이다. 성능 열화에 대한 자세한 분석은 IV장에서 다루어진다.

**IV. 모의실험**

이번 장에서는 기존 극 부호의 복호 성능과 확장된 최소거리를 갖는 극 부호의 복호 성능을 비교한다. 모의실험을 위해 이진입력 부가백색 정규잡음 채널(BI-AWGNC)을 고려하였다. 극 부호의  $N=32, 1024, 2048$ ,  $R=0.5$ 이며 SCL 복호기의  $L=16, 32$ 이다. 극 부호는  $E_b/N_0 = 2$  dB 채널에서의 밀도진화를 이용하여 설계하였다. 제안된 최소거리 확장 극 부호의 성능과 비교하기 위해 CRC 부호를 연결한 극 부호를 함께 제시하였다.

그림 4와 그림 5, 그림 6은 각각  $N=32, 128, 1024$ ,  $R=0.5$ 인 극 부호의 SCL 복호 성능을 보여준다. 그림 4의  $N=32$ 인 극 부호의 최소거리는 4에서 8로 확장되었고 그림 5의  $N=128$ 인 극 부호의 최소거리는 8에서 16으로 확장되었으며 그림 6의  $N=1024$ 인 극 부호의 최소거리는 16에서 32로 확장되었다. 그림 4의 CRC 부호를 연결한 극 부호는 기존 극 부호의 복호 성능을 개선하지 못하고 있다. CRC 부호를 연결한 극 부호의 성능이 기존 극 부호의 복호 성능에 근접한 모습을 보이는 이유는 CRC 부호 연결으로 인한 부호율 손실이 성능 향상보다 크기 때문이다. 반면 제안된 극 부호의 성능은 CRC를 연결한 극 부호보다 오류율  $10^{-3}$  기준으로  $E_b/N_0$ 는 약 0.8 dB 개선된다. 그림 5와 그림 6은 제안된 극 부호의 성능이 기존 극 부호의 성능보다 좋고 CRC 부호를 연결한 극 부호와 근접한 성능을 보인다.

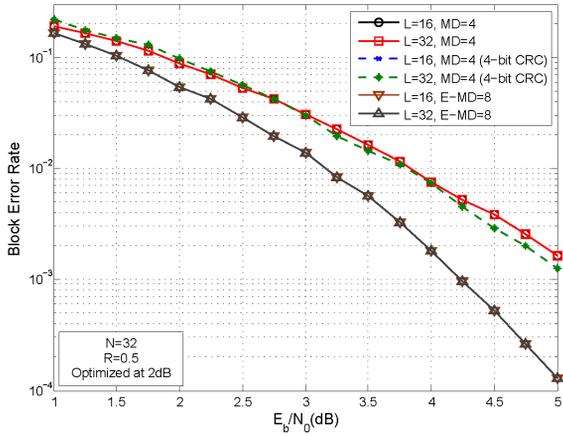


그림 4. 최소거리가 확장된 극 부호의 블록 오율 성능 ( $N=32$ ,  $E-MD=8$ )  
 Fig. 4. BLER performance of extended-minimum distance polar codes ( $N=32$ ,  $E-MD=8$ )

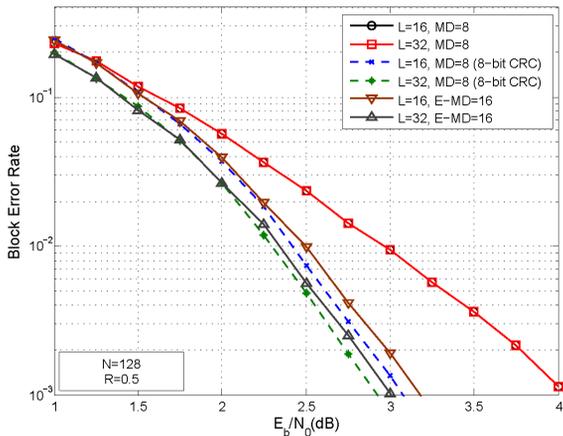


그림 5. 최소거리가 확장된 극 부호의 블록 오율 성능 ( $N=128$ ,  $E-MD=16$ )  
 Fig. 5. BLER performance of extended-minimum distance polar codes ( $N=128$ ,  $E-MD=16$ )

