論　文

極點再配置에 따른 狀態推定器의 칼만利得設計

正會員　張　世　勳*　　正會員　李　陽　範**

A Design of Kalman Gain for the State Estimator with Pre-specified Eigenvalues

Se Hoon CHANG* *and* Yang Bum LEE**, *Regular Members*

要　約　本論文에서는 時不變線型多變數系를 모델로 택하여 狀態推定이 最適이 되기 위한 必要充分條件을 다루어 보았으며 또한 프로세스 및 測定雜音의 確率分布가 定常確率이라는 가정하에서 系의 極點再配置에 따른 狀態推定器의 칼만利得을 算定하는 방법을 제시하였다. 제안한 設計方法은 線型變換에 의한 對角化技法을 도입하였으며 이 때 推定器의 極點과 系의 應答特性간의 상관성을 알아낼 수만 있다면 쉽게 계산적으로 수행될 수 있다. 마지막으로 適用例를 통해 제안한 設計方法의 효용성을 입증하였다.

ABSTRACT　This paper, with the linear multivariable systems as a model, proposes a method of evaluating the Kalman gain of the state estimator according to the shifting of poles in the system. The stochastic probability of the process and measurement noise is assumed to be identical to the stationary process. The proposed method, based on the diagonalized system, is easy to implement computationally if the correspondence between the poles of the estimator and the response of the system can be determined. Finally several examples are given to confirm and illustrate proposed method derived here.

1. 序　論

雜音이 섞인 여러 測定値들로부터 狀態變數값들을 推定해낼 수 있는 線型필터의 사용은 計測制御분야에서 근간 폭넓게 이용되고 있을 뿐만 아니라 數年동안 괄목할 만한 발전을 거듭해 왔다[1~4].

線型필터의 표본이라 할 수 있는 칼만필터는 R. E. Kalman에 의해 처음 소개되었으며 離散値 또는 時連續시스팀에 공히 적용될 수 있어서 最適推定問題에 널리 도입되고 있다[5],[6].

이에 本論文에서는 時不變線型多變數系를 모델로 택하여 狀態推定이 最適이 되기 위한 必要充分條件을 다루어 보았으며[7] 또한 프로세스 및 測定雜音의 確率分布가 定常確率이라는 가정하에서 系의 極點再配置에 따른 狀態推定器의 칼만利得을 算定하는 방법에 대하여 다루어 보았다[8].

전술한 칼만 필터設計法의 착안은 線型調節器設計問題에서의 極點이 원하는 위치로 이동되게끔 荷重行列들의 값을 결정하는 방법에서 연유된다.

最適饋還制御系의 設計시 바라는 固有値들을 갖게끔 荷重行列를 찾아가는 技法에는 여러 방법이 있지만 그 중 Chang(1961)[9]은 單一入出力系統에 대하여 Root-Locus法을 도입하여 다루었으

* 漢陽大學校工科大學電氣工學科
Dept. of Electronic Communication Engineering, Hanyang University, Seoul, 133 Korea
** 蔚山工科大學電氣工學科
Dept. of Eelectrical and Electronic Eng. Ulsan Institute of Technology Kyungsangnam-Do, 690 Korea
論文番號：84－12（接受 1984. 5. 1）

며 그 후 Tyler와 Tuteur (1966)[10]는 Chang의 방법을 多變數系에 확장시켰다. 이들의 방법은 합리적인 設計方法이 되지 못하기에 Solheim (1972)[8]은 線型變換에 의한 對角化技法을 이용하여 지정된 閉루우프의 지정 固有値들을 갖게끔 荷重行列를 찾아가는 設計技法을 제시하였다.

最適線型調節器問題와 칼만 필터問題와는 서로 相對的이어서 여기에서는 Solheim이 제시한 設計方案을 칼만 필터의 利得決定에 적용해 보았다[11,12].

이 때 推定器의 極點과 系의 應答特性과의 상관성을 알아낼 수만 있다면 전술한 방법에 의해 선택되어야 할 極點의 위치를 정할 수 있어서 狀態推定器를 보다 효과적으로 設計할 수 있다.

이 때 문제가 되는 칼만 필터設計시 評價尺度로는 平均自乘誤差函數形態를 취하였으며 프로세스雜音과 測定雜音은 平均値가 0인 白色가우시언雜音으로 이상화시켜 다루었다.

마지막으로 系의 極點들이 實極點에서 다른 實極點상으로 변하는 경우와 複素極點에서 實極點으로 이동 배치되는 두 가지 경우에 대한 設計節次와 이에 따른 制約條件을 제시하고 適用例를 디지틀計算機의 시뮬레이션에 의해 앞에서 유도된 設計方法의 효용성을 입증하였다.

2. 狀態推定器의 最適設計條件

n次線型動的系의 狀態方程式과 出力方程式은 다음으로 표현할 수 있다.

