

DoF에 따른 Massive MIMO 시스템의 성능 분석

김 용 욱*, 최 수 용^o

Performance Analysis of Massive MIMO Systems According to DoF

Yongok Kim*, Sooyong Choi^o

요 약

본 논문에서는 MRT 및 ZF 프리코딩 기법을 사용하는 Massive MIMO 시스템의 DoF 수에 따른 성능을 분석한다. 본문에서는 하향링크에서 각 MRT 및 ZF 프리코딩 사용시 평균 수신 SINR을 송신 안테나 수에 따라 정규화된 DoF의 수에 대한 Closed-Form으로 도출하였다. 분석 및 모의실험 결과를 통해 DoF 수가 적을 경우 MRT 프리코딩이 ZF 프리코딩 대비 우수한 성능을 달성할 수 있음을 확인하였다.

Key Words : Massive MIMO, MRT, ZF, DoF, Precoding

ABSTRACT

In this letter, we investigate the performance analysis of massive MIMO systems using MRT and ZF precodings according to the number of DoF. We analyze the ergodic received SINRs with MRT and ZF precodings as closed-forms over the number of DoF normalized by the number of antennas. In simulation results, we verify the analyzed results and observe that MRT precoding is better than ZF precoding in terms of the ergodic received SINR with a small number of DoF.

I. 서 론

Massive MIMO (Multiple-Input Multiple-Output) 시스템은 수십~수백 개 이상의 안테나가 설치된 기지

국에서 간단한 선형 프리코딩을 사용하여 높은 전송 용량을 확보할 수 있는 차세대 무선통신 기술로 최근 각광받고 있다¹⁾. MRT (Maximum Ratio Transmission) 프리코딩 및 ZF (Zero-Forcing) 프리코딩은 Massive MIMO 시스템의 하향링크 전송 시에 고려되는 대표적인 프리코딩 기법이며, 여러 관련 연구를 통해 ZF 프리코딩이 MRT 프리코딩 대비 전송 용량 관점에서는 우수하나 높은 복잡도를 요구하는 트레이드오프 (Trade-Off)가 존재함이 알려져 있다²⁾. 그러나 이러한 연구 결과는 Rich-Scattering 환경 등 DoF (Degree-of-Freedom)가 많은 채널에서의 결과로 한정된다. 실제 Massive MIMO 시스템에서는 서비스 지역 확대를 위해 기지국 안테나들이 빌딩 위와 같이 높은 고도에 설치되며, 따라서 산란자 수가 안테나 수 대비 부족해지는 상공 채널, 즉 적은 DoF를 가지는 채널에 대한 분석이 필요하다³⁾. 따라서 본 논문에서는 보다 일반적인 하향링크 환경에서 DoF에 따른 SINR (Signal-to-Interference-plus-Noise Ratio) 분석을 통해 MRT 및 ZF 프리코딩 기법의 성능을 비교한다.

II. 시스템 모델

하나의 셀 안에 M 개의 안테나를 가진 기지국과 단일 안테나를 가진 K 명의 사용자가 존재하는 다중 사용자 MIMO 시스템의 하향링크 환경을 고려한다. 하향링크 전송 시, 기지국에서는 전송 신호를 프리코딩하여 K 명의 사용자에게 같은 시간-주파수 자원에서 동시에 전송한다. 이 때 기지국 안테나는 통신 파장의 반파장의 간격을 갖는 등간격 선형 어레이 (Uniform Linear Array)로 고정되어 있다고 가정하면 M 개의 기지국 안테나와 k 번째 사용자 사이의 $M \times 1$ 채널 벡터는 다음과 같이 분해된다^{3,4)}.

