

論 文

곡선형 사각요소에 의한 유한요소 해석

正會員 李 直 烈* 正會員 金 正 祺**

Finite Element Analysis using Curvilinear Square Elements

Chick Youl LEE *and Jung Ki KIM ** ,Regular Members

要 約 본 논문은 곡선형 사각요소에 대한 기저함수를 제시한 후 이를 이용하여 동축 케이블 및 동축 횡단면 도파관에 대해 유한 요소법을 적용하였다. 동축 케이블의 경우 동일한 수의 요소에 대해 같은 크기보다는 비례의 크기를 갖는 요소에서 더욱 정확한 결과를 얻을 수 있었다. 또한 동축 횡단면 도파관의 경우 차단 수파수는 횡단면의 각도보다는 내, 외경의 변화에 더 큰 영향을 가짐을 확인하였다.

ABSTRACT This paper presents basis functions for curvilinear square elements and describes finite element analysis for coaxial cable and coaxial cross-section waveguide. On the case of coaxial cable, the more exact results is obtained by the propotional elements than by the equal elements with the same number of elements. It is found that the cutoff frequency of coaxial cross-sectional waveguide is more dependent on the inner and outer radius than the cross-sectional angle.

1. 序 論

전자장 문제는 미분 방정식, 적분 방정식, 미적분 방정식으로 쉽게 표현이 가능하나 실제 이 문제들의 해는 특정한 경우를 제외하고는 대부분 수치적 방법에 의하여 근사적으로 구하게 된다.

수치적 해석방법에는 여러 가지가 있겠으나 다음과 같이 크게 두 부분으로 나뉘어질 수 있다.

- (1) 에너지 관점에서 범함수(functional)에 의한 매트릭스식으로의 변환^{(1),(2)}
- (2) 내적(inner product)에 의한 매트릭스식으로서의 직접적인 변환⁽³⁾

위 두 방법은 공동적으로 Hilbert공간에서 해를 구한다.

방법(1)은 주로 정의구간이 유한하며 경계조건

이 주어진 경우에 대한 미분 방정식의 해석에 이용되고 있다.

방법(2)는 방법(1)에 비해 프로그램의 단순, 처리시간의 단축, 적은 기억용량 등의 장점을 갖게 되나 weight함수를 delta함수로 취하는 경우 유한개의 구간으로 나눈 임의의 구간 내의 특성을 그 구간의 전체값으로 대신하게 되어 비교적 큰 오차를 갖게 된다.

그러나 방법(1)은 전체의 특성을 포함하는 내적을 취하므로 오차를 줄일 수 있다. 방법(1)에 속하는 유한 요소법은 불규칙한 문제의 정의구간을 유한개의 요소로 나눈 후 개개의 요소에 대한 매트릭스식을 구한 후 경계조건에 의해 전 요소에 대해 종합하여 전체적인 해를 구하게 된다.

이 때 경계점에서의 오차를 줄이기 위하여 요소의 수를 증가시킬 수 있겠으나 이는 컴퓨터 기억용량의 증가, 처리시간의 지수적인 증가 등의 문제점을 갖는다. 적은 요소로서 경계점에서의 오차를 줄이기 위한 방법에는 다음을 들 수 있다.

** * 中央大學校工科大學電子工學科
Dept. of Electronic Engineering, Chungang University,
Seoul, 151 Korea
論文番號 : 85- 10 (接受. 1984. 12. 12)

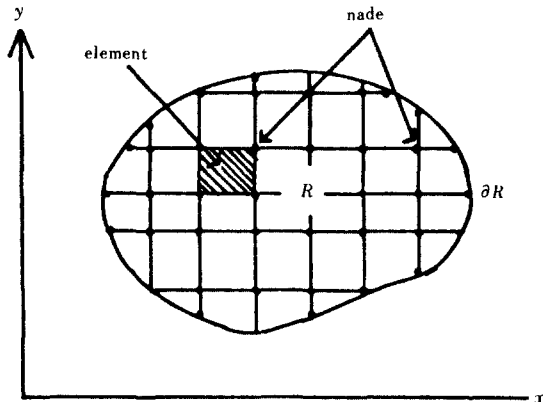


그림 1 유한개의 요소에 의한 구간 R의 분할
Finite element idealization of region R.