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{W}(t) \tag{1}$$
$$\boldsymbol{Z}(t)=\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{V}(t) \tag{2}$$

단, $\boldsymbol{X}(t)$: n벡터 (狀態)
$\boldsymbol{Z}(t)$: m벡터 (測定)
$\boldsymbol{W}(t)$: n벡터 (프로세스雜音)
$\boldsymbol{V}(t)$: m벡터 (測定雜音)

위 식에서 系의 초기상태 $\boldsymbol{X}(t)$를 다음과 같은 平均値(mean)와 共分散(covariance)을 갖는 確率벡터

$$\left.\begin{array}{l} E[\boldsymbol{X}(t_0)]=0 \\ \mathrm{cov}[\boldsymbol{X}(t_0),\boldsymbol{X}(t_0)]=\boldsymbol{P}_0 \end{array}\right\} \tag{3}$$

로 가정하고 行列 $\boldsymbol{A}(t)$, $\boldsymbol{C}(t)$, $\boldsymbol{D}(t)$는 確率變數가 아닌 적절한 次元을 갖는 既知의 값으로 가정한다.

또한 外亂雜音벡터 $\boldsymbol{W}(t)$, $\boldsymbol{V}(t)$는 平均値가 0인 白色確率過程(white zero mean stochastic process)으로 간주하며 이들과 초기상태 $\boldsymbol{X}(t_0)$서로들 간에는 相關關係(correlation)를 갖지 않은 것으로 가정한다. 즉,

$$\left.\begin{array}{l} E[\boldsymbol{W}(t)]=0 \\ E[\boldsymbol{V}(t)]=0 \\ \mathrm{cov}[\boldsymbol{W}(t),\boldsymbol{V}(\tau)]=0 \\ \mathrm{cov}[\boldsymbol{W}(t),\boldsymbol{X}(t_0)]=0 \\ \mathrm{cov}[\boldsymbol{V}(t),\boldsymbol{X}(t_0)]=0 \end{array}\right\} \tag{4}$$

한편 n 및 m次元確率벡터 $\boldsymbol{W}(t)$와 $\boldsymbol{V}(t)$는 시간 t, τ에 대하여 2次確率特性(second-order statistical property)을 갖는 것으로 가정하여 다음과 같이 놓는다.

$$\mathrm{cov}[\boldsymbol{W}(t),\boldsymbol{W}(\tau)]=\boldsymbol{Q}(t)\delta(t-\tau)$$
$$\mathrm{cov}[\boldsymbol{V}(t),\boldsymbol{V}(\tau)]=\boldsymbol{R}(t)\delta(t-\tau)$$

단, $\boldsymbol{Q}(t)$: non-negative definite matrix
$\boldsymbol{R}(t)$: positive definite matrix
δ : dirac delta function

이제 狀態推定器를 最適設計하기 위한 評價尺度는

$$J[\tilde{\boldsymbol{X}}(t)]=E\{[\boldsymbol{X}(t)-\hat{\boldsymbol{X}}(t)]^T[\boldsymbol{X}(t)-\hat{\boldsymbol{X}}(t)]\} \tag{5}$$

인 것으로 가정하고 이 評價尺度를 最少化시키는 狀態推定値 $\hat{\boldsymbol{X}}(t)$를 다음과 같이 정의한다.

$$\hat{\boldsymbol{X}}(t)=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{F}(t,\tau)\boldsymbol{Z}(\tau)\,d\tau \tag{6}$$

단, $\hat{\boldsymbol{X}}(t_0)=0$
$\boldsymbol{F}(t,\tau)=(n\times m)$行列

여기서 $\hat{\boldsymbol{X}}(t)$는 $t\geq t_0$에서 測定된 測定벡터 $\{\boldsymbol{Z}(\tau),\ t_0\leq\tau\leq t\}$를 근거로 하였다. 이 때 시각 t에서의 狀態推定誤差는

$$\tilde{\boldsymbol{X}}(t)=\boldsymbol{X}(t)-\hat{\boldsymbol{X}}(t) \tag{7}$$

이고 誤差分散行列(error variance matrix)은 다음과 같이 된다.

$$\boldsymbol{P}(t)=\mathrm{cov}[\tilde{\boldsymbol{X}}(t),\tilde{\boldsymbol{X}}(t)]=E[\tilde{\boldsymbol{X}}(t)\tilde{\boldsymbol{X}}^T(t)] \tag{8}$$

이제 식(5)의 評價尺度를 最少化시키기 위한 設計는 식(6)의 系統行列 $\boldsymbol{F}(t,\tau)$를 결정하여 식(8)을 最少化시키는 문제로 집약된다.

식(7)의 정의로부터

$$\tilde{X}(t)=X(t)-\hat{X}(t)=X(t)-\int_{t_0}^{t}F^*(t,\tau)Z(\tau)d\tau \tag{9}$$

단, $F^*(t,\tau)$은 變分量을 포함한 系統行列

이며 식(9)로부터 平均自乘誤差는 다음과 같이 표현된다.

$$J[\tilde{X}(t)]=t_r\Big\{E[X(t)X^T(t)]-2\int_{t_0}^{t}E[X(t)Z^T(\lambda)]F^{*T}(t,a)d\lambda-\int_{t_0}^{t}F^*(t,\tau)d\tau\int_{t_0}^{t}E[Z(\tau)Z^T(\lambda)]F^{*T}(t,\lambda)d\lambda\Big\} \tag{10}$$

단, tr은 trace

이제 식(10)을 最少化시키기 위한 系統行列 $F(t,\tau)$가 존재하는 것으로 가정하였을 경우 變分量을 포함한 系統行列은

$$F^*(t,\tau)=F(t,\tau)+\varepsilon F_\varepsilon(t,\tau) \tag{11}$$

으로 된다.

