DBpia

논문 16-41-08-11 The Journal of Korean Institute of Communications and Information Sciences '16-08 Vol.41 No.08
http://dx.doi.org/10.7840/kics.2016.41.8.917

희소성 스펙트럼 피팅 도래각 추정 알고리즘의 제한조건에 포함된 상수 결정법

조 윤 성◆, 백 지 웅*, 이 준 호°

Determination of Parameter Value in Constraint of Sparse Spectrum Fitting DOA Estimation Algorithm

Yunseung Cho◆, Ji-Woong Paik*, Joon-Ho Lee°

요 약

전통적 도래각 추정기법[1]과 별개로 2004년 이후 입사신호의 입사방향은 공간 영역에서 희소도(sparsity)를 가짐을 이용한 도래각 추정 기법이 제안되었다. 압축센싱 기반 도래각 추정 알고리즘인 SpSF 알고리즘에 이용되는 비용함수는 비선형 다변수 최적화문제이다. 적절한 변환을 통하여 해당 비용함수는 볼록 최적화 (convex optimization) 문제로 표현할 수 있다. 볼록 최적화 문제는 제한조건이 있는 최적화 문제이며 제한조건에 포함되는 상수를 지정해야 한다. 본 연구에서는 제한조건에 포함되는 사용자지정 상수값 결정법을 제안한다. 잡음의 실수부와 허수부가 서로 독립인 평균 0인 정규분포를 따름을 이용하여 제한조건에 포함되는 행렬의 Frobenius norm 의 평균을 유도할 수 있으며, 이를 이용하여 제한조건에 포함되는 상수를 결정할 수 있다. 제안된 방법에 의해 결정된 상수를 이용한 SpSF 알고리즘이 실제로 동작함을 보였다.

Key Words : SpSF, convex optimization, constraint, noise covariance, frobenius norm

ABSTRACT

SpSF algorithm is direction-of-arrival estimation algorithm based on sparse representation of incident signlas. Cost function to be optimized for DOA estimation is multi-dimensional nonlinear function, which is hard to handle for optimization. After some manipulation, the problem can be cast into convex optimiztion problem. Convex optimization problem tuns out to be constrained optimization problem, where the parameter in the constraint has to be determined. The solution of the convex optimization problem is dependent on the specific parameter value in the constraint. In this paper, we propose a rule-of-thumb for determining the parameter value in the constraint. Based on the fact that the noise in the array elements is complex Gaussian distributed with zero mean, the average of the Frobenius norm of the matrix in the constraint can be rigorously derived. The parameter in the constrint is set to be two times the average of the Frobenius norm of the matrix in the constraint. It is shown that the SpSF algorithm actually works with the parameter value set by the method proposed in this paper.

Ⅰ. 서 론

신호의 희소도를 이용함으로써 제한이 되었던 안테나 소자 수 이상의 신호가 입사하는 경우 도래각 추정이 불가능한 약점을 기술적으로 극복할 수 있다. 공분산 행렬을 fitting하는 방식으로는 SpSF[2]가 있다.

본 논문에서는 그 중 하나인 신호의 공분산 행렬을 fitting 하는 SpSF[1] 알고리즘의 상수값 결정법을 다룬다. 기존의 연구에서 SpSF 알고리즘은 제한조건이 없는 최적화 문제로 정의되었다. 본 연구에서 SpSF 알고리즘을 제한조건이 있는 최적화 문제로 정의하고, 제한조건에 포함되는 상수 값을 잡음 공분산 행렬의 통계적으로 특성을 이용하여 결정하는 방법을 제시하고자 한다.

◆ First Author : Sejong University Dept. Information & Communication Engineering, choyszzang1@naver.com, 학생회원
° Corresponding Author : Sejong University Dept. Information & Communication Engineering, joonhlee@sejong.ac.kr 정회원
* Sejong University Dept. Information & Communication Engineering, woongEda@sju.ac.kr
논문번호 : KICS2016-02-039, Received February 29, 2016; Revised June 30, 2016; Accepted July 14, 2016

www.dbpia.co.kr

Ⅱ. 공분산 행렬의 fitting을 통한 도래각 추정

M개의 안테나 배열에서 수신한 데이터 $\boldsymbol{y}(t)$는 다음과 같다.

