

論 文

부분적으로 유전체가 채워진 원형도저관의
수치해석

正會員 尹 東 漢* 正會員 崔 甲 石**

A Numerical Analysis for the Cylindrical Waveguide
Partially Filled with Dielectric Materials

d

Dong Han YOON,* and Kap Seok CHOI ** Regular Members

要 約 부분적으로 유전체가 채워진 원형도저관의 해석은 오래전부터 연구되어왔으나 대부분이 해석적방법에 의한 근사해법이었다. 본 논문에서는 수치해석법에 의해서 원하는 만큼의 정확도를 갖는 Hybrid mode 및 TM과 TE mode의 해를 구할 수 있도록 새로운 프로그램을 개발했다. 이러한 수치해석 결과는 유전체 공진기의 TE 및 TM 공진모드 이외에 Hybrid 공진모드의 공진주파수를 계산하는데 이용된다.

ABSTRACT The analysis of a cylindrical waveguide which is partially filled with dielectric materials has been performed for many years. but most of the analyses were an approximation by the analytic method. In this paper a FORTRAN program for numerical analysis is introduced to calculate the propagation constant for TE, TM and Hybrid modes. The results of the numerical calculation can be used to determine the resonant frequencies for TM, TE and Hybrid modes in the dielectric resonator.

1. 서 론

원형도저관내에 동심축으로 유전체가 부분적으로 채워진 경우에 대한 해석은 오래전부터 시도되었다.

이러한 경우 TM 및 TE mode 이외에 Hybrid mode가 존재한다는 사실은 오래 전부터 잘 알려진 사실이다. 그러나 비로소 1960년대에 와서 Veselov와 Lyubimov는 최초로 Hybrid mode의

nonpropagating 영역에서 소위 Complex wave라고 하는 파의 존재를 발견하게 되었다.

비유전 상수값 ϵr 을 갖는 유전체가 도파관 단면에 대해서 비균일하게 채워졌을 경우 이 ϵr 값이 도파관내의 후진파의 발생을 허용하는 최소값 ϵ_0 보다 크게 되면 한 주파수 영역이 존재하게 되는데 이러한 주파수 영역에서는 순수한 진행파도 또한 순수한 감쇄파도 존재할수 없는 것이다.

이러한 영역에서 eigenvalue equation의 해는 복소수가 된다.

본 논문에서는 지금까지 발표된 논문의 대부분이 이러한 도파관내의 모드해석을 해석적 방법에 근거한 약산식이 대부분 이었는데 반해서

* 金鳥工科大学電子工學科
Dept. of Electronics Eng, Kum OH Institute of Technology

** 明知大學校電子工學科
Dept. of Electronics Eng, Myung Ji Univ.
論文番號 : 85-33 (接受 1985. 9. 27)

수치해석법에 의해서 TM 및 TE mode 이외에 Hybrid mode에 대해서 원하는 만큼의 정확도를 갖는 해를 구하도록 FORTRAN 프로그램을 개발해 냈으며 이러한 결과는 유전체 공진기의 공진주파수를 수치해석적으로 계산하는데 직접 이용될수 있다.

2. Cylindrical wave guide의 구조 및 field 방정식

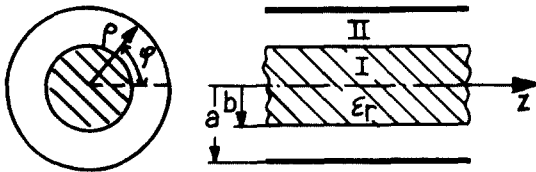


그림 1 부분적으로 유전체가 삽입된 원형도파관.
A cylindrical waveguide partially filled with dielectric materials.

위의 그림 1은 해석하고자 하는 유전체가 채워진 원형도파관의 기하학적 구조이다. 여기서 유전체는 손실이 없고 등방성으로 가정한다.

기하학적 단면의 비균일성 때문에 TM 및 TE mode 이외에 Hybrid mode가 발생한다.