- (1) isoparametric mapping에 의한 방법⁽⁴⁾
- (2) 원통 좌표계에 의한 해석⁽⁵⁾
- (3) 경계가 다항식으로 표현 가능한 경우의 해석⁽⁶⁾
- (4) 극 좌표계에 의한 해석⁽⁷⁾

본 논문은 원점에 대해 원형의 영역을 갖는 문제를 적은 요소로서 해석할 수 있는 기저함수(basis function)를 제시한 후 이에 대한 타당성을 이미 알고 있는 동축 케이블의 고유값과의 비교를 확인하였으며 제시된 기저함수를 이용하여 동축 횡단면 도파관(coaxial cross-sectional waveguide)의 고유값을 외경 및 횡단면 각도의 함수로 나타냈다.

2. 有限要素法

다음의 2차 편미분 방정식을 생각하자.

$$L\phi = f \quad \text{in } R \quad (1)$$

$$B\phi = 0 \quad \text{on } \partial R \quad (2)$$

위의 식에서 L, B 는 구간 R 및 경계구간 ∂R 에 대한 연산자이며 식(2)는 homogeneous neumann 및 Dirichlet 경계조건을 나타낸다.

식(1)에서 $L = -\nabla^2$ 인 경우 연산자 L 은 self-adjoint 및 positive-definite가 되어 유일한 해가 존재하게 되며 식(1), (2)에 대한 범함수는 다음과 같이 나타내어진다.

$$F(\phi) = \langle \phi, L\phi \rangle - 2\langle \phi, f \rangle \quad (3)$$

식(1)의 근사해를 $\phi(R)$ 라 하면 $\phi(R)$ 은 다음과 같이 선형조합으로 표현될 수 있다.

$$\phi(R) = \sum_{i=1}^n a_i \Psi_i(R) \quad (4)$$

여기서

a_i : i 번째 계수

Ψ_i : i 번째 기저함수

근사해 식(4)의 계수 a_i 는 Rayleigh-Ritz 방법에 의하여 다음의 범함수 안정화 조건에 의하여 얻어진다.

$$\frac{\partial F(\phi)}{\partial a_i} = 0 \quad (5)$$

전자장의 경우 구간 R 의 에너지를 최소로 하는 전개분포를 갖는 유일해가 존재하게 된다.

그림 1과 같이 구간 R 을 유한개의 요소로 나누어 위의 앨거리덤에 의해 각 요소에 대한 매트릭스식을 구하면 아래와 같다.

$$k^e \phi^e = \lambda m^e \phi^e \quad (6)$$

여기서

$$k_{ii}^e = \iint_{R^e} r \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \frac{\partial \phi_i}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_i}{\partial \varphi} \frac{\partial \phi_i}{\partial \varphi} dr d\varphi \quad (7)$$

$$m_{ii}^e = \iint_{R^e} r \phi_i \phi_i dr d\varphi \quad (8)$$

$$\phi^e = [\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3 \ \dots \ \phi_n]^T \quad (9)$$

식 (7), (8)은 극좌표계로 나타내었으며 각 요소는 n 개의 절점을 갖는다고 가정하였다.

각각의 요소에 대한 매트릭스식(6)을 전구간 R 에 대하여 종합하면 다음 식이 얻어진다.

$$K\Phi = \lambda M\Phi \quad (10)$$

식(10)에 의하여 각각의 고유값에 대한 고유함수들을 구할 수 있다.

여기서 구한 고유함수를 식(4)에 대입하면 장의 분포를 구할 수 있다.

3. 基底函數

구간 R 을 N 개의 요소로 나누면 전구간의 근사값은 다음과 같이 된다.

$$\phi(R) = \sum_{e=1}^N \sum_{i=1}^n a_{ei} \Psi_{ei}(R^e) \quad (11)$$

여기서 $\Psi_{ei}(R^e)$ 는 e 번째 요소의 구간 R^e 에서 정의된 i 번째 기저함수, a_{ei} 는 그에 대한 계수이다.