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{A}\mathbf{s}(t)+\mathbf{n}(t), \qquad t\in\{t_1,\cdots,t_T\}. \tag{1}$$

$$\mathbf{y}(t)=\left[y_1(t),\cdots,y_M(t)\right]^T \tag{2}$$

$$\mathbf{s}(t)=\left[s_1(t),\cdots,s_{N_\theta}(t)\right]^T \tag{3}$$

$$\mathbf{n}(t)=\left[n_1(t),\cdots,n_M(t)\right]^T \tag{4}$$

잡음을 의미하는 $n_1(t),\cdots,n_M(t)$는 실수부와 허수부의 분산이 각각 σ^2이고 평균이 0인 Gaussian 분포를 따르는 복소랜덤변수라고 가정한다. 따라서 $\mathrm{n}(t)$는 복소 정규분포 랜덤 벡터이다. 위 식에서 M은 안테나의 숫자를 의미하고 N_θ는 탐색하는 θ 수이다. 이를 이용해 $\boldsymbol{A}$를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\mathbf{A}=\left[\mathbf{a}(\theta_1),\cdots,\mathbf{a}(\theta_{N_\theta})\right] \tag{5}$$

$$\mathbf{a}(\theta_n)=\left[a_1(\theta_n),\cdots,a_M(\theta_n)\right]^T \tag{6}$$

$N_\theta \gg M$이기 때문에 식 (1)는 비결정계 시스템(underdetermined system)이다. 입사신호의 입사 개수를 d라고 정의하면, $N_\theta \gg d$이다. 식 (1)를 압축센싱(Compressive Sensing)기법을 통해서 희소(sparse)한 $\boldsymbol{S}$를 구하고 0이 아닌 값이 위치한 색인(index)를 통해 도래각을 추정할 수 있다.

공분산 행렬을 fitting하여 도래각을 추정하는 방법을 지금부터 제시하고자 한다. 공분산 행렬은 다음과 같다[1].

$$\mathbf{R}=E\left[\mathbf{y}\mathbf{y}^H\right]=\mathbf{A}\mathbf{R}_\mathbf{s}\mathbf{A}^H+2\sigma^2\mathbf{I}_M \tag{7}$$

위 식 (7)은 앙상블 평균(Ensemble average)으로 구한 공분산 행렬이다. 실제로 앙상블 평균을 구하는 것은 불가능하기 때문에 시간 평균(Time average)로 구한 공분산 행렬로 대체한다[1].

$$\hat{\mathbf{R}}=\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}y(t_i)\,y^H(t_i)\approx\mathbf{A}\hat{\mathbf{R}}_\mathbf{s}\mathbf{A}^H+\mathbf{E} \tag{8}$$

샘플 개수(T)를 무한하게 취할 수 있으면 시간 평균으로 구한 공분한 행렬과 앙상블 평균으로 구한 공분산 행렬이 같아진다. 위 식에서 $\hat{\mathbf{R}}_\mathbf{s}$는 시간 평균으로 구한 신호의 공분산 행렬이다.

$$\begin{aligned}&\min\left\|\mathbf{R}_s\right\|_1\\&\text{subject to }\left\|\mathbf{R}-\mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H\right\|_f^2\le\beta^2\ \&\ \mathrm{diag}(\mathbf{R}_s)\ge 0\end{aligned} \tag{9}$$

위의 최적화 문제는 β의 값에 따라 신호 공분산 행렬 $\mathbf{R}_s$가 바뀌므로 β의 선택이 중요하다. 앞서 보인 식 (8)을 통해 다음과 같은 관계가 성립함을 알 수 있다.

$$\left\|\mathbf{R}-\mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H\right\|_f^2=\left\|\mathbf{E}\right\|_f^2 \tag{10}$$

위의 관계식을 통해 β의 값을 정할 시, 잡음 공분산의 랜덤변수를 최대한 수용할 수 있게 설정함으로써 가장 sparse한 $\mathbf{R}_s$를 구해 도래각을 추정한다. 잡음 공분산의 랜덤변수를 최대한 수용할 수 있는 값을 구하기 위해 $\left\|\mathbf{E}\right\|_f^2$의 평균과 표준편차를 이용한다. $\left\|\mathbf{E}\right\|_f^2$의 평균은 다음과 같이 유도 가능하다. $\left\|\mathbf{E}\right\|_f^2$을 전개하면 다음과 같다.

$$\left\|\mathbf{E}\right\|_f^2=\sum_{i=1}^{M}\left(\mathbf{E}_{ii}\right)^2+\sum_{i=1,i\neq j}^{M}\sum_{j=1}^{M}\left|\mathbf{E}_{ij}\right|^2 \tag{11}$$

식 (11)에서 대각선 성분의 제곱인 $(\mathbf{E}_{ii})^2$을 전개하면 다음과 같다.

$$(\mathbf{E}_{ii})^2=\frac{1}{T^2}\left[\sum_{l=1}^{T}\left|n_i(t_l)\right|^4+\sum_{l\neq l',l'=1}^{T}\sum_{l=1}^{T}\left|n_i(t_l)\right|^2\left|n_i(t_{l'})\right|^2\right] \qquad l,l'=1\cdots T \tag{12}$$

