

최대 상호코렌트로피 알고리즘을 위한 스텝사이즈 정규화

김 남 용*

Step Size Normalization for Maximum Cross-Correntropy Algorithms

Namyong Kim*

요 약

무작위 발생된 심볼 집합과 최대 상호 코렌트로피 (maximum cross-correntropy) 로 설계된 MCC 알고리즘은 최소자승평균 (MSE) 기반 알고리즘과 달리, 충격성 잡음 하에서 최적 가중치가 동요 없이 안정을 유지하며 그 요인이 오차 전력에 따라 입력의 세기를 조절하는 입력 크기 조정기 (input magnitude controller, IMC)에 있음이 밝혀졌다. 이 논문에서는 스텝사이즈를 정규화한 알고리즘 (normalized MCC, NMCC)를 제안하였으며 여기서 IMC 통과된 신호 전력은 1-pole 저역 통과 필터로 반복적 추정한다. 두 가지 다중경로 채널 모델과 충격성 잡음 환경에서 시행된 시뮬레이션 결과, 정규화된 NMCC 알고리즘은 MCC 알고리즘에 비해 정상상태 MSE에서 1 dB 정도의 성능 향상을, 수렴 속도에서도 500 샘플 정도 빠른 성능을 나타냈다.

Key Words : Cross-correntropy, Random symbols, Impulsive noise, Optimum weight, Magnitude controlled, Equalizer.

ABSTRACT

The maximum cross-correntropy (MCC) algorithm with a set of random symbols keeps its optimum weights undisturbed from impulsive noise unlike MSE-based algorithms and its main factor has been known to be the input magnitude controller (IMC) that adjusts the input intensity according to error power. In this paper, a normalization of the step size of the MCC algorithm by the power of IMC output is proposed. The IMC output power is tracked recursively through a single-pole low-pass filter. In the simulation under impulsive noise with two different multipath channels, the steady state MSE and convergence speed of the proposed algorithm is found to be enhanced by about 1 dB and 500 samples, respectively, compared to the conventional MCC algorithm.

I. 서 론

최소자승오차 (mean squared error, MSE) 기반의 최소평균자승 (least mean square, LMS) 알고리즘은 우수한 성능으로 적응 신호처리에 널리 사용되고 있다^[1]. 그러나 고정된 스텝사이즈를 가지고 있어 입력의 진폭 또는 전력에 대한 통계적 정보를 활용할 수 없다^[2]. 한편 정규화된 LMS (normalized least mean

square, NLMS)는 스텝사이즈가 입력 벡터의 자체 내적의 역에 비례하도록 설계되어 보다 향상된 성능을 가짐이 입증되었다^[3,4].

이러한 MSE 기반의 성능기준과 달리, 상호 코렌트로피 (cross-correntropy, CC) 성능기준은 서로 다른 두 확률밀도의 내적으로 표현되며 이 때 확률밀도함수는 가우시안 커널을 가진 커널 밀도 추정법 (kernel density estimation method)에 의해 만들어진다^[5,6].

* 2015년도 강원대학교 대학회계 학술연구조성비로 연구하였음(관리번호-201510027)

* This study is supported by 2015 Research Grant from Kangwon National University (No. 201510027)

• First Author : Kangwon National Univ., namyong@kangwon.ac.kr, 종신회원

논문번호 : KICS2016-06-123, Received June 12, 2016; Revised August 12, 2016; Accepted August 16, 2016

CC 성능기준을 적용하며 블라인드 등화 (blind equalization)에 응용되도록 수신단에서 무작위로 발생시킨 송신심볼 집합을 접목하여 개발된 최대 CC (maximum CC, MCC) 알고리즘은 특히 충격성 잡음 환경에서 탁월한 성능을 보이는 것으로 알려져 있다^[7].

한편 MCC의 계산량 문제는 기울기 계산에 반복적 추정법을 적용하여 해결되었다^[8]. 또한 MCC의 충격성 잡음 내성과 관련된 연구를 통해 MCC의 최적 가중치가 충격성 잡음하에서도 동요없이 안정을 유지하는 요인이 입력 크기 조정 (input magnitude controller, IMC) 에 있음이 밝혀졌다^[9]

이 논문에서는 NLMS 알고리즘의 접근방식을 적용하여 IMC 통과 신호의 전력을 사용하여 정규화된 스텝 사이즈를 제안하고자 한다. 그리고 여러 다른 충격성 잡음 발생 환경에 대해 정규화된 NMCC (normalized MCC) 알고리즘의 성능을 비교 분석하였다.

