

고속 시변 채널 OFDM을 위한 안정화된 LS 신호검출

임 동 민*

Regularized LS Signal Detection for OFDM in Fast Time Varying Channels

Dongmin Lim*

요 약

LS 신호검출 OFDM은 채널 행렬이 불량 조건이 될 확률이 증가하여 고속 시변 채널에서 성능이 저하된다. LS 신호검출의 성능저하를 방지하기 위하여 다양한 안정화 방식이 적용되고 있다. 본 논문에서는 변조방식의 특성이 반영된 실행중지 기준을 적용한 CGLS 방식을 제안하였으며 최적의 LMMSE에 근접한 성능을 얻을 수 있었다.

Key Words : OFDM, fast time-varying channels, ill-conditioned, regularized LS, CGLS

ABSTRACT

The OFDM with LS signal detection performs worse in fast time varying channels as the channel matrix has higher chance of becoming ill-conditioned. Various regularization methods are applied to avoid performance degradation in LS signal detection. In this paper, we proposed a CGLS method with the stopping criteria imposed by the characteristics of the modulation method, which shows performance comparable to that of the optimal LMMSE.

I. 서 론

고속 시변 채널 OFDM은 잡음, 채널예측 오차 등의 영향으로 LS(Least Square) 검출된 신호의 오차가 비정상적으로 증가하는 현상이 나타난다. 이러한 현상

은 채널행렬의 특성이 특이 행렬에 근접하는 경우에 발생하며 성능저하를 방지하기 위하여 다양한 형태의 안정화(regularization) 방식이 LS 신호검출에 적용되고 있다. 직접적인 방식에는 TSVD(Truncated Singular Value Decomposition), Tikhonov 안정화 등이 있으며 반복적인 방법(iterative method)에는 대표적으로 CG(conjugate gradient) 등이 있다^{1,2)}. 본 논문에서는 채널 행렬의 조건수(condition number)가 LS 신호검출에 미치는 영향과 고속 시변 채널의 조건수 분포 특성을 조사한다. LS 신호검출의 안정화를 위하여 PSK 변조방식의 특성이 반영된 실행중지 기준을 적용한 CGLS(Conjugate Gradient Least Square) 방식을 제안하고 기존의 방식과 성능을 비교한다.

II. 고속 시변 채널의 특성

논문에서 고려하는 단일 안테나 OFDM 시스템 모델을 그림 1에 나타내었다. \mathbf{H} 와 \mathbf{w} 는 주파수 영역에서의 채널행렬과 잡음 벡터를 나타낸다. 신호의 검출에는 예측된 채널 행렬 $\hat{\mathbf{H}}$ 의 계수(rank) 특성에 따라 선형연립방정식 $\hat{\mathbf{H}}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ 의 해 또는 LS 해를 구하는 방법을 이용한다. 채널 예측이 성능에 미치는 영향은 채널행렬의 오차로 모델링하여 반영하며 구체적인 채널 예측은 참고문헌 [3]을 참고할 수 있다. 잡음에 의한 수신 신호의 오차 $\delta\mathbf{y}$, 채널 예측의 부정확성으로 인한 채널행렬의 오차 $\delta\mathbf{H}$ 가 신호검출에 미치는 영향 $\delta\mathbf{x}$ 는 $\|\delta\mathbf{H}\| / \|\mathbf{H}\| < 1/\kappa(\mathbf{H})$ 인 조건에서 다음과 같은 상한치를 갖는다⁴⁾

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\kappa(\mathbf{H}) \left(\frac{\|\delta\mathbf{H}\|}{\|\mathbf{H}\|} + \frac{\|\delta\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{y}\|} \right)}{1 - \kappa(\mathbf{H}) \frac{\|\delta\mathbf{H}\|}{\|\mathbf{H}\|}} \quad (1)$$

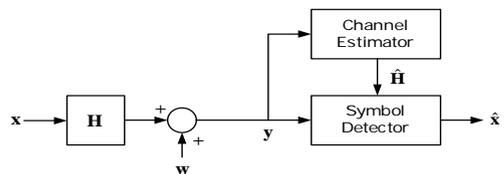


그림 1. OFDM 시스템 모델
 Fig. 1. OFDM system model

* First Author : Department of Electronic Engineering, Gyeongsang National University, dmlim@gsnu.ac.kr, 중신회원
 논문번호 : KICS2015-12-380, Received December 1, 2015; Revised December 17, 2015; Accepted December 18, 2015