이 때 $F(t,\tau)$를 平均自乘誤差를 最少化시키는 系統行列로 보면 J의 最少化를 위해서는

$$\left.\frac{\partial J[\tilde{X}(t)]}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=0$$

이 되어야 한다. 이것은 最適推定에 대한 必要充分條件이며 다음과 같은 行列 Winer-Hopf方程式으로 표현된다.

$$E[X(t)Z^T(\lambda)]-\int_{t_0}^{t}F(t,\tau)E[Z(\tau)Z^T(\lambda)]d\tau=0 \tag{12}$$

단, λ는 $[t_0, t]$

이제 각각의 편미분을 취하고 식(1),(2) 및 식(4)를 적용하면

$$A(t)F(t,\tau)-\frac{\partial}{\partial t}F(t,\tau)-F(t,t)C(t)F(t,\tau)=0 \tag{13}$$

으로 된다. 또한 식(6)을 시간 t에 대하여 편미분하고 식(13)에 대입하면 다음과 같은 最適狀態推定式이 얻어진다.

$$\mathring{\hat{X}}(t)=A(t)\hat{X}(t)+K(t)[Z(t)-C(t)\hat{X}(t)] \tag{14}$$

단, $K(t)=F(t,t)$: 칼만利得行列

한편 最少誤差分散(minimum error variance)을 만족하는 칼만利得行列 $K(t)$는 다음으로부터 유도할 수 있다.

즉

$$\mathring{\tilde{X}}(t)=\mathring{X}(t)-\mathring{\hat{X}}(t)=[A(t)-K(t)C(t)]\tilde{X}(t)+S(t) \tag{15}$$

단, $S(t)=D(t)W(t)-K(t)V(t)$

여기서 $S(t)$는 平均値가 0인 白色雜音項으로 표현된다.

한편 식(15)의 解 $\tilde{X}(t)$는

$$\tilde{X}(t)=\Psi(t,t_0)\tilde{X}(t,t_0)+\int_{t_0}^{t}\Psi(t,\tau)[D(\tau)W(\tau)-K(\tau)V(\tau)]d\tau \tag{16}$$

단, $\Psi(t,\tau)$: 狀態遷移行列

이며 식(16)을 식(8)에 대입하고 시간에 대하여 微分하면 다음과 같이 필터誤差分散에 관한 식을 얻을 수 있다.

$$\mathring{P}(t)=[A(t)-K(t)C(t)]P(t)+P(t)[A(t)-K(t)C(t)]^T+D(t)Q(t)D^T(t)+K(t)R(t)K^T(t) \tag{17}$$

따라서 最少誤差分散을 만족하는 칼만利得行列은

$$\frac{d\{tr[\mathring{P}(t)]\}}{dK(t)}=0$$

인 조건으로부터

$$K(t)=P(t)C^T(t)R^{-1}(t) \tag{18}$$

식(18)을 식(17)에 대입하면 다음과 같은 最少誤差分散方程式이 얻어진다.

$$\mathring{P}(t)=A(t)P(t)+P(t)A^T(t)-P(t)C^T(t)R^{-1}(t)C(t)P(t)+D(t)Q(t)D^T(t) \tag{19}$$

따라서 全系統모델에 最適필터링機能을 갖춘 最適狀態推定器를 그림 1과 같이 구현화시키면 된다.

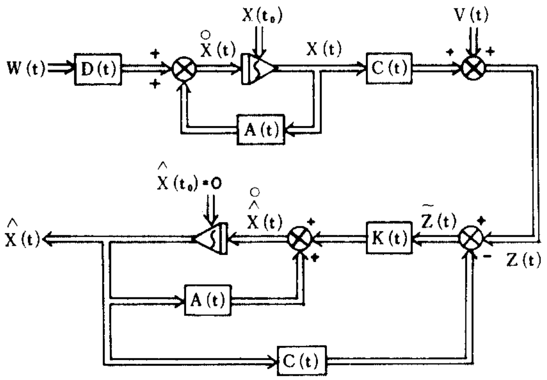

그림 1　最適狀態推定系에 대한 블럭線図
Block diagram of the optimum state estimation system.

이 論文에서는 다루는 動的系가 線型時不變이며 프로세스雜音信號와 測定雜音信號의 確率分布가 시간에 대하여 무관하며 일정한 定常確率을 갖는다고 가정하고 다루었으므로 이 때 最少誤差分散式과 칼만利得行列은

$$\mathring{P}=AP+PA^T-PC^TR^{-1}CP+DQD^T=0 \quad (20)$$
$$K=PC^TR^{-1} \quad (21)$$

으로 되며 또한 식(20)을 標準系(cannonical system)에 대한 꼴로 표현하면

$$\begin{pmatrix}\mathring{U}\\ \mathring{V}_c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-A^T & C^TR^{-1}C\\ DQD^T & A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U\\ V_c\end{pmatrix}=F_E\begin{pmatrix}U\\ V_c\end{pmatrix} \quad (22)$$

단, $F_E=\begin{pmatrix}-A^T & C^TR^{-1}C\\ DQD^T & A\end{pmatrix}$

와 같이 된다.