II. MSE 성능기준과 NLMS 알고리즘

다중경로 채널 $H(z) = \sum h_i z^{-i}$ 을 통과한 심볼점 d_k 는 잡음 n_k 가 더해져서 다음과 같이 수신단 적응 등화에 입력 x_k 로 된다.

$$x_k = \sum h_i d_{k-i} + n_k \quad (1)$$

입력 $\mathbf{X}_k = [x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-L+1}]^T$ 와 가중치로 $\mathbf{W}_k = [w_{0,k}, w_{1,k}, \dots, w_{L-1,k}]^T$ 를 지닌 TDL (tapped delay line) 구조에 대해 출력 y_k 는 $y_k = \mathbf{W}_k^T \mathbf{X}_k$ 로 표현되며 이 때, 전송 심볼점 d_k 와 차이를 오차 e_k 로 정의 할 때 $e_k = d_k - y_k = d_k - \mathbf{W}_k^T \mathbf{X}_k$ 가 된다. MSE 성능 기준 P_{MSE} 는 이 오차의 평균 전력으로 다음과 같이 정의된다^[3].

$$P_{MSE} = E[e_k^2] \quad (2)$$

이 MSE 성능기준을 기반으로 설계된 LMS 알고리즘은 순시 오차 전력인 e_k^2 를 사용한다. 기울기 $\partial e_k^2 / \partial \mathbf{W} = 2e_k \frac{\partial (d_k - y_k)}{\partial \mathbf{W}}$ 와 스텝 사이즈 μ 로 표현되는 LMS 알고리즘은 다음과 같다.

$$\mathbf{W}_{k+1} = \mathbf{W}_k - \mu \cdot \frac{\partial e_k^2}{\partial \mathbf{W}} = \mathbf{W}_k + 2\mu \cdot e_k \mathbf{X}_k \quad (3)$$

기울기가 $\partial e_k^2 / \partial \mathbf{W} = 0$ 일 때 최적 가중치 \mathbf{W}_{LMS}^o 를 다음과 같이 얻게 된다.

$$\mathbf{W}_{LMS}^o = \frac{d_k \mathbf{X}_k}{\mathbf{X}_k^T \mathbf{X}_k} \quad (4)$$

$E[e_k^2]$ 에 대해 구해진 최적 가중치를 \mathbf{W}_{MSE}^o 라고 하면 식 (4)의 통계적 평균 $E[\mathbf{W}_{LMS}^o]$ 는 \mathbf{W}_{MSE}^o 와 같으며 가중치 갱신 식은 다음과 같이 표현된다^[3].

$$\mathbf{W}_{k+1} = \mathbf{W}_k - \mu \cdot \frac{\partial E[e_k^2]}{\partial \mathbf{W}} = \mathbf{W}_k + 2\mu \cdot E[e_k \mathbf{X}_k] \quad (5)$$

한편, 스텝 사이즈 μ 를 입력 벡터의 자체 내적의 역에 비례하도록 설계된 NLMS 알고리즘은 보다 향상된 성능을 가지며 다음과 같은 스텝 사이즈로 표현된다^[4].

$$\mu_{NLMS} = \frac{1}{\mathbf{X}_k^T \mathbf{X}_k} = \frac{1}{\|\mathbf{X}_k\|^2} \quad (6)$$

식 (6)의 분모는 $\sum_{m=0}^{L-1} x_{k-m}^2$ 으로 표현되므로 새로운 상수 μ^\wedge 를 도입하여 NLMS 알고리즘을 표현하면 다음과 같다.

$$\mathbf{W}_{k+1} = \mathbf{W}_k + \mu_{NLMS} \cdot e_k \mathbf{X}_k \quad (7)$$

여기서

$$\mu_{NLMS} = \frac{\mu^\wedge}{\|\mathbf{X}_k\|^2} = \frac{\mu^\wedge}{\sum_{m=0}^{L-1} x_{k-m}^2} \quad (8)$$

III. MCC 성능기준과 MCI

상호 코렐트로피에 기반한 MCC 알고리즘은 충격성 잡음 환경에서 우수한 등화 성능을 보인다^[7]. 동일 확률을 갖는 M 개의 심볼점에 대해 $A_m = 2m - 1 - M$, $m = 1, 2, \dots, M$ 이 송신된다고 가정할 때, 송신 심볼 집합 $\{A_m\}$ 의 확률분포와 같은 분포가 되도록 수신단에

서 무작위 생성한 N개 심볼 d_i 를 활용하며 확률분포는 다음과 같이 표현될 수 있다^[10].

$$f_D(d) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(d-d_i)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (9)$$

상호 코렌트로피는 서로 다른 두 확률분포 $f_Y(y)$ 와 $f_D(d)$ 의 내적으로 정의되므로

$$\int f_D(\alpha)f_Y(\alpha)d\alpha = \frac{1}{N^2} \sum_{i=k-N+1}^k \sum_{j=1}^N \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(d_j-y_i)^2}{4\sigma^2}\right] \quad (10)$$