이러한 기하학적 구조에 대한 eigenvalue equation은 최초로 Bucholtz⁽¹⁾가 유도해 냈다.

영역 I 및 II의 Maxwell 방정식을 만족하는 field를 찾아내기 위해서는 먼저 부분 field를 결정해야 한다. 이러한 부분 field들은 magnetic 이나 electric Hertz potential로부터 구할수 있다.

Z의 정방향으로 진행하는 파에 대해서는 각각의 영역 I 및 II에서 아래와 같은 시도해를 취할 수 있다.

영역 I :

$$\Pi_{z, m_1} = A J_n(S_1 \rho) \cos n \varphi e^{-r z} \quad (1)$$

$$\Pi_{z, e_1} = D J_n(S_1 \rho) \sin n \varphi e^{-r z}$$

영역 II :

$$\Pi_{z, m_2} = [B J_n(S_2 \rho) + C N_n(S_2 \rho)] \cos n \varphi e^{-r z}$$

$$\Pi_{z, e_2} = [E J_n(S_2 \rho) + F N_n(S_2 \rho)] \sin n \varphi e^{-r z} \quad (2)$$

여기서 $S_i^2 = k_i^2 + r^2$ ($i=1,2$) 이고 계수 $A \sim F$ 는 후에 결정되어야 할 field coefficient이며 시간에 대한 인수 $e^{j \omega t}$ 는 생략하였다.

또한 $J_n(x)$ 및 $N_n(x)$ 는 n 계의 Bessel 및 Neumann 함수를 나타낸다.

Transverse magnetic 및 electric mode의 중첩에 의해서 각각의 영역에서 field 성분들은 아래의 공식으로부터 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} E_{\rho i} &= E_{\rho, m_i} + E_{\rho, e_i} = \frac{1}{j \omega \epsilon_i} \frac{\partial^2 \Pi_{z, m_i}}{\partial \rho \partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Pi_{z, e_i}}{\partial \varphi} \\ E_{\varphi i} &= E_{\varphi, m_i} + E_{\varphi, e_i} = \frac{1}{j \omega \epsilon_{i \rho}} \frac{\partial^2 \Pi_{z, m_i}}{\partial \varphi \partial z} + \frac{\partial \Pi_{z, e_i}}{\partial \rho} \\ E_{z i} &= E_{z, m_i} = \frac{1}{j \omega \epsilon_i} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_i^2 \right) \Pi_{z, m_i} \\ H_{\rho i} &= H_{\rho, m_i} + H_{\rho, e_i} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Pi_{z, m_i}}{\partial \varphi} + \frac{1}{j \omega \mu_o} \frac{\partial^2 \Pi_{z, e_i}}{\partial \rho \partial z} \\ H_{\varphi i} &= H_{\varphi, m_i} + H_{\varphi, e_i} = - \frac{\partial \Pi_{z, m_i}}{\partial \varphi} \\ &\quad + \frac{1}{j \omega \mu_o \rho} \frac{\partial^2 \Pi_{z, e_i}}{\partial \varphi \partial z} \quad (3) \\ H_{z i} &= H_{z, e_i} = \frac{1}{j \omega \mu_o} \left(- \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_i^2 \right) \Pi_{z, e_i} \end{aligned}$$

3. Eigenvalue equation

$\rho = b$ 에서의 continuity condition 및 $\rho = a$ 에서의 boundary condition에 의해서 하나의 equation system을 유도해 낼 수 있다.