이 때 最適狀態推定器의 固有値와 標準系의 陰의 실부분을 갖는 固有値와는 서로 동일하므로 標準系의 固有値를 이용하여 狀態推定器의 固有値變化에 따른 칼만利得行列과 雜音共分散行列 Q를 결정하는 방법을 다루어 본다. 여기서는 系統行列의 對角化를 근거로 하여 A가 서로 상이한 實固有値를 가질 경우와 複素固有値를 갖는 경우로 나누어 다룬다.

3. 設定된 固有値를 만족하는 칼만利得의 設計

i) A가 서로 상이한 實固有値만을 갖는 경우

系統行列 A를 다음의 線型變換을 통하여 對角化시킨다.

$$X(t)=MY(t) \quad (23)$$

여기서 M은 系統行列 A의 各固有値들에 대응하는 固有벡터들로 형성되는 行列이며 對角化된 식(1) 및 식(2)의 狀態方程式과 出力方程式은

$$\mathring{Y}(t)=\Lambda Y(t)+M^{-1}DW(t) \quad (24)$$
$$Z(t)=CMY(t)+V(t) \quad (25)$$

단, $\Lambda=M^{-1}AM$이며 $(n\times n)$行列

로 표현되며 또한 식(22)의 標準系의 行列을 對角化시키면

$$\tilde{F}_E=\begin{pmatrix}-\Lambda & H_E\\ \tilde{Q} & \Lambda\end{pmatrix} \quad (26)$$

단, $H_E=M^TC^TR^{-1}CM,\ \tilde{Q}=M^{-1}DQD^TM^{-T}=M^{-1}Q'M^{-T}$
(~)은 對角化를 의미함.

으로 된다. 여기서 $\tilde{Q}$를 하나의 非零要素(non-zero element)로 가정했을 경우 이 標準系統行列 F_E의 固有値는 다음 식으로부터 얻어진다.

$$|SI-\tilde{F}_E|=[(S+\lambda_j)(S-\lambda_j)-\tilde{q}_{jj}h_{jj}]\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}(S+\lambda_i)(S-\lambda_i)=0 \quad (27)$$

만일 最適狀態推定器의 固有値들을 S_j로 가정한다면 식(27)로부터 $\tilde{q}_{jj}$를 구할 수 있다. 즉

$$\tilde{q}_{jj}=\frac{S_j^2-\lambda_j^2}{h_{jj}} \quad (28)$$

단, h_{jj}는 $\tilde{q}_{jj}$에 대응하는 H_E行列중의 한 要素

따라서 식(28)로부터 系統行列 Λ에 대한 j번째 固有値 λ_j로부터 원하는 固有値 S_j로 되게끔 하는 $\tilde{q}_{jj}$를 구할 수 있다.

또한 식(28)를 이용한 $\tilde{q}_{jj}$를 가지고 最少誤差分散方程式

$$\mathring{\tilde{P}}=\Lambda\tilde{P}+\tilde{P}\Lambda^T-\tilde{P}M^TC^TR^{-1}CM\tilde{P}+\tilde{Q}=0 \quad (29)$$

의 解를 구함으로써 對角化된 系統의 狀態推定器의 利得行列은 다음과 같이 된다.

$$\tilde{K}=\tilde{P}M^TC^TR^{-1} \quad (30)$$

이 때 最適狀態推定器의 狀態方程式은

$$\mathring{\hat{Y}}(t)=[\Lambda-\tilde{K}CM]\hat{Y}(t)+\tilde{K}Z(t) \quad (31)$$

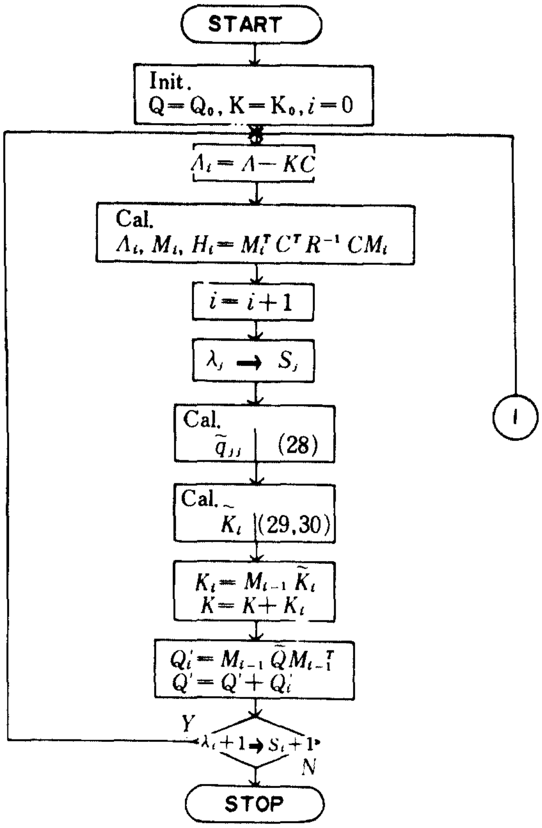

그림 2 設計方法의 흐름図
Flow chart for design method.