위 식에서 $\kappa(\mathbf{H}) = \|\mathbf{H}\| \|\mathbf{H}^{-1}\|$ 이며 행렬 \mathbf{H} 의 조건수라고 부른다. $\kappa(\mathbf{H})$ 가 작은 값을 가지면 양호 조건(well-conditioned) 행렬, $\kappa(\mathbf{H})$ 가 큰 값을 가지면 불량 조건(ill-conditioned) 행렬이라고 부르며 이 경우 수신신호 또는 채널예측의 상대 오차가 작더라도 해의 상대 오차는 큰 값을 가질 수 있다.

OFDM 채널의 시변 특성이 신호 검출에 미치는 영향을 분석하기 위하여 OFDM 부반송파 간격에 정규화된 도플러 주파수 f_D 의 변화에 대한 $\kappa(\mathbf{H})$ 의 변화를 살펴본다. OFDM 부반송파 수 $N=256$, 채널 경로 수 $L=2$ 인 경우 f_D 의 변화에 대한 $\kappa(\mathbf{H})$ 의 분포를 그림 2에 도시하였다. 채널의 각 경로는 일반적인 Jakes 전력밀도함수 특성과 동일한 평균 전력을 갖는다고 가정한다. f_D 가 0.1을 넘어서면 $\kappa(\mathbf{H})$ 의 분포 범위는 급격하게 확장되는 양상을 보인다. 특히 $f_D=0.5$ 가 되면 $\kappa(\mathbf{H})$ 는 $10^{16} \sim 10^{18}$ 범위의 매우 큰 값을 가질 확률이 상당히 높아지며 이것은 특이 행렬에 근접하는 특성을 의미한다.

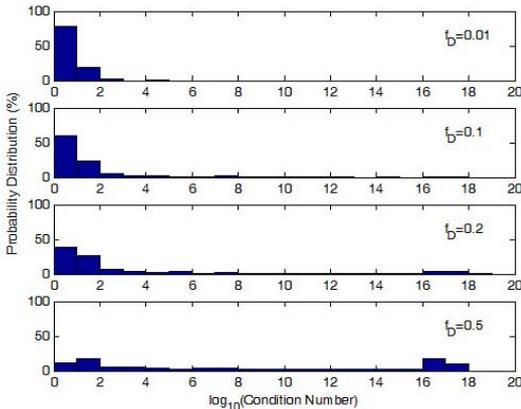


그림 2. 채널 행렬 조건수의 분포
Fig. 2. Distribution of the condition number of the channel matrix

III. LS 신호 검출의 안정화

고속 시변 OFDM 채널의 경우 채널 행렬 \mathbf{H} 가 불량 조건일 확률이 증가한다. \mathbf{H} 가 불량 조건이면 잡음 및 채널예측 오차로 인하여 검출된 신호의 오차가 비정상적으로 증가하여 급격한 성능 저하가 발생한다. 이러한 성능 저하를 방지하기 위하여 방정식 $\hat{\mathbf{H}}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ 의 해 또는 LS 해를 구하는 과정에서 해의 안정화가 요구된다^[2,5].

3.1 Tikhonov 안정화

Tikhonov 안정화는 원하는 해 \mathbf{x}^* 의 크기 등의 특성을 반영한 $\|\mathbf{Lx}\|_2$ 항을 포함하여 LS 해를 구하는 문제로 귀결된다^[2]

$$\min\{\|\hat{\mathbf{H}}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + \lambda^2 \|\mathbf{Lx}\|_2^2\}. \quad (2)$$

$\mathbf{L} = \mathbf{I}$ 인 경우, 식 (2)의 LS 문제는 다음과 같은 직교방정식(normal equation)과 동일한 해를 갖는다

$$(\hat{\mathbf{H}}^H \hat{\mathbf{H}} + \lambda^2 \mathbf{I})\mathbf{x} = \hat{\mathbf{H}}^H \mathbf{y}. \quad (3)$$

위 식에서 $(\)^H$ 는 공액복소 전치행렬을 나타낸다. Tikhonov 안정화에서 매개변수 λ 값은 성능에 큰 영향을 미친다. 신호 전력 σ_s^2 , 잡음 전력 σ_n^2 , 채널예측의 상대오차 $\eta = E[\|\delta\mathbf{H}\|_F^2] / E[\|\mathbf{H}\|_F^2]$ 의 추정치가 가능하여 $\lambda^2 = \sigma_n^2 / \sigma_s^2 + \eta$ 로 선택하면 통계적 신호 처리 분야에서 널리 사용되는 LMMSE(Linear Minimum Mean Square Error)와 동일하게 된다.