이러한 equation system의 determinant는 nontrivial solution을 갖기 위해서는 0이 되어야 한다. 이와같은 조건에 의해서 아래의 eigenvalue equation을 얻는다.

$$\begin{aligned} &\left(\frac{n r}{j \omega b} \right)^2 \frac{J_n^2(S_1 b)}{\epsilon_r \epsilon_o \mu_o} \{ S_1^2 [J_n(S_2 a) N_n(S_2 b) - \\ &J_n(S_2 b) N_n(S_2 a)] + S_2^2 \cdot [J_n(S_2 b) N_n(S_2 a) - \\ &J_n(S_2 a) N_n(S_2 b)] \} \{ S_1^2 [J_n(S_2 a) N_n(S_2 b) - \\ &N_n(S_2 b) J_n(S_2 b)] + S_2^2 [J_n(S_2 b) N_n(S_2 a) - \\ &J_n(S_2 a) N_n(S_2 b)] \} + (S_1 S_2)^2 \{ S_2 J_n(S_1 b) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\{N_n(S_2 b) J_n'(S_2 a) - J_n(S_2 b) N_n'(S_2 a)\} + S_1 J_n(S_1 b) [J_n'(S_2 b) N_n'(S_2 a) - N_n'(S_2 b) J_n'(S_2 a)] = 0$$

위의 방정식(4)로부터 차단 주파수의 경우를 제외하고는 Hybrid mode HE_{nm} 및 EH_{nm} 을 얻을 수 있다.

HE mode의 차단주파수 근처에서는 소위 후진파(backward traveling wave)라는 것이 발생하며 nonpropagating region에서는 Complex wave가 발생하게 된다. 그림 1과 같은 구조의 도파관에서 후진파의 전파가능성에 대해서 이론적으로 처음 발견한 사람은 Clarricoots와 Waldron⁽²⁾이었다.

여기서 후진파라 함은 phase 및 group velocity의 부호가 반대되는 파를 말하며 이러한 경우 선체 에너지는 파의 phase velocity의 방향과 반대가 되는 방향으로 흐른다. 그림 2(a)는 표준화된 주파수 $\frac{a \cdot \omega}{c}$ 의 함수로서 $\epsilon_r = 15$ 일 때 첫 번째 모드의 표준화된 전파상수 $\alpha \cdot \beta$ 가 반경비 b/a 에 따라서 어떻게 변화하는가를 보여주고 있다.

그림에서 보듯이 유한의 $\alpha \cdot \beta$ 값에서 곡선들은 $\frac{a \cdot \omega}{c}$ 의 최소값을 통과한다.

$dw/d\beta$ 는 이러한 최소값에서 0이 되고 이것은 slow structure를 의미하는 것이며 반면에

$dw/d\beta$ 는 β 의 작은쪽 값에서 (-) 값을 갖고 이것은 후진파를 의미한다.

그림 2(b)에서는 다시 그림 2(a)의 두곡선이 잘 알려진 $b/a = 0$ (공기로 균일하게 채워진 도파관)의 경우 및 $b/a = 1$ (유전체로 완전히 채워진 도파관)의 곡선과 함께 그려져 있다.

만일 $b/a = 0$ 혹은 $b/a = 1$ 이면 이 경우 $dw/d\beta$ 가 (-)의 부호를 갖는 주파수 범위가 가장 크기 위해서는 b/a 의 비가 어떤 적당한 값을 가져야한다. 그림 2(b)는 이러한 값이 0.5보다는 커야함을 보여주고 있다. 그밖에도 이러한 2가 함수의 존재성과 그의 범위를 도식적으로 결정하기 위한 조사가 참고문헌 (3)과 (4)에서 이루어졌다.

만일 비유전상수 $\epsilon_r = \epsilon_p$ 이면 후진파는 가장 넓은 주파수 범위에서 존재할 수 있다. 이러한 비유전 상수값에서 가장 낮은 HE 및 EH mode의 차단 주파수는 같다. 만일 유전체봉의 비유전상수 ϵ_r 이 ϵ_p 보다 작으면 차단 주파수에서 E_z 성분이 없어지는 그러한 모드의 경우 균일한 유전체의 경우에도 $E_z = 0$ 이된다. 이러한 결과는 $H_z = 0$ 인 모드에도 그대로 적용된다.