이며 $\hat{Y}(t)$를 $\hat{X}(t)$로 다시 표현하면 다음과 같다.

$$\mathring{\hat{X}}(t)=[A-KC]\hat{X}(t)+KZ(t) \qquad (32)$$

단, $K=M\tilde{K}$

여기서 狀態推定器$[A-KC]$의 固有値와 $[\Lambda-\tilde{K}CM]$의 固有値는 서로 동일하며 다음의 식으로부터 프로세스雜音共分散行列을 구할 수 있다.

$$Q'=DQD^T=M\tilde{Q}M^T \qquad (33)$$

따라서 設定된 固有値들을 만족하게끔 하는 칼만利得行列 K는 그림 2의 흐름図에 따라 設計해 낼 수 있으며 이의 證明問題를 附錄에서 밝혔다.

適用例

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -6 & -5\end{pmatrix},\quad C=[1\quad 0],\quad D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$
$$R=[1]$$

이 系의 固有値는 $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=-3$이다. 最適 狀態推定器의 固有値를 $S_1=-5$, $S_2=-8$로 되게 하려고 하는 경우를 생각한다. 이 값을 만족하는 칼만利得行列과 雜音共分散行列를 앞에서 소개한 設計흐름図에 의해 구하여 본다.

먼저 λ_1을 S_1되게 이동시키려면 A의 固有벡터

$$M_0=\begin{pmatrix}-0.33 & -0.5\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$(H_E)_0=M_0^TC^TR^{-1}CM_0=\begin{pmatrix}0.109 & 0.165\\ 0.165 & 0.25\end{pmatrix}$$

따라서

$$(\tilde{q}_{22})_1=\frac{25-4}{0.25}=84,\quad \tilde{Q}_1=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 84\end{pmatrix}$$

또한

$$\mathring{\tilde{P}}=\Lambda\tilde{P}+\tilde{P}\Lambda^T-\tilde{P}M_0^TC^TR^{-1}CM_0\tilde{P}+\tilde{Q}_1=0$$

으로부터

$$\tilde{P}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 12\end{pmatrix}$$

칼만利得 $\tilde{K}=\tilde{P}M_0^TC^TR^{-1}=\begin{pmatrix}0\\ -6\end{pmatrix}$,

$$K_1=M_0\tilde{K}=\begin{pmatrix}3\\ -6\end{pmatrix}$$

따라서

$$A_1=A-KC=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 0 & -5\end{pmatrix}$$

이다.

여기서 A_1에 대한 固有値는 $\lambda_1=-3$, $\lambda_2=-5$로 변환되었으며 이 때

$$Q'=M_0\tilde{Q}_1M_0^T=\begin{pmatrix}21 & -42\\ -42 & 84\end{pmatrix}$$

으로 된다.

다음에 λ_2를 S_2로 변환시키면

A_1의 固有벡터 $M_1=\begin{pmatrix}1 & -0.5\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$$(H_E)_1=M_1^TC^TR^{-1}CM_1=\begin{pmatrix}1 & -0.5\\ -0.5 & 0.25\end{pmatrix}$$

따라서

$$(\tilde{q}_{11})_2=\frac{64-9}{1}=55,\quad \tilde{Q}_2=\begin{pmatrix}55 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

또한

$$\mathring{\tilde{P}}=\Lambda\tilde{P}+\tilde{P}\Lambda^T-\tilde{P}M_1^TC^TR^{-1}CM_1\tilde{P}+\tilde{Q}_2=0$$

으로부터

$$\tilde{P}=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

칼만利得 $\tilde{K}_1=\tilde{P}M_1^TC^TR^{-1}=\begin{pmatrix}5\\ 0\end{pmatrix}$,

$$K_2=M_1\tilde{K}_1=\begin{pmatrix}5\\ 0\end{pmatrix}$$

따라서

$$K=K_1+K_2=\begin{pmatrix}8\\ -6\end{pmatrix}$$

또한

$$A_2=A-KC=\begin{pmatrix}-8 & 1\\ 0 & -5\end{pmatrix}$$

이며 $\lambda_1=-8,\ \lambda_2=-5$

$$Q_2'=M_1\tilde{Q}_2M_1^T=\begin{pmatrix}55 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

따라서

$$Q'=Q_1'+Q_2'=\begin{pmatrix}76 & -42\\ -42 & 84\end{pmatrix}$$

ii) A가 複素固有値를 갖는 경우

n次線型動的系統의 A行列이 複素固有値를 가질 때는 實數를 갖는 對角行列로는 變換시킬 수 없다. 그러나 다음의 변환에 의하여 모달(modal)型의 準對角行列로 변환시킬 수 있다.

$$\Lambda=T^{-1}AT=\begin{pmatrix}-\alpha & \beta\\ -\beta & -\alpha\end{pmatrix}\tag{34}$$