3.2 CGLS

방정식 $\hat{\mathbf{H}}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ 의 해를 구하는 반복적인 방법은 초기에 설정한 해 $\mathbf{x}^{(0)}$ 에서 출발하여 반복적인 실행을 통하여 원하는 해 \mathbf{x}^* 에 수렴하는 개선된 해 $\{\mathbf{x}^{(k)}, k=1,2,\dots\}$ 를 차례로 구하는 방식이다^[2,5]. 이 과정에서 얻어지는 $\mathbf{x}^{(k)}$ 는 $\hat{\mathbf{H}}$ 가 불량 조건인 경우 안정화된 해로 사용할 수 있으며 반복횟수 k 는 안정화 매개변수 λ 와 동일한 역할을 한다^[2]. CG 방식은 LS 해를 반복적으로 구하는 대표적인 방식이며 CGLS는

```

 $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{0}, \mathbf{r} \leftarrow \mathbf{y}$ 
 $\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{H}^H \mathbf{r}$ 
 $\mathbf{s} \leftarrow \mathbf{p}$ 
 $\gamma_p \leftarrow \mathbf{s}^H \mathbf{s}, \rho_p \leftarrow \mathbf{x}^H \mathbf{x}$ 
for k ← 1:N
     $\mathbf{q} \leftarrow \mathbf{H}\mathbf{p}$ 
     $\alpha \leftarrow \gamma_p / (\mathbf{q}^H \mathbf{q})$ 
     $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} + \alpha \mathbf{p}, \mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r} - \alpha \mathbf{q}$ 
     $\mathbf{s} \leftarrow \mathbf{H}^H \mathbf{r}$ 
     $\gamma \leftarrow \mathbf{s}^H \mathbf{s}$ 
     $\beta \leftarrow \gamma / \gamma_p$ 
     $\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{s} + \beta \mathbf{p}, \gamma_p \leftarrow \gamma, \rho \leftarrow \mathbf{x}^H \mathbf{x}$ 
    // stopping criteria
    if  $\rho > N\sigma_s^2$  or  $(\rho - \rho_p) / (N\sigma_s^2) < \epsilon$ 
        break
    end
     $\rho_p \leftarrow \rho$ 
end
    
```

그림 3. 제안된 실행종지 기준을 적용한 CGLS
Fig. 3. CGLS with the proposed stopping criteria

LS 문제의 직교방정식에 CG 방식을 적용한 가장 안정적으로 구현된 예로 알려져 있다^[2]. 반복횟수 k 의 선택이 성능에 큰 영향을 미치며 본 논문에서는 변조 방식 특성에 의해 제한되는 해의 조건을 실행중지 기준으로 이용하는 방식을 제안한다. PSK 변조방식의 경우 한 심볼의 에너지는 고정된 값을 가지며 이를 σ_s^2 으로 표시하면 원하는 해 \mathbf{x}^* 에 대하여 항상 $\|\mathbf{x}^*\|_2^2 = N\sigma_s^2$ 이 된다. $\mathbf{x}^{(k)}$ 의 norm $\|\mathbf{x}^{(k)}\|_2$ 는 k 가 증가함에 따라 지속적으로 증가하며^[2] 따라서 $\|\mathbf{x}^{(k)}\|_2^2$ 값이 $N\sigma_s^2$ 를 넘어서면 실행을 중지한다. 원하는 해 \mathbf{x}^* 로 수렴하는 경우에는 최종 목표치 $\|\mathbf{x}^*\|_2^2$ 대비 해가 개선되는 정도 $\|\mathbf{x}^{(k+1)}\|_2^2 - \|\mathbf{x}^{(k)}\|_2^2$ 가 기준치 ϵ 이하가 되면 실행을 중지한다. 제안된 실행중지 기준이 적용된 CGLS 알고리즘을 그림 3에 제시하였다.