ϵ_0 를 후진파가 존재할 수 있기 위한 최소의 비유전상수라 할때 $\epsilon_0 < \epsilon_r < \epsilon_p$ 의 조건하에서 후진파는 차단주파수에서 E_z 성분을 갖지 않고 그와 반대로 $\epsilon_0 < \epsilon_r < \infty$ 가 성립하면 차단 주파수에서 H_z 의 성분을 갖지 않는다.

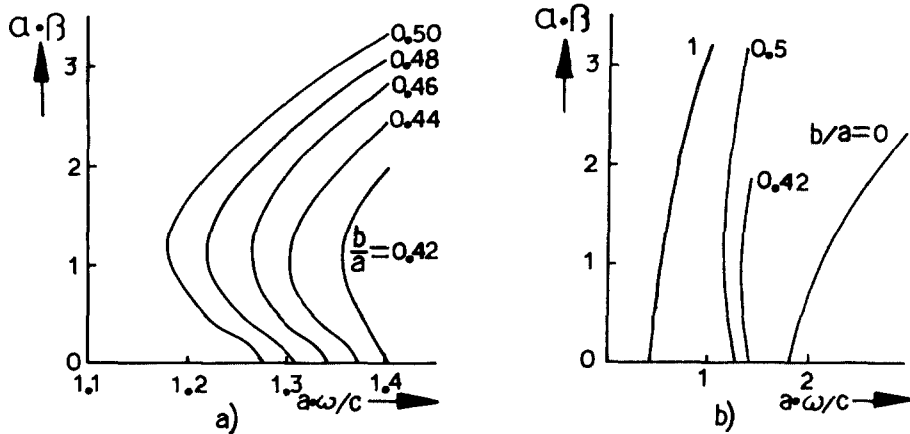


그림 2 $\epsilon_r = 15$ 일때 b/a 에 따른 첫 번째 모드의 표준화된 위상 상수 $\alpha \cdot \beta$ 의 변화.

The variation of normalized phase constant $\alpha \cdot \beta$ with $\epsilon_r = 15$ according to the change b/a .

그림 3에서처럼 차단 주파수에서의 상태에 관계없이 HE_{11} 과 EH_{11} mode의 전파상수 곡선은 $\epsilon_r = \epsilon_p$ 를 통과하면서 연속적으로 변한다. 이것은 균일한 유전체로 채워진 극한의 경우일때 모드의 변화에 따라서 모드가 분류되어야 함을 시사하고 있다. 이러한 분류법에 의하면 후진파는 HE mode가 되고 반면에 충분히 큰 $\epsilon_r = \epsilon_p$ 의 경우 일반적으로 후진파는 HE_{1m} mode의 형태를 갖게되며 반면에 H_{01} 및 EH_{1m} mode에 대해서는 후진파가 존재하지 않는다.

후진파의 존재는 또한 유전체 내부를 흐르는 전력과 밖으로 흐르는 전력비 P_i/P_o 에 의해서도 결정할 수 있다. 더우기 임의의 φ - 종속에 대한 후진파가 존재하기 위한 충분조건이 Krohn에 의해서 밝혀졌다. 또한 이러한 후진파의 존재를 입증하기 위한 여러가지 실험이 이루어졌다. 예로서 Lavik과 Unger는 HE_{11} 과 EH_{11} mode의 파고율 중첩에 의해서 각각의 파장을 결정하므로서 적당히 유전체가 삽입된 구형 및 원형도파관 내의 후진파에 대한 존재를 실험을 통해서 입증했다⁽⁶⁾.

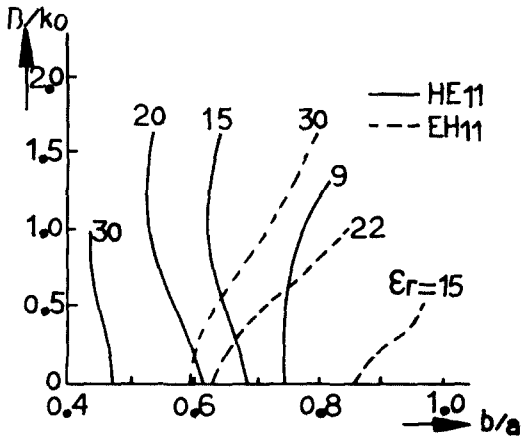


그림 3 여러가지 비유전상수에 따른 b/a 의 변화에 대한 HE_{11} 및 EH_{11} mode의 기준화된 위상상수 β/k_0 의 변화.