위 식 (12)의 연산에서 자기 자신과의 곱을 나타내는 $E\left|n_i(t_l)\right|^4$와 나머지 연산되는 부분들을 나타내는

www.dbpia.co.kr

$E\left|n_i(t_l)\right|^2\left|n_i(t_{l'})\right|^2$ 은 다음과 같다.

$$E\left[\left|n_i(t_l)\right|^4\right]=8\sigma^4 \tag{13}$$

$$\begin{aligned}E\left[\left|n_i(t_l)\right|^2\left|n_i(t_{l'})\right|^2\right]&=E\left[\left|n_i(t_l)\right|^2\right]E\left[\left|n_i(t_{l'})\right|^2\right]\\&=2\sigma^2\cdot 2\sigma^2=4\sigma^4\end{aligned} \tag{14}$$

식 (13)과 (14)를 통해 $E\left[(\mathbf{E}_{ii})^2\right]$을 구할 수 있다.

$$E\left[(\mathbf{E}_{ii})^2\right]=\frac{1}{T^2}\left[T8\sigma^4+4\left(T^2-T\right)\sigma^4\right]=\frac{4\sigma^4}{T^2}\left[T^2+T\right] \tag{15}$$

식 (11)의 $\left|\mathbf{E}_{ij}\right|^2$ 을 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\left|\mathbf{E}_{ij}\right|^2&=\mathbf{E}_{ij}\mathbf{E}_{ij}^*\\&=\frac{1}{T^2}\left[\sum_{l=1}^{T}\left|n_i(t_l)\right|^2\left|n_j(t_l)\right|^2+\sum_{l\neq l',l'=1}^{T}\sum_{l=1}^{T}n_i(t_l)n_j^*(t_l)n_i^*(t_{l'})n_j(t_{l'})\right]\end{aligned} \tag{16}$$

식 (16)을 통해 $E\left[\left|\mathbf{E}_{ij}\right|^2\right]$을 구할 수 있다.

$$E\left[\left|\mathbf{E}_{ij}\right|^2\right]=\frac{1}{T^2}\left(T4\sigma^4\right)=\frac{4\sigma^4}{T} \tag{17}$$

식 (15)와 식(17)을 이용하여 $E\left(\left\|\mathbf{E}\right\|_f^2\right)$을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}E\left(\left\|\mathbf{E}\right\|_f^2\right)&=M\times E\left[(\mathbf{E}_{ii})^2\right]+\left(M^2-M\right)\times E\left[\left|\mathbf{E}_{ij}\right|^2\right]\\&=4\sigma^4\left[\left(\frac{T^2+T}{T^2}\right)M+\frac{M^2-M}{T}\right]\end{aligned} \tag{18}$$

$\left\|\mathbf{E}\right\|_f^2$ 의 표준편차 $\sigma_{\mathbf{E}}$ 인 경우 Monte-Carlo를 통해 구한다. 위와 같이 유도해 얻은 $\left\|\mathbf{E}\right\|_f^2$ 의 평균과 표준편차 $\sigma_{\mathbf{E}}$ 를 이용하여 잡음공분산의 랜덤변수를 최대한 수용할 수 있게 β^2 을 $E\left(\left\|\mathbf{E}\right\|_f^2\right)+5\sigma_{\mathbf{E}}$ 로 설정하였다. 이와 같이 최적화에 있어서 제한을 두는 방법을 통해 도래각 추정이 가능하다.

Ⅲ. 시뮬레이션 및 결과 분석

그림 1 은 시뮬레이션에서 사용한 선형 안테나 배열 구조를 나타낸 것이다. 선형 안테나 배열이기에 간격은 반 파장으로 동일하고 파장은 1미터로 설정하였다. 샘플 수 는 1000이고 실제 신호 입사 방위각은 -45도, 45도이며 방위각 탐색 범위는 -90도부터 90도까지 그리고 탐색 간격은 1도로 설정하였다. 그리고 아래 그림에서는 $E\left(\left\|\mathbf{E}\right\|_f^2\right)$을 표현의 간편성을 위해 A로 치환하였다.

위 그림 2는 신호대잡음비가 20dB일 때, β^2 을 $E\left(\left\|\mathbf{E}\right\|_f^2\right)+5\sigma_{\mathbf{E}}$ 로 설정하고 도래각 추정 시뮬레이션을 수행한 결과 그래프이다. 두 신호에 대해 도래각 추정이 제대로 이루어졌음을 해당 결과를 통해 알 수 있다.