여기서 $d_j - y_i$ 는 오차 $e_{j,i}$ 로 정의되며 상호 코렌트로피의 기울기는 다음과 같다.

$$\frac{\partial \int f_D(\xi)f_Y(\xi)d\xi}{\partial \mathbf{W}} = \frac{1}{2N^2\sigma^3\sqrt{\pi}} \sum_{i=k-N+1}^k \sum_{j=1}^N e_{j,i} \cdot \exp\left(\frac{-e_{j,i}^2}{4\sigma^2}\right) \mathbf{X}_i \quad (11)$$

여기서 $\exp\left(\frac{-e_{j,k}^2}{4\sigma^2}\right) \mathbf{X}_k$ 는 오차 전력에 따라 입력의 세기를 조절하는 IMC의 출력으로 다음과 같이 정의되며 그림 1과 같이 표현된다.

$$\mathbf{X}_{j,k}^{MC} = \exp\left(\frac{-e_{j,k}^2}{4\sigma^2}\right) \mathbf{X}_k \quad (12)$$

식(12)의 IMC출력 $\mathbf{X}_{j,k}^{MC}$ 와 식(11)의 기울기로 MCC를 표현하면 다음 (13)과 같다^[9].

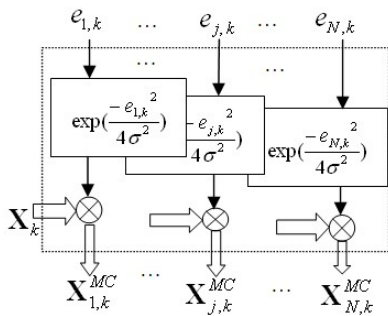


Fig. 1. Input magnitude controller

$$\mathbf{W}_{k+1} = \mathbf{W}_k + \frac{\mu}{2N^2\sigma^3\sqrt{\pi}} \sum_{i=k-N+1}^k \sum_{j=1}^N e_{j,i} \cdot \mathbf{X}_{j,i}^{MC} \quad (13)$$

식(11)의 기울기에 샘플 오차 $e_{j,i}$ 를 $d_j - y_i$ 로 대체하고 0으로 만들 때 구해지는

최적 가중치 \mathbf{W}_{MCC}^o 는 \mathbf{W}_{MSE}^o 과 같다^[9].

$$E[\mathbf{W}_{MCC}^o] = E[\mathbf{W}_{LMS}^o] = \mathbf{W}_{MSE}^o \quad (14)$$

충격성 잡음 같은 큰 오차 발생 상황에서 식 (12)의 IMC의 출력 $\mathbf{X}_{j,k}^{MC}$ 는 MCC 알고리즘을 안정되게 하는 역할을 하는 것으로 알려져 있다^[9]. 이것을 이용하여 다음 절에서는 스텝사이즈를 정규화하는 NMCC 알고리즘을 제안하고자 한다.

IV. Normalized MCC 알고리즘

MSE 기반 가중치 갱신식 (5)의 통계적 평균 $E[\cdot]$ 는 MCC의 갱신식 (13)의 샘플평균 $\frac{1}{N} \sum_{i=k-N+1}^k$ 와 같은 역할을 하므로 MSE 기반 가중치 갱신식의 입력에 상응하는 MCC 알고리즘의 입력은 $\sum_{j=1}^N \mathbf{X}_{j,k}^{MC}$ 임을 알 수 있다. 따라서 이 장에서는 $\sum_{j=1}^N \mathbf{X}_{j,k}^{MC}$ 의 평균전력으로 MCC 알고리즘의 스텝사이즈를 정규화하는 것을 제안한다. MCC 알고리즘에서 벡터 식 (12)의 요소 $x_{j,k}^{MC} = \exp\left(\frac{-e_{j,k}^2}{4\sigma^2}\right) x_k$ 를 활용하면 $\sum_{j=1}^N \mathbf{X}_{j,k}^{MC}$ 의 평균전력은 $\frac{1}{N} \sum_{i=k-N+1}^k \sum_{j=1}^N (x_{j,k}^{MC})^2$ 가 된다. 따라서 정규화된 MCC 알고리즘은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\mathbf{W}_{k+1} = \mathbf{W}_k + \frac{\mu}{\frac{1}{N} \sum_{i=k-N+1}^k \sum_{j=1}^N (x_{j,k}^{MC})^2 \cdot 2N^2\sigma^3\sqrt{\pi}} \sum_{i=k-N+1}^k \sum_{j=1}^N e_{j,i} \cdot \mathbf{X}_{j,i}^{MC} \quad (15)$$