그림 7은  $N=2048$ 인 극 부호의 복호 성능을 보여준다. 제안된 극 부호의 최소거리는 기존 극 부호의 최소거리인 16보다 두 배 확장되었다.  $L=32$ 일 때 블록 오율  $10^{-4}$  기준으로 제안된 극 부호의 복호 성능이 기존 극 부호의 복호 성능보다 약 1 dB 이상 개선된다. 제안된 극 부호의 복호 성능은  $E_b/N_0 = 1.75$  dB 이하의 영역에서 16비트 CRC 부호를 연결한 극 부호의 복호 성능보다 나은 성능을 보이지만  $E_b/N_0 = 1.75$  dB 이후에는 성능 역전이 일어난다. 낮은  $E_b/N_0$ 에서 16비트 CRC 부호를 연결한 극 부호의 복호 성능이 제안된 극 부호의 복호 성능보다 좋지 않은 이유는 CRC 부호와 같은 외부 부호의 연결이 부호율 손실을 야기했기 때문이다. 하지만  $L=32$ 인 제안된 극 부호는 최소거리

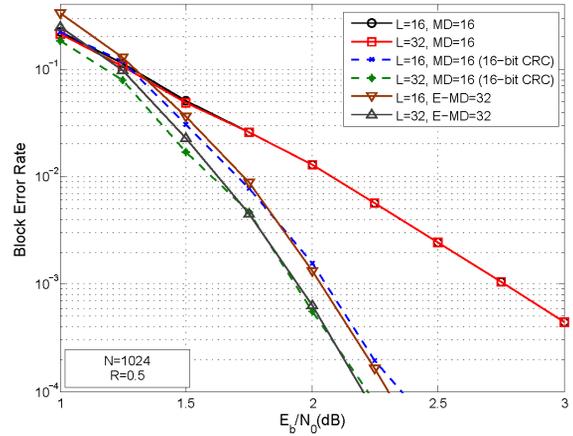


그림 6. 최소거리가 확장된 극 부호의 블록 오율 성능 ( $N=1024$ ,  $E-MD=32$ )  
 Fig. 6. BLER performance of extended-minimum distance polar codes ( $N=1024$ ,  $E-MD=32$ )

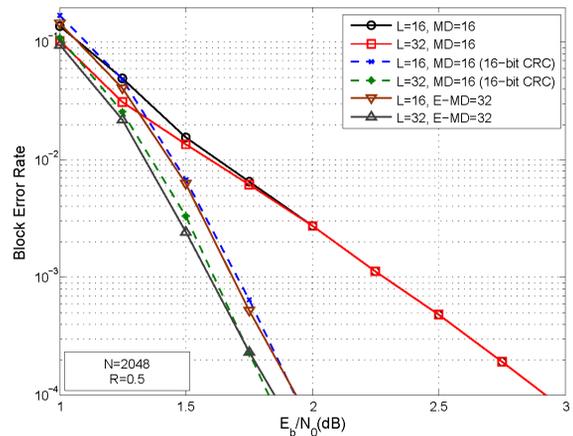


그림 7. 최소거리가 확장된 극 부호의 블록 오율 성능 ( $N=2048$ ,  $E-MD=32$ )  
 Fig. 7. BLER performance of extended-minimum distance polar codes ( $N=2048$ ,  $E-MD=32$ )

를 확장하기 위해 선택한 채널이 기존 극 부호의 채널보다 상대적으로 높은 오율을 갖는 채널로 작용하여  $E_b/N_0 = 1.75$  dB 이후로 기존 극 부호보다 열화된 성능을 보인다.

그림 7의 모의실험 결과는 SCL 복호기가 극 부호의 짧은 최소거리로 인해 잘못된 복호 경로를 전송된 부호어로 선택하여 오류마루가 발생했다는 것을 보여준다. 또한 이 결과를 통해 CRC 부호를 연결한 극 부호의 성능이 좋은 이유를 알 수 있다. 그 이유는 CRC 부호를 통해  $L$ 개의 SCL 복호 경로 중 오류가 있는 경로를 제거함으로써 결과적으로 최소거리가 확장됐기 때문이다. 또한 CRC 부호를 극 부호에 연결하는 것은 최소거리 확장을 위한 채널 교체가 필요하지 않아 채널 교체로 인한 성능 열화를 고려할 필요가 없다. 하지만 CRC 부호를

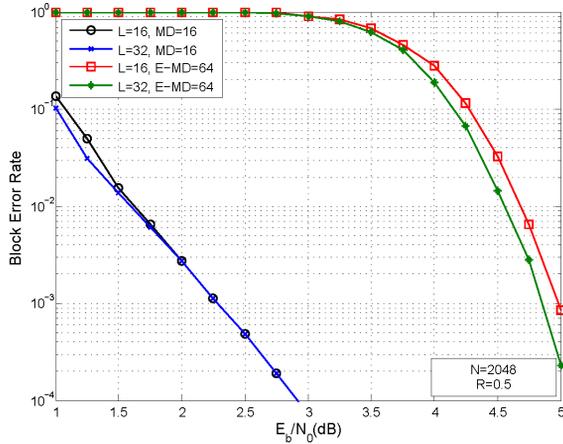


그림 8. 최소거리가 확장된 극 부호의 블록 오류 성능 ( $N=2048$ ,  $E-MD=64$ ), 과도한 최소거리 확장으로 인해 성능이 열화된 경우의 예  
 Fig. 8. BLER performance of extended-minimum distance polar codes ( $N=2048$ ,  $E-MD=64$ ), An example of bad performance case because of excessive extending minimum distance

연접하는 것은 부호율 손실을 야기하여  $N=32$ , 64와 같이 부호 길이가 짧은 영역에서는 CRC 부호를 연접한 극 부호가 제안된 극 부호의 성능보다 열화된 모습을 보인다.