위 그림 3은 신호대잡음비가 -5dB부터 10dB로 바뀜에 따라 상관이 있는 두 신호가 입사할 때, 각각 β^2 을 $E\left(\left\|\mathbf{E}\right\|_f^2\right)+5\sigma_{\mathbf{E}}$ 로 설정하여 도래각 추정결과로 얻은 평균 제곱근 오차와 최대우도 함수(ML)의 도래각 추정 결과로 얻은 평균 제곱근 오차를 나타낸다. 최대우도 기법에 의한 도래각은 다음과 같이 주어진다.

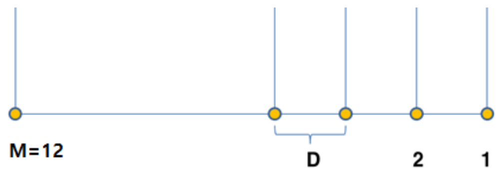

그림 1. 선형 안테나 배열구조
Fig. 1. Structure of linear array antennas

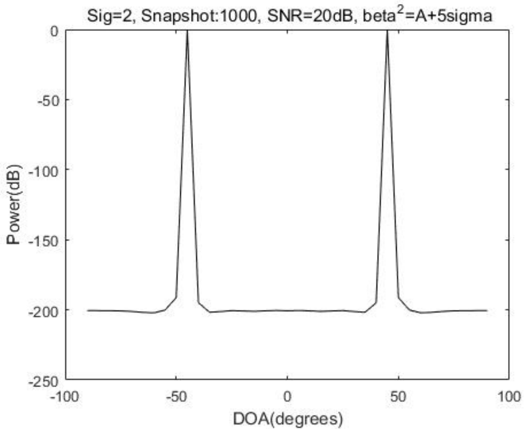

그림 2. 상관있는 두 신호 입사 시, SpSF 스펙트럼
Fig. 2. SpSF spectrum (two correlated signals)

www.dbpia.co.kr

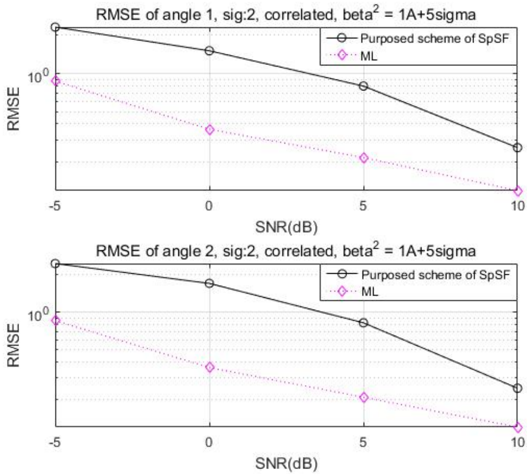

그림 3. 상관있는 두 신호 입사 시, SpSF, ML RMSE
Fig. 3. SpSF, ML RMSE (two correlated signals)

$$\left[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2\right]=\arg\max_{\theta_1,\theta_2}\mathrm{tr}\left(\mathbf{P}_{\mathbf{A}(\theta_1,\theta_2)}\mathbf{R}\right) \tag{19}$$

β^2을 $E\left(\|\mathbf{E}\|_f^2\right)+5\sigma_{\mathbf{E}}$로 설정했을 경우 신호대잡음비의 변화에 따라 RMSE값이 감소함을 볼 수 있다.

Ⅳ. 결 론

SpSF 알고리즘은 도래각의 sparse 표현에 기반반 볼록 최적화 기법에 의해 도래각을 추정한다. 본 연구에서는 기존에 제한조건이 없는 최적화 문제로 표현된 SpSF 알고리즘을 제한조건이 있는 최적화 문제로 표현하고, 제한 조건 명시에 필요한 상수값 결정법을 제시하였다. 배열 안테나에 추가되는 잡음을 복소 정규분포를 갖는 랜덤변수로 모델링 후, 잡음 공분산 행렬의 Frobenius 놈(norm)의 제곱의 평균을 유도하였으며, 이 값을 이용하여 제한조건에 포함된 상수를 결정하였다. 제안된 방법에 의해 결정된 상수 값을 이용하여 SpSF 알고리즘이 잘 동작함을 보였다.

References

[1] J. H. Choi, J. W. Choi, and S. Kim, "The study of DOA estimation in frequency domain in automotive radar system," *J. KICS*, vol. 41, no. 1, pp. 12-22, 2016.

[2] J. Zheng and M. Kaveh, "Sparse spatial spectral estimation: A covariance fitting algorithm, performance and regularization," *IEEE Trans. Sign. Process.*, vol. 61, no. 11, pp. 2767-2777, Apr. 2013.

www.dbpia.co.kr