$$\mathbf{h}_k = \mathbf{U}\mathbf{a}_k \quad (1)$$

식 (1)에서 \mathbf{U} 는 $[\mathbf{U}]_{mn} = e^{-j2\pi(m-1)(n-1)/M} / \sqrt{M}$ 를 만족하는 $M \times M$ DFT (Discrete Fourier Transform) 행렬이다. 여기서 $[\mathbf{U}]_{mn}$ 은 행렬 \mathbf{U} 의 (m,n) 번째 성분이다. 참고문헌 [4]의 Chapter 7에 따르면 $M \times 1$ 벡터 \mathbf{a}_k 는 k 번째 사용자 채널의 Angular Domain 채널로서 기지국으로부터 사용자로 나가는 물리적 전파 경로의 도래각 (Angle of Arrival)에 따

* First Author : School of Electrical and Electronic Engineering, Yonsei University, dyddhr0518@yonsei.ac.kr, 학생회원

^o Corresponding Author : School of Electrical and Electronic Engineering, Yonsei University, csyong@yonsei.ac.kr, 중신회원

논문번호 : KICS2015-10-326, Received October 7, 2015; Revised November 4, 2015; Accepted November 4, 2015

라 \mathbf{a}_k 벡터의 각 성분들이 결정되며, Angular Domain 상 존재하지 않는 경로에 해당하는 성분은 0으로 채워진다. 본문에서는 분석의 편의상 분산이 1인 Rayleigh 분포를 갖는 P 개의 전파경로를 가정하며, 따라서 \mathbf{a}_k 는 P 개의 DoF를 가진 벡터가 된다^[4]. 또한, 모든 사용자는 동일한 P 개의 DoF를 가지고 있고 각 DoF의 P 위치는 \mathbf{a}_k 내에서 균일하게 분포되었다고 가정한다^[3]. P 는 안테나 수 M 에 비례한다고 가정하고, 비례상수 $\mu = P/M$ 을 정규화 DoF 수로 정의할 수 있다^[5].

III. 프리코딩 기법에 따른 수신 SINR 분석

본 장에서는 앞서 제시한 채널 모델로부터 각 MRT 및 ZF 프리코딩 기술에 따른 하량링크의 평균 수신 SINR을 분석하여 비교한다. 이 때 평균 수신 SINR 성능에서 더 우수한 결과를 얻는 것으로 알려진 행렬 정규화 방식과 벡터 정규화 방식을 MRT 프리코딩과 ZF 프리코딩에 각각 적용한다^[2].

3.1 MRT 프리코딩 기법의 수신 SINR 분석

기지국에서 완벽한 채널정보를 안다고 가정하였을 경우, k 번째 사용자의 평균 수신 SINR은 다음과 같다^[2].

$$E\{\gamma_k^{mrt}\} = E\left\{ \frac{\rho |\mathbf{h}_k^H \mathbf{h}_k|^2}{\rho \sum_{j=1, j \neq k}^K |\mathbf{h}_k^H \mathbf{h}_j|^2 + \|\mathbf{H}\|_F^2} \right\} \quad (2)$$

식 (2)에서 ρ 는 송신 SNR (Signal-to-Noise Ratio) 이고, \mathbf{H} 는 \mathbf{h}_k 열 벡터들로 이루어진 $M \times K$ 통합 채널 행렬이며, $\|\cdot\|_F$ 는 Frobenius Norm 연산자이다. 식 (1)에서 DFT 행렬의 성질 ($\mathbf{U}^H \mathbf{U} = \mathbf{I}$, $\|\mathbf{UX}\|_F = \|\mathbf{X}\|_F$)을 식 (2)에 대입하면 k 번째 사용자의 평균 수신 SINR은 다음과 같다.

$$E\{\gamma_k^{mrt}\} = E\left\{ \frac{\rho |\mathbf{a}_k^H \mathbf{a}_k|^2}{\rho \sum_{j=1, j \neq k}^K |\mathbf{a}_k^H \mathbf{a}_j|^2 + \|\mathbf{A}\|_F^2} \right\} \quad (3)$$

따라서, M 과 P 가 무한대로 증가할 경우, 식 (3)은 다음과 같이 근사할 수 있다^[2].