그림 8은 과도한 채널 교체로 인한 성능 열화가 최소거리를 확장하여 얻는 성능 이득보다 큰 경우를 보여주고 있다. 그림 8의 제안된 극 부호의 최소거리는 기존 극 부호의 최소거리인 16보다 네 배 확장되었다. 그림 7의 최소거리를 확장한 극 부호의 성능과는 다르게 그림 8의 제안된 극 부호의 성능은 기존 극 부호의 복호 성능보다 블록 오류  $10^{-4}$  기준으로 약 2 dB 이상 열화된 성능을 보인다. 이와 같은 결과가 나타난 이유는 SCL 복호기의 특성 때문이다. SCL 복호기는 SC 복호기와 기본적으로 같지만  $L$ 개의 복호 경로 중 1개의 부호어를 선택하는 방식으로 복호하며  $L$ 의 크기가 무한대로 커지면 최대우도(Maximum Likelihood) 복호기와 동일하다. 최대우도 복호기는 부호어의 최소거리에 의해 성능이 좌우된다.

본 논문에서 제안된 극 부호는 SC 복호기와 최대우도 복호기의 특성을 함께 갖는 SCL 복호기의 특성에 맞도록 기존 극 부호의 설계 방법을 따르면서 최소거리가 확장된 부호이다. 채널 교체는 기존 극 부호의 최소거리를 확장할 수 있지만, 동시에 오류율이 높은 분리 채널이  $L$ 에 포함되어 SC 복호의 성능 열화를 야기한다. 결국 정해진  $L$ 에 대해서 최소거리 확장과 극 부호화 규칙 사이에 최적의 타협

점이 존재한다. 실제로 그림 8과 같이 과도한 확장으로 성능이 오히려 열화되는 경우에는 SCL 복호기의  $L$ 을 증가시켜 성능을 향상시킬 수 있다.

### V. 결론

본 논문에서는 RM 부호와 극 부호의 생성 행렬 연관성을 이용하여 SC 복호를 가정하여 생성하는 기존 극 부호화 규칙을 수정하여 SCL 복호기에 적합한 최소거리 확장 극 부호화 방법을 제안하였다. 모의실험을 통해 제안한 방법을 사용한 단일 극 부호의 성능을 CRC 부호를 연접한 극 부호의 성능과 비교하였다. 대부분의 부호 길이에서는 제안된 극 부호의 성능이 CRC 부호를 연접한 극 부호의 성능과 근접한 결과를 보였다. 또한, 부호 길이  $N=32$ , 부호율  $R=0.5$ 인 경우 제안된 극 부호의 성능은 CRC 부호 연접 극 부호보다 블록 오류  $10^{-3}$  기준으로 0.8 dB 더 좋은 성능을 보이고 CRC 부호 연접 극 부호는 기존의 극 부호의 성능을 개선하지 못하는 것을 확인하였다. 하지만 최소거리를 확장하기 위해 교체한 채널의 비율이 높아지면 SC 복호기의 규칙에 어긋나는 분리 채널이 부호화에 사용되는 비율이 높아져 동일한 크기의  $L$ 일 때 성능 열화가 발생하는 경우가 생긴다. 이 경우에는  $L$ 의 크기를 고려하여 최소거리를 확장하거나 SCL 복호기의  $L$ 을 증가시켜 성능을 향상시킬 수 있다.

### References

- [1] K. Yang, "Covering radius of Reed-Muller codes," in *Proc. KICS Int. Conf. Commun. 1995 (KICS ICC 1995)*, pp. 215-218, Jeju Island, Korea, Jan. 1995.
- [2] D. Ryu, J. Y. Kim, J. -H. Kim, and S. -H. Kim, "Performance of list decoding of minimum distance-extended polar codes," in *Proc. KICS Int. Conf. Commun. 2012 (KICS ICC 2012)*, pp. 445-446, Jeju Island, Korea, Jun. 2012.
- [3] C. E. Shannon, "A mathematical theory of communication," *Bell System Tech. J.*, vol. 27, no. 1, pp. 379-423, 623-656, Jul./Oct. 1948.
- [4] E. Arkan, "Channel polarization: a method

for constructing capacity- achieving codes for symmetric binary- input memoryless channels,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 55, no. 7, pp. 3051-3073, Jul. 2009.