The normalized phase constant β/k_0 for HE_{11} and EH_{11} mode with variable dielectric constants according to the change of b/a .

Clarricoats와 Taylor는 이러한 주파수 영역에서 field의 Z방향 변화는 $e^{\pm(\alpha \pm j\beta)z}$ 이어야 함을 특수한 몇개의 주파수 근처에서 전파상수의 변화를 조사하므로서 해석적으로 밝혀냈다⁽⁷⁾.

4. 수치해석의 결과 및 비교

본 논문에서는 ligenvalue equation(4)를 수치해석적으로 그의 해를 구할 수 있도록 FORTRA 프로그램을 개발해 냈다.

Bessel 및 Neumann function의 고계 모드에 대한 수치값을 얻기위한 Computer연산 시간의 단축을 위해서 여기서는 $n=1$ 일때의 Hybrid mode HE_{1m} 와 EH_{1m} 및 $n=0$ 일때의 TM_{0m} 및 TE_{0m} mode에 대해서 주로 다루었다.

본 논문에서 소개한 수치해석법은 보다고계의 모드에 적용시킬 수 있는 프로그램의 개발은 단지 이러한 고계모드의 전파상수를 계산하는데 필요한 Bessel 및 Neumann function의 recurrence formular를 이용하기만 하면 임의의 n 계 함수에 대한 표현식은 1계 및 2계의 Bessel 및 Neumann function으로 표시할 수 있다. 또한 연산과정에서 이러한 Bessel 및 Neumann function의 argument가 허수가 될때 즉 $\omega^2 \epsilon_o \mu_o < \beta^2$ 의 경우는 modified Bessel function $I(x)$ 및 Neumann function $K(x)$ 를 이용하였다.

본 논문의 결과를 검토하기위한 비교치로서 참고문헌(7)의 그림 5-11을 이용하였다. 여기서 원형도파관의 반경은 $b=0.4 \lambda_0$ 를 취했으며 사용 주파수 $f=10GHz$ 이고 유전체의 비유전상수는 $\epsilon_r = 10$ 일때 도파관의 반경 b 와 유전체봉의 반경 a 의 비 a/b 에 따른 HE_{11} mode의 k_0 로 기준화된 전파상수 β/k_0 의 변화를 고찰하였다. 그결과는 그림 4에서 보는것처럼 완전 일치하는데 이것은 위상상수 β 를 계산할때 오차한계를 10^{-4} 이하로 계산토록한 결과이다.

이와같은 방법으로 구하고자하는 해가 어느 정도의 정확성을 요하느냐에 따라서 임의로 오차한계를 외부에서 설정해 주므로서 만족할만한 수치해석 결과를 얻을 수 있다. 단 이때 오차한계를 좁히므로서 계산기의 연산시간 지연은 감수하여야 한다. 이와같이 해의 정확도와 연산시간과의 절충이 필요하다.

또 $n=0$ 일때의 TM_{0m} 및 TE_{0m} mode에 대한 수치해석 결과의 검토로서는 유전체의 반경을 도파관의 반경과 같게 취했을 경우 즉 $b=a$ 일