$$E\{\gamma_k^{mrt}\} \approx \frac{\rho E\{|\mathbf{a}_k^H \mathbf{a}_k|^2\}}{E\left\{ \rho \sum_{j=1, j \neq k}^K |\mathbf{a}_k^H \mathbf{a}_j|^2 + \|\mathbf{A}\|_F^2 \right\}} \quad (4)$$

식 (4)에서 \mathbf{A} 는 \mathbf{a}_k 열 벡터들로 이루어진 $M \times K$ 통합 행렬이다. 한편, \mathbf{a}_k 와 \mathbf{a}_j 에서 위치가 겹치는 성분의 수의 평균치는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\sum_{m=1}^P m \frac{M-P C_{P-m} \times P C_m}{M C_P} = \frac{P^2}{M} \quad (5)$$

식 (5)에서 ${}_i C_j$ 은 i 에서 j 를 고르는 경우의 수이다. 따라서, M 과 P 가 무한대로 증가할 때, 식 (5) 및 대수의 법칙을 이용해 식 (4)를 다음과 같이 근사할 수 있다^[2].

$$E\{\gamma_k^{mrt}\} \approx \frac{\rho(P^2+P)}{\rho(K-1)\frac{P^2}{M}+PK} = \frac{\rho(M\mu+1)}{\rho(K-1)\mu+K} \quad (6)$$

$P=M$ 인 환경에서 유도된 기존의 평균 수신 SINR 식 $(\rho M+1)/(\rho(K-1)+K)$ ^[2]과 식 (6)을 비교할 경우, 식 (6)에서는 분자의 원하는 신호 (Desired Signal) 부분과 분모의 간섭 신호 부분에 정규화 DoF 수 μ 가 곱해짐을 확인할 수 있다.

3.2 ZF 프리코딩 기법의 수신 SINR 분석

ZF 프리코딩을 사용한 경우 k 번째 사용자의 평균 수신 SINR은 다음과 같이 유도할 수 있다^[2].

$$\begin{aligned} E\{\gamma_k^{zf}\} &= \frac{\rho}{K} E\left\{ \frac{1}{[(\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1}]_{kk}} \right\} \\ &= \frac{\rho}{K} E\left\{ \frac{1}{[(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1}]_{kk}} \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

일반성을 잃지 않고 $k=1$ 이라고 가정하고 M 과 P 가 무한대로 증가할 때, 대수의 법칙을 이용해 식 (7)을 근사하여 다음과 같이 유도할 수 있다^[2].

$$\begin{aligned} &\frac{\rho}{K} E\left\{ \frac{1}{[(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1}]_{11}} \right\} = \frac{\rho}{K} E\{\mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_1\} \\ &- \frac{\rho}{K} \sum_{k=2}^K E\left\{ \frac{\sum_{i=2}^K (-1)^{i-1} \det[\mathbf{G}_{ik}] \mathbf{a}_i^H E(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^H) \mathbf{a}_k}{\sum_{j=2}^K (-1)^{j-1} \det[\mathbf{G}_{jk}] \mathbf{a}_j^H \mathbf{a}_k} \right\} \\ &\approx \frac{\rho}{K} E\{\mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_1\} - \frac{\rho}{K} \sum_{k=2}^K E\left\{ \frac{(-1)^{k-1} \det[\mathbf{G}_{kk}] \mu}{(-1)^{k-1} \det[\mathbf{G}_{kk}]} \right\} \\ &= \rho(M-K+1)\mu/K \end{aligned} \quad (8)$$

식 (8)에서 G_{ik} 는 $(\mathbf{H}^{(1)})^H \mathbf{H}^{(1)}$ 에서 i 번째 행과 k 번째 열을 제외한 행렬이고 $\mathbf{H}^{(1)}$ 는 \mathbf{H} 의 첫 번째 열을 제외한 행렬이다. 기존의 $P=M$ 인 환경에서 유도된 평균 수신 SINR식 $\rho(M-K+1)/K^{1/2}$ 과 식 (8)를 비교할 경우, 식 (8)에서는 분자의 어레이 이득 (Array Gain)에 μ 가 곱해짐을 확인할 수 있다.