[5] R. Mori and T. Tanaka, “Performance of polar codes with the construction using density evolution,” *IEEE Commun. Lett.*, vol. 13, no. 7, pp. 519-521, Jul. 2009.

[6] N. Goela, S.B. Korada and M. Gastpar, “On LP decoding of polar codes,” in *Proc. IEEE Inform. Theory Workshop (ITW)*, pp. 1-5, Dublin, Ireland, Aug./Sep. 2010.

[7] E. Arıkan, “A performance comparison of polar codes and Reed-Muller codes,” *IEEE Commun. Lett.*, vol. 12, no. 6, pp. 447-449, Jun. 2008.

[8] N. Hussami, R. Urbanke and S.B. Korada, “Performance of polar codes for channel and source coding,” in *Proc. IEEE Int. Symp. Inform. Theory*, pp. 1488-1492, Seoul, Korea, Jun./Jul. 2009.

[9] I. Tal and A. Vardy, “How to construct polar codes,” 2011, from arXiv:1105.6164v2

[10] E. Sasoglu, E. Telatar and E. Arıkan, “Polarization for arbitrary discrete memoryless channels,” in *Proc. IEEE Inform. Theory Workshop (ITW)*, pp. 144-148, Taormina, Italy, Oct. 2009.

[11] E. Sasoglu, “Polar codes for discrete alphabets,” in *Proc. IEEE Int. Symp. Inform. Theory (ISIT)*, pp. 2137-2141, Cambridge, MA, Jul. 2012.

[12] M. Seidl and J.B. Huber, “Improving successive cancellation decoding of polar codes by usage of inner block codes,” in *Proc. Int. Symp. Turbo Codes and Iterative Inform. (ISTC)*, pp. 103-106, Brest, France, Sep. 2010.

[13] I. Tal and A. Vardy, “List decoding of polar codes,” 2012, from arXiv:1206.0050v1

[14] R. Mori and T. Tanaka, “Performance and construction of polar codes on symmetric binary-input memoryless channels,” in *Proc. IEEE Int. Symp. Inform. Theory*, pp. 1496-1500, Seoul, Korea, Jun./Jul. 2009.

[15] D. E. muller, “Application of boolean algebra to switching circuit design and to error correction,” *IRE Trans. Electronic Computers*, vol. EC-3, no. 3, pp. 6-12, Sep. 1954.

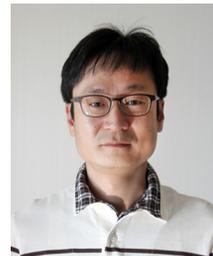
[16] I. Reed, “A class of multiple-error-correcting codes and the decoding scheme,” *IRE Trans, Inform. Theory*, vol. 4, no. 4, pp. 39-44, Sep. 1954.

류 대 현 (Daehyeon Ryu)



2012년 2월 성균관대학교 전자  
전기공학과 학사  
2012년 3월~현재 성균관대학  
교 IT융합학과 석사과정  
<관심분야> 오류정정부호, 정  
보이론, 부호이론

김 재 열 (Jae Yoel Kim)



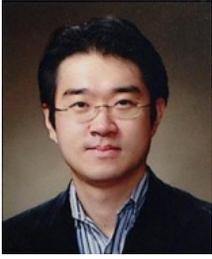
1993년 2월 고려대학교 수학과  
학사  
1996년 2월 고려대학교 수학과  
석사  
1996년 3월~현재 삼성전자  
DMC연구소 수석연구원  
<관심분야> 통신공학, 방송공  
학, 정보이론

김 종 환 (Jong-Hwan Kim)



2010년 2월 성균관대학교 전자  
전기컴퓨터공학과 학사  
2010년 3월~현재 성균관대학  
교 전자전기컴퓨터공학과석  
박사통합과정  
<관심분야> 오류정정부호, 정  
보이론, 부호이론

김 상 호 (Sang-Hyo Kim)



1998년 2월 서울대학교 전기공학부 학사

2000년 2월 서울대학교 전기공학부 석사

2004년 2월 서울대학교 전자컴퓨터공학부 박사

2004년 3월~2006년 7월 삼성

전자 책임연구원

2006년 8월~2007년 8월 박사후 연구원(USC)

2007년 9월~2011년 9월 성균관대학교 정보통신공학부 조교수

2011년 10월~현재 성균관대학교 정보통신공학부 부교수

<관심분야> 오류정정부호, 다중 안테나 시스템, 시퀀스, 협력 통신