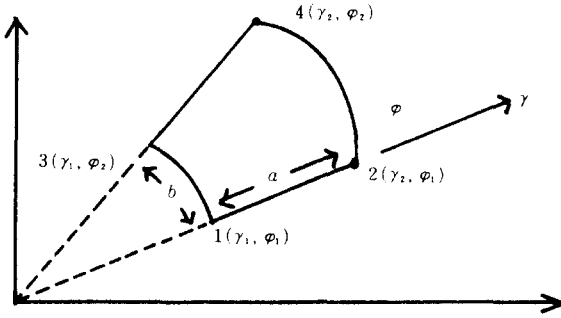


그림 2 곡선형 사각요소
Curved rectangular element.

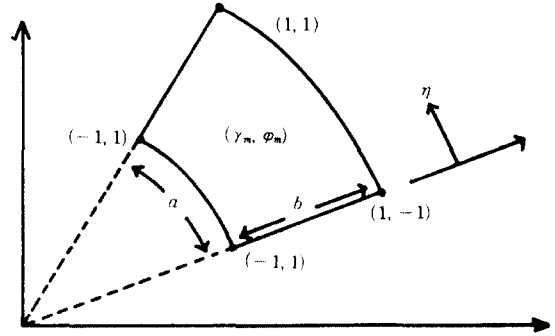


그림 3 부분 좌표계
Local coordinate system.

그림 2와 같이 곡선형의 요소가 4개의 절점으로 이루어져 있는 경우 기저함수를 1차 Lagrange 다항식을 이용하여 극좌표계로써 다음과 같이 정의한다.

$$\Psi_1(r, \varphi) = \frac{1}{ab} (r - r_2) (\varphi - \varphi_2) \quad (12-a)$$

$$\Psi_2(r, \varphi) = -\frac{1}{ab} (r - r_1) (\varphi - \varphi_2) \quad (12-b)$$

$$\Psi_3(r, \varphi) = -\frac{1}{ab} (r - r_2) (\varphi - \varphi_1) \quad (12-c)$$

$$\Psi_4(r, \varphi) = \frac{1}{ab} (r - r_1) (\varphi - \varphi_1) \quad (12-d)$$

여기서

$$\begin{aligned} a &= r_2 - r_1 \\ b &= \varphi_2 - \varphi_1 \\ r_1 &\leq r \leq r_2 \\ \varphi_1 &\leq \varphi \leq \varphi_2 \end{aligned}$$

식(12)의 $r_1, r_2, \varphi_1, \varphi_2$ 는 임의로 취할 수 있다. 위의 기저함수를 유한 요소법의 계산처리시 직접 이용하면 많은 기억용량을 필요로 하며 처리 시간이 크게 길어지게 되므로 그림 3의 부분좌표계 ξ, η 를 이용하여 이들의 좌표를 변환한다.

$$\xi = \frac{2}{a} (r - r_m) \quad (13-a)$$

$$\eta = \frac{2}{b} (\varphi - \varphi_m) \quad (13-b)$$

여기서

$$\begin{aligned} -1 &\leq \xi \leq 1 \\ -1 &\leq \eta \leq 1 \end{aligned}$$

$$r_m = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

$$\varphi_m = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$$

따라서 요소 e 의 기저함수 매트릭스는

$$N^e = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1-\xi)(1-\eta) & (1+\xi)(1-\eta) \\ (1-\xi)(1+\eta) & (1+\xi)(1+\eta) \end{bmatrix} \quad (14)$$

식(6)의 k^e 는

$$\begin{aligned} k^e &= \iint_{K^e} a^T \alpha r dr d\varphi \\ &= \iint_{-1}^1 a^T \alpha r \frac{a}{2} d\xi \frac{b}{2} d\eta \end{aligned} \quad (15)$$

여기서

$$\alpha = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a}(1-\eta) - \frac{1}{a}(1-\eta) - \frac{1}{a}(1+\eta) \\ \cdot \frac{1}{a}(1+\eta) \\ -\frac{1}{b}(1-\xi) - \frac{1}{b}(1+\xi) - \frac{1}{b}(1-\xi) \\ \cdot \frac{1}{b}(1+\xi) \end{bmatrix}$$

m 값은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} m^e &= \iint_{K^e} N^{eT} N^e r dr d\varphi \\ &= \iint_{-1}^1 N^{eT} N^e r \frac{a}{2} d\xi \frac{b}{2} d\eta \end{aligned} \quad (16)$$