단, T는 變換行列

먼저 프로세스雜音共分散行列 $\tilde{Q}$를 다음과 같이 가정한다.

$$\tilde{Q}=\begin{pmatrix}\tilde{q}_{11} & 0\\ 0 & \tilde{q}_{22}\end{pmatrix}\tag{35}$$

단, $\tilde{q}_{11}=\tilde{q}_{22}$

이 때 系統行列의 固有値는 共軸複素固有値를 가질 것이어서 標準系 $\tilde{F}_E$의 特性方程式은

$$\begin{aligned}S^4&-[2(\alpha^2-\beta^2)+\tilde{q}_{11}(h_{11}+h_{22})]S^2\\&+\tilde{q}_{11}^2(h_{11}h_{22}-h_{12}^2)+\tilde{q}_{11}(h_{11}+h_{22})(\alpha^2+\beta^2)\\&+(\alpha^2+\beta^2)^2=0\end{aligned}\tag{36}$$

으로 표현되며 식(26)에서 H_E行列은 다음과 같다.

$$H_E=T^TC^TR^{-1}CT\tag{37}$$

여기서 2개의 複素固有値를 複素平面上에서의 새로이 설정된 複素根 또는 實根되는 위치로 이행시키려고 하면 각각 다음의 制約條件이 만족되어야 한다.

첫째, 狀態推定器의 固有値를 다음과 같이 선정했을 경우

$$S_1=-r+j\delta,\quad S_2=-r-j\delta\tag{38}$$

이 2개의 固有値로부터 식(36)에 대응되는 特性方程式은

$$S^4+2(r^2-\delta^2)S^2+(r^2+\delta^2)^2=0\tag{39}$$

으로 표현되며 식(36) 및 식(39)에서 S^2項에 대한 係數를 같게 놓으면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\tilde{q}_{11}=\frac{2(r^2-\alpha^2)-2(\delta^2-\beta^2)}{h_{11}+h_{22}}\tag{40}$$

이 때 식(38)의 r과 δ는 임의의 값으로 정해질 수 없다. 이 때 만족되어야 할 조건은 식(36)과 식(39)의 S^0項에 대한 係數를 서로 같게 놓음으로써 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}(r^2+\delta^2)^2=(\alpha^2+\beta^2)^2+\tilde{q}_{11}(h_{11}+h_{22})(\alpha^2+\beta^2)^2\\+\tilde{q}_{11}^2(h_{11}h_{22}-h_{12}^2)\end{aligned}\tag{41}$$

또한 임의로 r값이 되게 정했을 경우 δ는 식(41)로부터 결정되며 이 때 δ는 반드시 實數로 표현되어야 한다.

둘째, 狀態推定器의 固有値를 實數로 정했을 경우

$$S_1=-r_1,\quad S_2=-r_2\tag{42}$$

이 때 식(36)에 대응하는 特性方程式은

$$S^4-(r_1^2+r_2^2)S^2+r_1^2r_2^2=0\tag{43}$$

이 되며 식(36) 및 식(43)에서 S^2項에 대한 係數를 서로 같게 놓으면

$$\tilde{q}_{11}=\frac{r_1^2+r_2^2-2(\alpha^2-\beta^2)}{h_{11}+h_{22}} \tag{44}$$

이 된다.

또한 r_1과 r_2에 관계되는 制約條件은 식(36) 및 식(43)으로부터 S^0項의 係數를 서로 같게 놓음으로써 얻을 수 있다.

$$r_1^2 r_2^2=(\alpha^2+\beta^2)^2+\tilde{q}_{11}(h_{11}+h_{22})(\alpha^2+\beta^2)+\tilde{q}_{11}^2(h_{11}h_{22}-h_{12}^2) \tag{45}$$

따라서 임의로 설정한 값 r_1에 대한 r_2는 식(44) 및 식(45)로부터 구할 수 있으며 이 때 r_2는 반드시 實數이어야 한다.

그러나 식(45)로부터 얻어진 r_2와 식(42)에서 설정한 r_2와는 서로 차이가 있다. 여기서 r_1을 이용하여 r_2를 구하는 것은 단지 위의 制約條件으로부터 狀態推定器의 固有值 하나를 이동시켜 주기 위한 行列要素 q_{11}을 구하고자 하는데 있다. 따라서 q_{11}을 이용하여 본래의 固有值 λ_1을 임의로 설정한 S_1으로 이동시킬 수 있다.

또한 λ_2를 S_2로 이동시킬 경우에는 實固有值를 임의로 設定한 實固有值로 이동시켜 주는 처음 設計方法 i)을 적용해야 하며 이 때 $\tilde{q}_{22}$는 試行錯誤法으로 구한다.

결국 n次線型動的系統에 대한 複素固有值를 實軸上의 위치로 移行시킬 수 있는 칼만利得行列 K는 그림 3의 흐름図에 따라서 設計해 낼 수 있다.

適用例

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$R=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$$

이 系의 固有值는 $\lambda_1=-1+j$, $\lambda_2=-1-j$ 이다. 最適狀態推定器의 固有值를 $S_1=-8$, $S_2=-5$되게 설정하려고 할 경우를 가정한다. 먼저 A의 固有벡터 T_0는

$$T_0=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad (H_E)_0=T_0^T C^T R^{-1} C T_0=\begin{pmatrix}0.2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

으로 된다.