IV. 모의실험 결과

모의실험을 위해 $M=200$, $K=80$, $\rho=2$ 의 환경을 고려하였다. 그림 1은 정규화 DoF의 수 μ 에 따른 각 프리코딩 기법의 평균 수신 SINR 성능을 나타낸 그래프이다. 원과 사각형으로 표시된 결과는 각각 MRT 및 ZF 프리코딩 성능의 모의실험 결과이다. 또한 실선과 점선으로 표시된 결과는 각각 식 (6)과 (8)로부터의 분석 결과이다. 그림 1을 통해 각 프리코딩 기법에 대한 분석 결과와 모의실험 결과가 일치함을 확인할 수 있다. 구현 복잡도가 없는 MRT 프리코딩은 $O(K^3)$ 의 복잡도를 가지는 ZF 프리코딩에 비해 복잡도 측면에서 유리하다. 게다가 $E\{\gamma_k^{mrt}\} > E\{\gamma_k^{zf}\}$ 에 해당하는 μ 가 약 0.3 이하인 경우 MRT 프리코딩이 ZF 프리코딩에 비해 우수한 SINR 성능을 보인다. 즉 채널의 상관도가 높은 경우에는 MRT 프리코딩이 ZF 프리코딩에 비해 유리함을 확인할 수 있다.

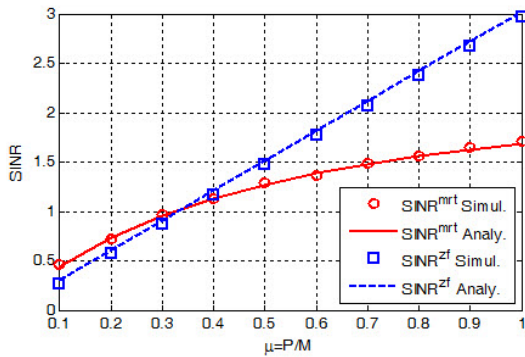


그림 1. μ 에 대한 MRT와 ZF 프리코딩의 평균 SINR
Fig. 1. Ergodic SINRs of MRT and ZF precodings over μ .

V. 결론

본 논문에서는 Massive MIMO 시스템에서 MRT 및 ZF 프리코딩 기법들의 DoF 수에 따른 하향링크 평균 수신 SINR 성능을 분석하였다. 분석 및 모의실험 결과를 통해 프리코딩 기법들의 평균 수신 SINR이 기지국의 안테나 수, 사용자 수, 그리고 DoF 수의 함수로써 표현됨을 확인하였으며, Massive MIMO 환경에서 고려되는 상관도가 높은 채널에서는 MRT 프리코딩이 ZF 프리코딩 대비 보다 우수한 하향링크 성능을 가짐을 확인할 수 있었다. 향후 과제로서 채널 추정 오차를 고려한 수신 SINR 분석이 필요하다.

References

- [1] M. Jung and S. Choi, "Optimal number of base station antennas and users in MF based multiuser massive MIMO systems," *J. KICS*, vol. 38, no. 8, pp. 724-732, Aug. 2013.
- [2] Y. Lim, C. Chae, and G. Caire, "Performance analysis of massive MIMO for cell-boundary users," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, to be published.
- [3] X. Rao and V. K. N. Lau, "Distributed compressive CSIT estimation and feedback for FDD multi-user massive MIMO systems," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 62, no. 12, pp. 3261-3271, Jun. 2014.
- [4] D. Tse and P. Viswanath, *Fundamentals of Wireless Communication*, Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, pp. 290-331, 2005.
- [5] J. Hoydis, et al., "Massive MIMO in the UL/DL of cellular networks: How many antennas do we need?," *IEEE J. Sel. Areas in Commun.*, vol. 31, no. 2, pp. 160-171, Feb. 2013.