그러므로 구하려는 식(6)의 매트릭스식은

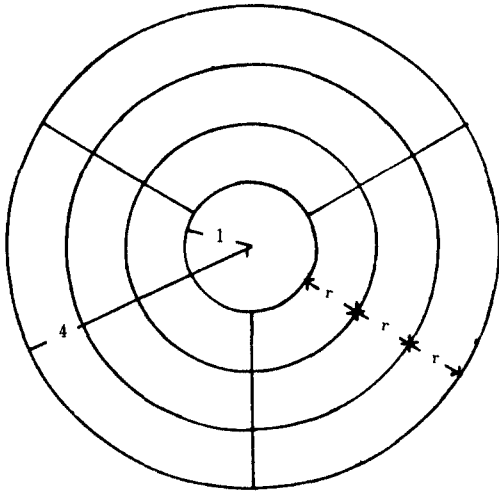


그림4-(a) 등간격의 요소에 의한 동축케이블
Finite element for coaxial cable
(equidistance on r direction).

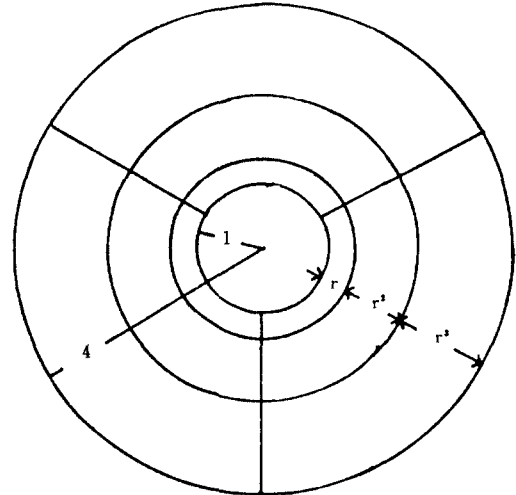


그림4-(b) 비례간격의 요소에 의한 동축케이블
Finite element for coaxial cable
(proportional distance on r direction).

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{22} & k_{23} & k_{24} & \\ k_{33} & k_{34} & & \\ k_{44} & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{22} & m_{23} & m_{24} & \\ m_{33} & m_{34} & & \\ m_{44} & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} \quad (17)$$

위 식의 매트릭스는 대칭이다.

이제까지 기술한 바와 같이 부분 좌표계를 이용하면 식(6)의 요소값인 식(7), (8)은 식(4), (16)와 같이 변형되며 이들 요소값은 ϕ 방향에 대해서는 b 의 값에만 관계하며 r 방향의 위치에 따라 구해진다. 따라서 원점에 대하여 규칙적인 모양을 갖는 구간 R 을 부분 좌표계를 이용하여 b 를 일정하게 취한 후 r 방향의 요소수와 같은 수의 부분행렬을 구하여 경계조건을 고려하여 이들의 조합으로 전구간의 전체 매트릭스식을 구할 수 있다.

4. 計算處理 및 結果考察

전 절의 이론을 확인하기 위하여 동축 케이블

표 1 동축 케이블의 TM모우드에 대한 주고유값
Computed dominant eigenvalue on TM mode for coaxial cable.

element case	6	8	10	12	15	Exact value
4-a	1.358	1.314	1.220	1.025	1.003	0.985
4-b	1.327	1.313	1.212	1.089	0.987	

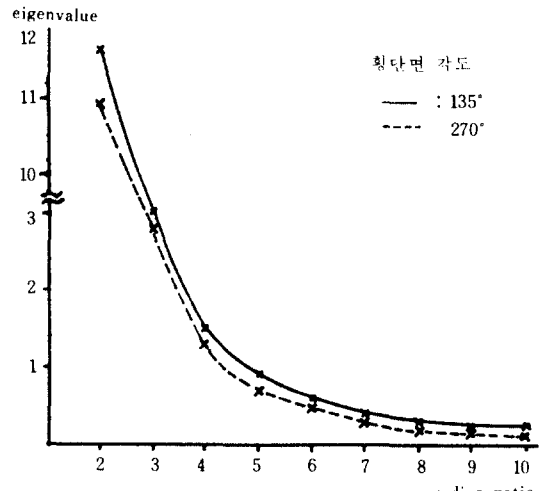


그림5-(a) 외경의 변화에 따른 고유값
Eigenvalue vs radius ratio.