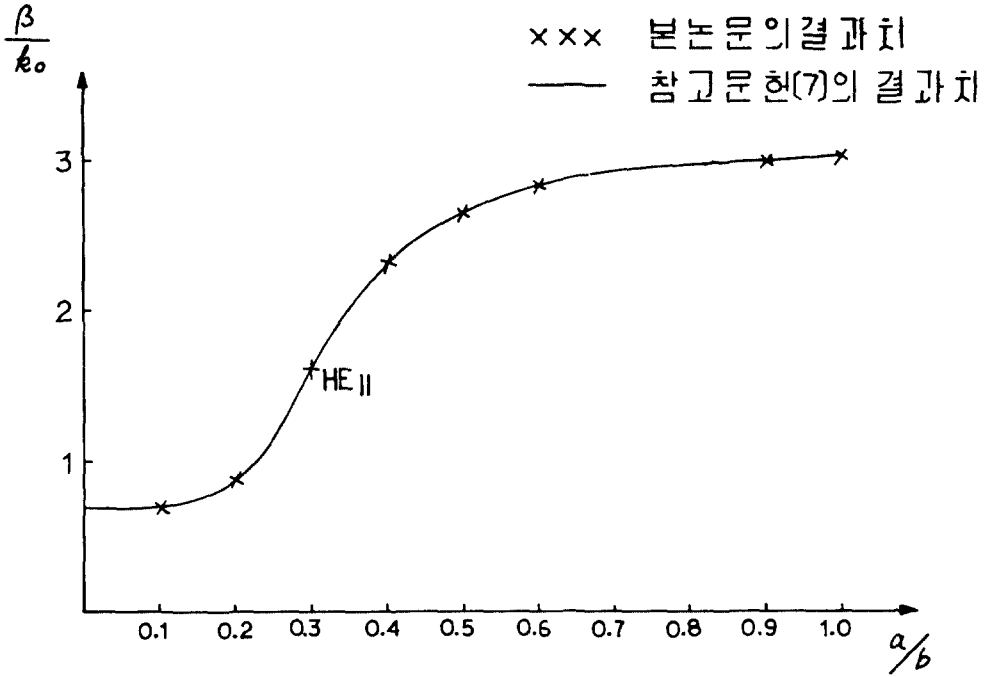


그림 4 참고문헌(7)의 결과치와 비교.
 A comparison with the results in Ref. 7.