IV. 모의실험 결과 및 결론

$N=256, L=2, f_D=0.5, \eta=10^{-4}$, QPSK 변조 방식 OFDM 시스템에 대하여 신호검출 방식의 BER 성능을 그림 4에 도시하였다. 해의 안정화가 시도되지 않은 경우(LS) SNR이 증가해도 시스템의 BER은 별로 개선되지 않는다. Tikhonov 안정화 방식에서 매개 변수 $\lambda^2 = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$ 로 설정한 경우 해당하는 특정 SNR에서만 성능이 최적화되며 다른 SNR 범위에서는 성능저하가 발생한다. 잡음 및 채널예측 오차의 전력을 반영하여 λ 를 결정한 경우(LMMSE) 최적의 BER 성능을 얻을 수 있다. 논문에서 제안한 CGLS 방식의 경우 전반적인 SNR 범위에서 LMMSE에 근접하는 BER 성능을 얻을 수 있다($\epsilon = 10^{-4}$). 제

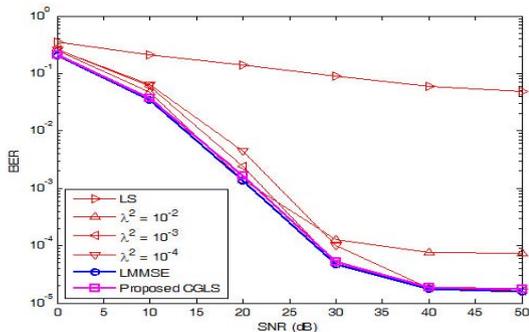


그림 4. 여러 가지 신호검출 방식의 BER 성능 비교
Fig. 4. BER performance comparisons of various signal detection methods

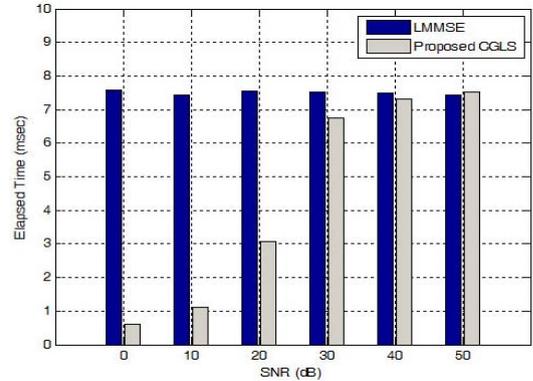


그림 5. 신호검출에 소요되는 계산량의 비교
Fig. 5. Comparisons of the computational complexity of the signal detection

안한 CGLS 방식과 Tikhonov 안정화 방식(LMMSE)의 계산량을 신호검출에 소요되는 실행시간으로 비교하여 그림 5에 도시하였다. 20dB 이하의 SNR에서는 실행이 조기에 중지되는 빈도수가 증가하여 제안한 CGLS의 계산량이 크게 감소한다. 결론적으로 제안된 CGLS 방식은 크게 감소한 계산량으로 최적의 LMMSE에 근접한 BER 성능을 얻을 수 있다. 양호한 SNR 환경에서는 CGLS의 기준치 ϵ 이 안정화에 영향을 미칠 수 있으며 이에 대한 추가적인 연구가 요구된다.

References

- [1] A. Björck, *Numerical Methods for Least Squares Problems*, Philadelphia: SIAM, 1996.
- [2] P. C. Hansen, *Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems - Numerical Aspects of Linear Inversion*, Philadelphia: SIAM, 1998.
- [3] D. Lim, "Performance improvement of low complexity LS channel estimation for OFDM in fast time varying channels," *J. IEEK*, vol. 49-TC, no. 8, pp. 25-32, Aug. 2012.
- [4] D. S. Watkins, *Fundamentals of Matrix Computations*, 3rd Ed., New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2010.
- [5] T. Hrycak, S. Das, and G. Matz, "Low complexity equalization for doubly selective channels modeled by a basis expansion," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 58, no. 11, pp. 5706-5719, Nov. 2010.