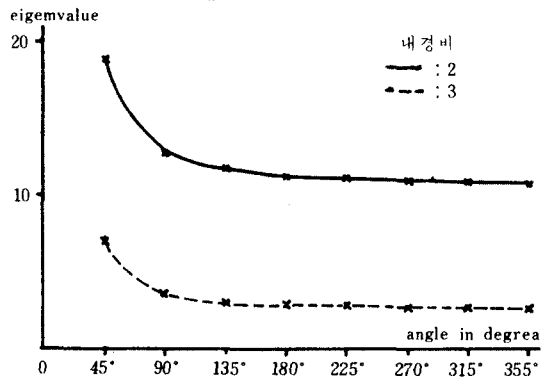


그림5-(b) 각도의 변화에 따른 고유값
Eigenvalue vs angle.

표 2 그림5-a, 5-b에 대한 데이터
Data for fig5-a and 5-b.

외경 내경 각도	2	3	4	5	6	7	8	9	10
135°	11.5639	3.0444	1.4489	0.8475	0.5658	0.4055	0.3093	0.2566	0.2211
270°	10.9264	2.7759	1.2512	0.7120	0.4601	0.3220	0.2382	0.1834	0.1456

외경 내경 각도	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	355°
2	18.6967	12.6516	11.5639	11.1899	11.0784	10.9264	10.8711	10.8388
3	7.0372	3.6756	3.0444	2.9303	2.8302	2.7759	2.7434	2.7276

의 TM모우드에 대한 해석을 하였다. 먼저 그림 4와 같이 ϕ 방향에 대하여 균등 간격 및 비례간격으로 절점을 취하여 이에 대한 기저함수를 이용하여 계산처리하였다.

여기서 내부는 진공으로 가정하였다. 각각의 요소에 대한 매트릭스식(6)은 동일한 R좌표에 대해 같으므로 계산기의 처리시간을 단축할 수 있었다.

전 요소에 대한 식(10)에서 매트릭스 K, M은 대칭행렬이 되며 M은 positive definite이므로 Cholesky방법에 의하여 M을 분해한 후 위 삼각요소만에 의하여 좌표 변환법으로 그의 고유값과 고유함수를 구하였다.

표 1에서 보인 바와 같이 정확한 값 0.985에 요소수 15개에서 그림4-a에서는 1.003, 그림4-b에서는 0.987까지 수렴함을 알 수 있다.

위의 타당성에 근거하여 동축 횡단면 도파관에 대한 TM모우드를 해석하였다. 그림5-a는 내경의 크기를 1로 취한 후 외경의 변화에 따른 고유값의 영향을 나타냈다. 여기서 횡단면 각도는 135°, 270°로 취하였다.

그림5-b는 내, 외경의 비가 2, 3인 경우에 대해 횡단면 각도의 함수로써 고유값의 변화를 나타냈다. 위의 그림5-a, 5-b는 모두 TM모우드의 주 고유값이다. 또한 내부는 진공으로 가정하였다.

그림 5 (a, b)에 대한 데이터는 표 2와 같으며 이 결과에 의하면 동축 횡단면 도파관의 고유값은 내, 외경의 비가 증가함에 따라 급격히 임의의 값으로 수렴함을 알 수 있다. 또한 내, 외경