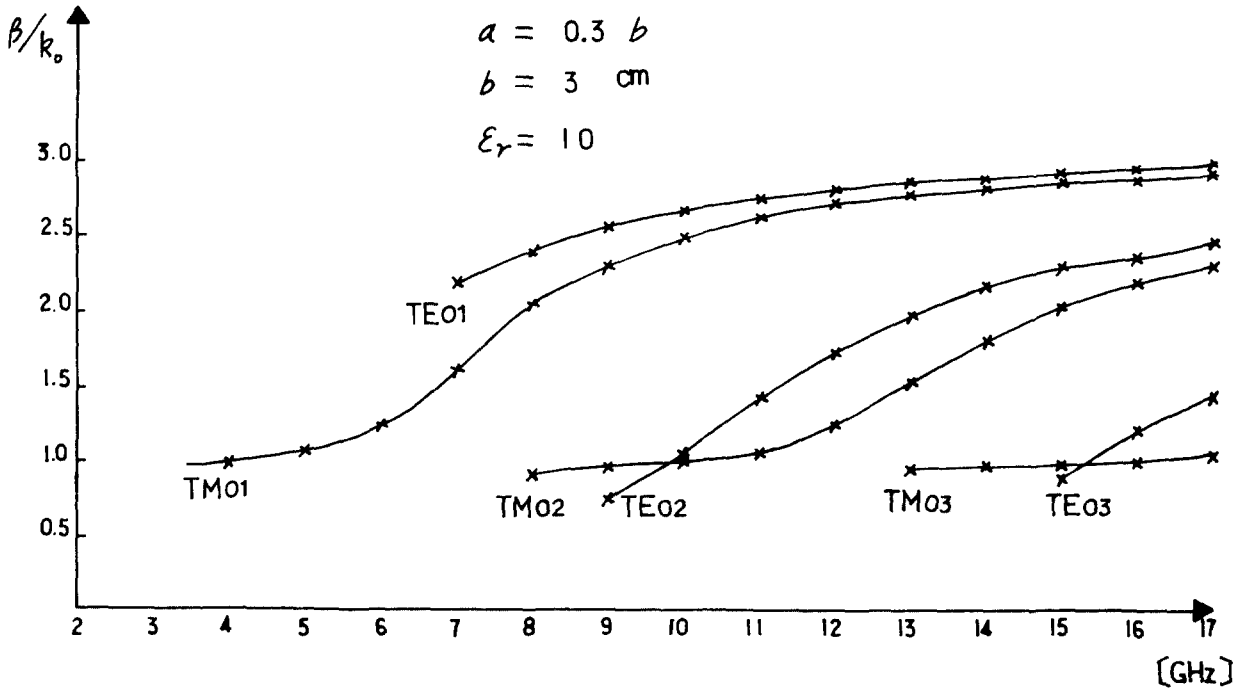


그림 5 TM_{0m} 및 TE_{0m} 모드들의 주파수에 따른 β/k_0 의 변화.
 The normalized phase constant β/k_0 for TM_{0m} and TE_{0m} mode with variable frequency.

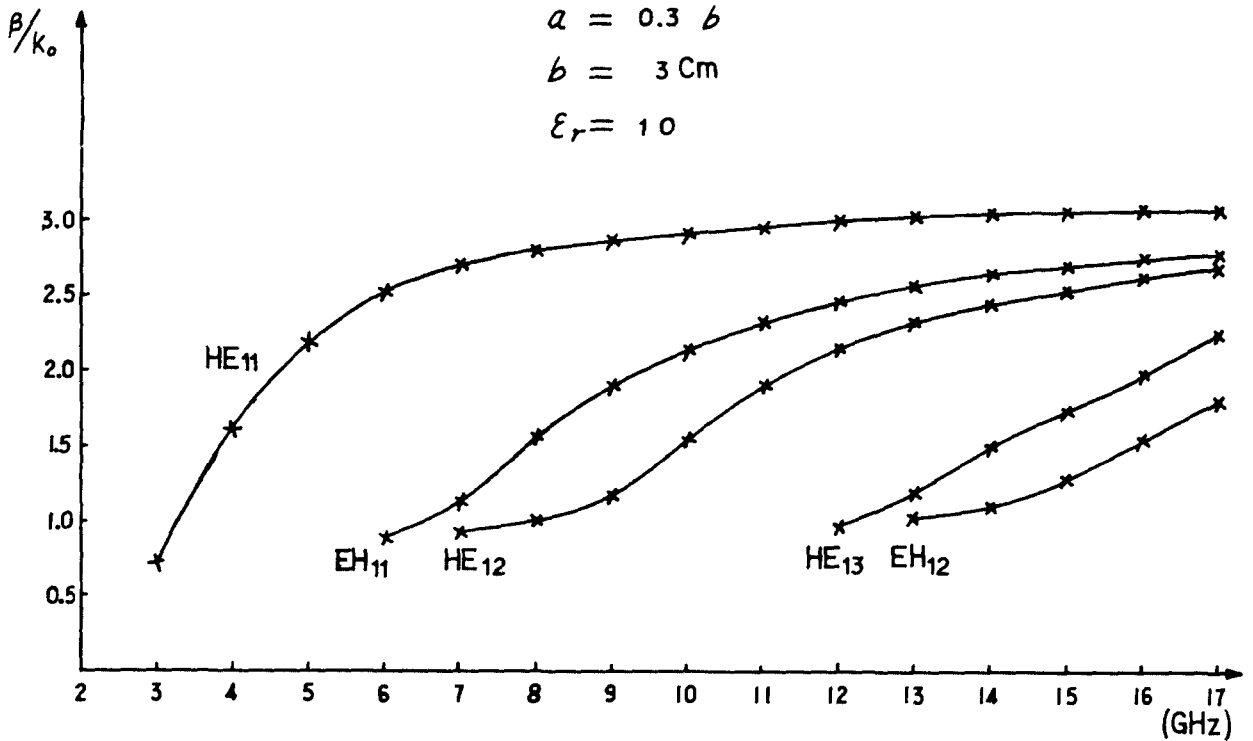


그림 6 HE_{1m} 및 EH_{1m} mode들의 주파수에 따른 β/k₀의 변화.