먼저 λ_1을 S_1으로 移行시킬 경우 식(44) 및 식(45)로부터 $r_2=-3.98$을 얻는다. 따라서

$$(\tilde{q}_{11})_1=66.534,\quad \tilde{Q}_1=\begin{pmatrix}66.534 & 0\\ 0 & 66.534\end{pmatrix}$$

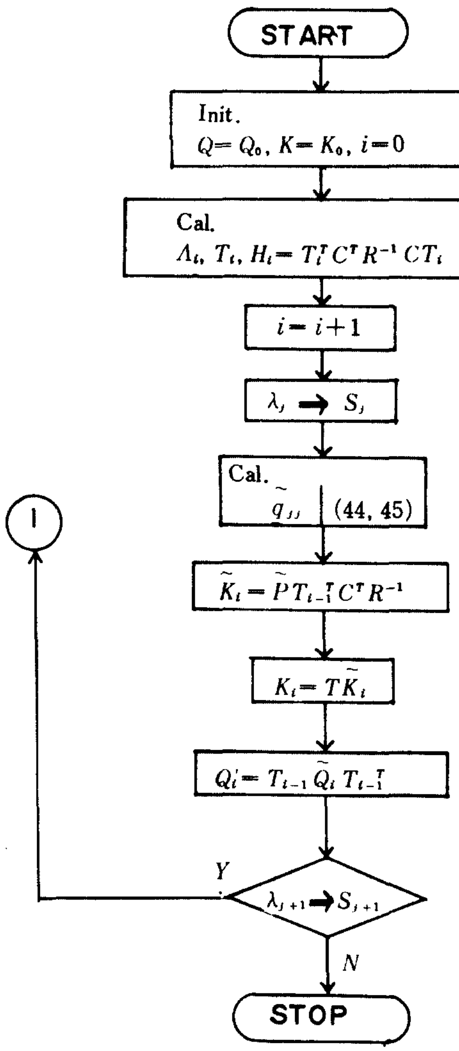

그림 3. 設計方法의 흐름図
Flow chart for design method.

또한 $\dot{\tilde{P}}=\Lambda\tilde{P}+\tilde{P}\Lambda^T-\tilde{P}T_0^T C^T R^{-1} C T_0 \tilde{P}+\tilde{Q}_1=0$ 으로부터

$$\tilde{P}=\begin{pmatrix}3.46 & -0.141\\ -0.141 & 7.195\end{pmatrix}$$

칼만利得行列

$$\tilde{K}_1=\tilde{P}T_0^T C^T R^{-1}=\begin{pmatrix}-0.141 & 0.692\\ 7.195 & -0.028\end{pmatrix}$$

$$K_1=T\tilde{K}_1=\begin{pmatrix}7.195 & -0.028\\ -0.141 & 0.692\end{pmatrix}$$

따라서

$$A_1 = A - KC = \begin{pmatrix} -8.195 & -0.972 \\ 1.141 & -1.692 \end{pmatrix},$$

$$Q_1' = \begin{pmatrix} 66.354 & 0 \\ 0 & 66.354 \end{pmatrix}$$

여기서 A_1에 대한 固有値는 $\lambda_1 = -7.976$, $\lambda_2 = -1.91$이다. 다음에는 λ_2를 S_2로 移行시킬 경우를 생각한다. 이것은 實固有値를 임의로 설정한 實固有値로 移行시키는 첫째 設計法을 적용시키면 된다. 이 때 $\tilde{q}_{22}$는 試行錯誤法에 의하여 정해지게 된다. 따라서 $\tilde{q}_{22} = 1050$으로 정했을 때

$$\tilde{Q}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1050 \end{pmatrix}$$

A_1의 固有벡터

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -0.155 \\ -0.225 & 1 \end{pmatrix}$$

또한 $\mathring{\tilde{P}} = \Lambda\tilde{P} + \tilde{P}\Lambda^T - \tilde{P}M_1^T C^T R^{-1} C M_1 \tilde{P} + \tilde{Q}_2 = 0$ 으로부터

$$\tilde{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 14.8 \end{pmatrix}$$

칼만利得

$$\tilde{K}_2 = \tilde{P}_2 M_1^T C^T R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2.18 & 2.816 \end{pmatrix}$$

$$K_2 = M_1 \tilde{K}_2 = \begin{pmatrix} 0.338 & -0.436 \\ -2.18 & 2.816 \end{pmatrix}$$

따라서

$$K = K_1 + K_2 = \begin{pmatrix} 7.533 & -0.464 \\ -2.321 & 3.508 \end{pmatrix}$$

또한

$$A_2 = A - KC = \begin{pmatrix} -8.533 & -0.536 \\ 3.321 & -4.508 \end{pmatrix}$$

이며 $\lambda_1 = -8.012$, $\lambda_2 = -5.01$

$$Q_2' = \begin{pmatrix} 25.226 & -162.75 \\ -162.75 & 1050 \end{pmatrix}$$

따라서

$$Q' = Q_1' + Q_2' = \begin{pmatrix} 91.58 & -162.75 \\ -162.75 & 1116.354 \end{pmatrix}$$

4. 結 論

本論文에서는 雜音이 섞인 測定値를 最適필터링하여 狀態推定하여 낸 系의 應答이 바람직하지 못할 경우 狀態推定器의 極點을 좀 더 바람직한 위치로 再配置시켜 가면서 이 때의 칼만利得行列과 프로세스雜音共分散行列를 구해가는 設計方法을 理論的으로 규명하였다.