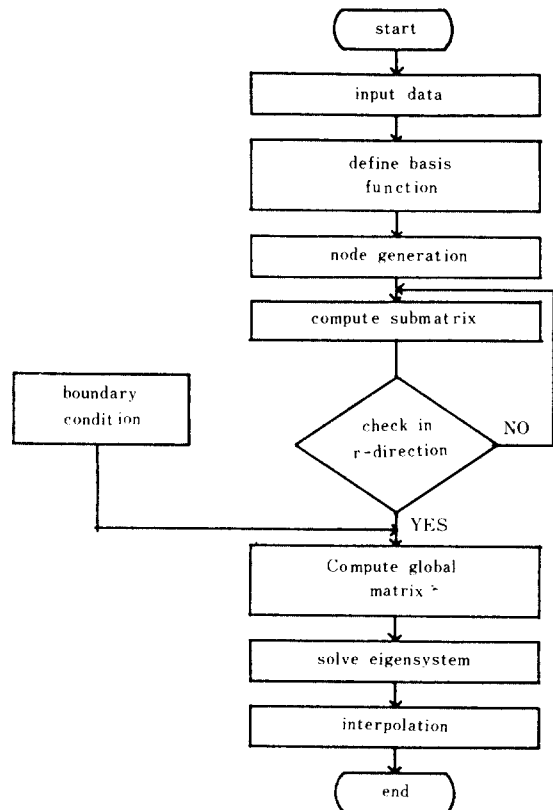


그림 6 계산기 처리 흐름도
Flow chart.

이 일정한 경우 횡단면 각도의 변화에 따라서는 크게 변하지 않음을 알 수 있다. 위의 모든 계산처리에 대한 순서는 그림 6과 같다.

5. 結 論

폭선행 사각요소에 의한 유한 요소법의 가능성을 확인하였다.

동축 케이블의 TM모우드에 대한 주 고유값 계산에서 정확한 해 0.985에 요소수 15개의 적은 요소로써 오차를 0.002까지 줄일 수 있었다.

특히 원거리장같이 문제의 구간이 매우 큰 경우 전체분포는 근거리에 비해 원거리에서 변화가 적으므로 r 방향에 대해 요소의 길이를 거리에 비례하도록 취하면 적은 요소로써 더욱 정확한 해를 구할 수 있다.

또한 동축 횡단면 도파관에 대해 해석하였다. 그의 결과에 의하면 횡단면의 각도 변화보다는 내, 외경의 비에 따라 차단 주파수가 크게 변함을 알 수 있었다.

參 考 文 獻

(1) A. R. Mitchell and R. Wait, "The finite element method in

partial differential equations," John Wiley & Sons, New York, pp. 7-38, 1977.

(2) A. J. Davies, "The finite element method: A first approach," Clarendon Press, Oxford, 1980.
 (3) R. F. Harrington, "Matrix method for field problems," IE EE Trans. AP, vol. 55, no. 2, Feb. 1967.
 (4) O. C. Zienkiewicz and D. V. Phillips, "An automatic mesh generation scheme for plane and curved element domains," Int. J. Num. Meth. Eng. 3, pp. 518-528, 1971.
 (5) P. Daly, "Finite elements for field problems in cylindrical coordinates," Int. J. Num. Meth. Eng. 6, pp. 169-178, 1973.
 (6) D. J. Richards and A. Wexler, "Finite element solutions with curved boundaries," IEEE Trans. M/W Theory Tech., MTT-20, no. 10, pp. 650-657, Oct. 1972.
 (7) P. Daly, "Polar geometry waveguides by finite element methods," IEEE Trans. M/W Theory Tech., MTT-22, no. 3, pp. 202-209, Mar. 1974.



李直烈(Chik Youl LEE) 正會員
 1953年12月22日生
 1980年: 中央大學校電子工學科 卒業
 1982年: 中央大學校大學院電子工學科 (工學碩士)
 1982年~現在: 中央大學校大學院博士課程 在學中
 1984年~現在: 韓國電子技術研究所 (研究員)



金正祺(Jung Ki KIM) 正會員
 1942年 5月 5日生
 1965年 2月: 延世大學校電氣工學科卒業
 1969年 2月: 延世大學校大學院電氣工學科 (工學碩士)
 1975年 2月: 延世大學校大學院電氣工學科 (工學博士)
 1970年 3月~1977年 2月: 光云工科大学 副教授

1977年 3月~現在: 中央大學校電子工學科教授
 1982年12月~1983年12月: 美코넬大學校客員教授