때 그의 위상상수값이 균일 유전체로 채워진 도파관의 위상상수와 같아야하며 이러한 일치가 확인된다.

그림 5는 $b = 3 \text{ cm}$, $a = 0.3b$ 및 $\epsilon_r = 10$ 일때의 TM 및 TE mode의 각각 첫번째 세 모드에 대한 주파수 변화에 따른 각각의 위상상수에 대한 그래프이다.

$n = 1$ 일때의 Hybrid mode HE_{1m} 및 EH_{1m}의 규준화된 위상상수 β/k_0 에 대한 것이 $n = 0$ 일때와 동일한 parameter 값에서 그림 6과 같이 변한다.

5. 결 론

부분적으로 유전체가 삽입된 도파관의 해석은 대부분 지금까지의 논문에서는 근사해를 얻는데 만족했으나 본 논문에서는 Computer를 이용한 수치해석적으로 원하는 만큼의 정확도를 갖게 해를 구할수가 있었다.

또한 여기서는 $n = 0$ 인 경우의 TM_{0m}와 TE_{0m} mode 및 $n = 1$ 인 경우의 HE_{1m} 및 EH_{1m} mode에 대한 것만 취급했으나 n 의 값을 얼마든지 확장하므로써 고계의 Hybrid mode HE_{nm} 및 EH_{nm}에 대한 해도 쉽게 구할 수 있다.

이러한 수치해석 결과는 여러가지 면에 이용될 수 있으며 그한 예로서는 차폐된 유전체 공간의 Higher order resonant frequency를 수치해석적으로 계산하는데 이용될 수 있다.

参 考 文 献

- (1) H. Buchholz, "Waveguide of circular cross section with a fitted dielectric insert." Ann. Physik 5F 43, H5, pp. 313-368, 1943.
- (2) P. J. B., Clarricoats, R. A. Waldron, "Non-periodic slow-wave and backward-wave structures," J. Elec. Contr. 8, pp. 455-458, 1960.
- (3) V. Ya. Smorogonskiv, "Graphical-analytical analysis of the dispersion characteristic of a partially filled circular

- waveguide," Radiotekhnika Elektronika 12, pp.727-730, 1968.
- (4) V. Ya. Smorogonkiy, "Calculation of the double-valued part of the dispersion curve," Radio Eng. Electr. Phys. 13, pp.1809-1810, 1968.
- (5) P. Affolter, B. Eliasson, "Electromagnetic resonances and Q-factors of lossy dielectric spheres. IEEE Trans. MTT 23, pp.199-208, 1973.
- (6) J. Van Bladel, "On the resonances of a dielectric resonator of very high permittivity," IEEE Trans. MTT 23, pp.208-217, 1975.
- (7) R. F. Harrington, "Time-harmonic electromagnetic fields," New York: Mc Graw-Hill, 1961.



尹東漢(Dong Han YOON) 성희원
1945년 1월 6일생
1968년 2월 : 광주대학 전자공학과 졸업
1980년 2월 : 명지대학원 전자공학과 수료
(공학석사)
1983년 2월 : 명지대학원 전자공학과 박사
과장 수료
1979년 3월 ~ 1984년 8월 : 금오공과대학
전자공학과장

1984년 9월 ~ 현재 : 금오공과대학 학생처장



崔甲石(Kap Seok CHOI) 성희원
1930년 9월 30일생
1955년 3월 : 서울대학교 공과대학 통신
공학과 졸업
1963년 : 수도공과대학 교수
1972년 ~ 현재 : 명지대학교 교수(공학박
사)