이 때 系統의 實極點을 다른 實極點값으로 이동시켜 가는데에는 별로 어려움이 없었으나 系統의 複素極點들을 實極點되게 再配置시켜 가려고 할 경우에는 試行錯誤法을 써서 제기된 制約條件이 만족되게끔 새롭게 極點들을 배치해 가야 한다.

이 방법은 推定器의 極點과 系의 應答特性간의 상관성을 알아 낼 수만 있다면 쉽게 계산적으로 수행될 수 있을 뿐만 아니라 추후 確率最適制御에도 적용이 가능할 것으로 사료된다.

附 録

서로 다른 2개의 固有値를 갖는 動的系로부터 線型變換에 의한 對角化技法을 도입하여 指定된 閉루우프의 指定固有値들을 갖게끔 하는 設計技法은 다음으로부터 증명할 수 있다.

첫번째 固有値를 指定된 閉루우프의 指定固有値를 갖게끔 하는 칼만利得行列 K_1은

$$K_1 = P_1 C^T R^{-1}$$

이며 여기서 P_1은 다음과 같은 最少誤差分散方程式의 解이다.

$$\mathring{P}_1 = AP_1 + P_1 A^T - P_1 C^T R^{-1} C P_1 + Q_1' = 0 \quad (1)$$

또한 두번째 動的系의 固有値를 지정된 閉루우프의 指定固有値를 갖게끔 하는 칼만利得行列 K_2는

$$K_2 = P_2 C^T R^{-1}$$

이며 P_2는 다음과 같은 方程式의 解이다.

$$\mathring{P}_2 = (A - K_1 C) P_2 + P_2 (A - K_1 C)^T - P_2 C^T R^{-1} C P_2 + Q_2' = 0 \quad (2)$$

따라서 식(1) 및 식(2)를 結合시켜 K에 대입하면 다음의 方程式을 만족한다.

$$\mathring{P} = AP + PA^T - PC^T R^{-1} CP + Q' = 0$$

여기서 $P=P_1+P_2$이며 $Q'=Q_1'+Q_2'$이다. 이 때 $K=K_1+K_2=(P_1+P_2)C^TR^{-1}$으로 표현된다.

參 考 文 獻

(1) Meditch, "Stochastic optimal linear estimation ard control", McGrow-Hill, pp. 288-319, 1969.

(2) Edison Tse, "On the optimal control of Stochastic linear systems", IEEE Trans. on Auto. Cont., vol, AC-16, no. 6, pp. 778-785, 1971.

(3) Peter S. Mayback, "Stochastic models, estimation and control volume 1", Academic press pp. 257-263, 1979.

(4) Touraj Assefi, "Stochastic processes and estimation theory with applications", John Wiley and Sons, pp. 157-182, 1979.

(5) R. E. Kalman, R. S. Bucy, "New results in linear filtering and prediction theory", Trans. of the ASME, pp. 95-108, Mar. 1961.

(6) R. E. Kalman, "A new approach to linear filtering and prediction problems", Journal of Basic Engineering, pp 35-45, Mar. 1960.

(7) Ian B. Rhodes, "A tutorial introduction to estimation and filtering", IEEE Trans. Auto, Control, vol. AC-16, pp. 688-706, 1971.

(8) O. A. Solheim, "Design of optimal control system with prescribed eigenvalues", Int. J. Control, vol. 15, pp. 143-160, 1972.

(9) Chang, S. S. L., "Synthesis of optinum control systems", McGraw-Hill, 1961.

(10) Tylor, J. S., and Tuteur, F. B., I. E. E. E. Trans. Autom. control, II, 84, 1966.

(11) Åström, "Introductim to stochastic control theory", Academic press, pp. 242-248, 1970.

(12) Arthur Gelb, "Applied optimal estimation", MIT Press, 1974.

張世勳(Se Hooh CHANG) 正會員
1931年12月23日生
1953年－1957年：서울大學校工科大學電氣工學科
1959年－1962年：美國N. C. 州立大學 大學院電氣工學科
1973年：漢陽大學校工學博士
1965年－1969年：漢陽大學校工科大學電氣工學科敎授
1969年－1970年：美國Colo. 州立大學大學院電氣工學科〈交換敎授〉
1970年－現在：漢陽大學校工科大學電氣工學科交換敎授

李陽範(Yang Bum LEE) 正會員
1949年12月25日生
1975年：漢陽大學校工科大學電氣工學科卒業
1977年：漢陽大學校大學院電氣工學科(工學碩士)
1984年：漢陽大學校大學院電氣工學科博士過程修了
1981年～現在：蔚山工科大學電氣 및 電子工學科助敎授