큰 충격 잡음이 N개의 샘플 중에 발생한 경우, N이 충분히 크지 않는 한, 샘플평균 $\frac{1}{N} \sum_{i=k-N+1}^k$ 은 충격성 잡음을 경감시키기에 효과적이지 못하다. 따라서 정규화 과정 중 샘플평균 $\frac{1}{N} \sum_{i=k-N+1}^k$ 대신 다음과 같이 평균전력 $P(k)$ 를 반복적으로 추정해 가도록 한다.

$$P(k) = \beta \cdot P(k-1) + (1-\beta) \cdot \sum_{j=1}^N (x_{j,k}^{MC})^2 \quad (16)$$

여기서 식(16)은 입력 $\sum_{j=1}^N (x_{j,k}^{MC})^2$ 와 출력 $P(k)$ 를 갖는 1-pole 저역통과 필터 $L(z)$ 로 볼 수 있다.

$$L(z) = (1-\beta) \frac{z}{z-\beta} \quad (17)$$

여기서 필터 $L(z)$ 의 파라미터 β ($0 < \beta < 1$) 은 이상수를 결정한다. 결국, 정규화된 NMCC 알고리즘은 식(16)과 상수 μ_{NMCC} 와 함께 다음과 같다.

$$\mathbf{W}_{k+1} = \mathbf{W}_k + \frac{\mu_{NMCC}}{P(k)} \sum_{i=k-N+1}^k \sum_{j=1}^N e_{j,i} \cdot \mathbf{X}_{j,i}^{MC} \quad (18)$$

한편 문헌 [3]에 나타나 있듯이 NLMS 가 가중치 벡터의 변화량 $\|\mathbf{W}_{k+1} - \mathbf{W}_k\|^2$ 을 최소화하도록 개발되었음을 고려하여, NMCC와 MCC의 가중치 벡터 변화량이 얼마나 충격성 잡음에 민감한가를 서로 비교하고자 한다. NMCC의 가중치 벡터 변화량 (Variation of weight, VW) VW_{NMCC} 와 MCC의 VW_{MCC} 는 다음과 같다.

$$VW_{NMCC} = \left(\frac{\mu_{NMCC}}{P(k)} \right)^2 \left\| \sum_{i=k-N+1}^k \sum_{j=1}^N e_{j,i} \mathbf{X}_{j,i}^{MC} \right\|^2 \quad (19)$$

$$= \mu_{NMCC}^2 \left\| \sum_{i=k-N+1}^k \sum_{j=1}^N e_{j,i} \frac{\mathbf{X}_{j,i}^{MC}}{P(k)} \right\|^2$$

$$VW_{MCC} = \mu_{NMCC}^2 \left\| \sum_{i=k-N+1}^k \sum_{j=1}^N e_{j,i} \mathbf{X}_{j,i}^{MC} \right\|^2 \quad (20)$$

식 (19)과 (20)를 비교해보면 VW_{NMCC} 에서 입력 크기 조정된 입력 $\mathbf{X}_{j,i}^{MC}$ 이 평균전력 $P(k)$ 로 정규화되어 있으나 VW_{MCC} 는 입력이 그대로 적용되고 있다. 이것은 강한 충격성 잡음이 유입될 때, VW_{MCC} 는 동요를 일으킬 수 있는 반면, VW_{NMCC} 는 흔들림이 거의 없는 작은 분산치를 가짐을 의미한다. 따라서 가중치 벡터의 변화량 $\|\mathbf{W}_{k+1} - \mathbf{W}_k\|^2$ 의 최소화에 NMCC가

MCC보다 더 우수한 특성을 나타냄을 알 수 있다.

V. 결과 및 토론

송신단 심볼 $\{d_1 = -3, d_2 = -1, d_3 = 1, d_4 = 3\}$ 에서 두 가지 다중경로 채널인

$$\text{CH1: } H_1(z) = 0.26 + 0.93z^{-1} + 0.26z^{-2} \text{ 와}$$

$$\text{CH2: } H_2(z) = 0.304 + 0.903z^{-1} + 0.304z^{-2} \text{ 을 사용하}$$

였다 [11]. 충격성 잡음 n_k 는 배경 잡음으로 분산 σ_{GN}^2 을 갖는 가우시안 백색 잡음과 분산 σ_{GN}^2 로 포아송 과정에 따라 발생하는 발생률 ε 의 충격 잡음이 함께 더해지며 그 분포 $f_N(n_k)$ 는 다음과 같다 [5].

$$f_N(n_k) = \frac{1-\varepsilon}{\sigma_{GN}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{n_k^2}{2\sigma_{GN}^2}\right] + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi(\sigma_{GN}^2 + \sigma_{IN}^2)}} \exp\left[-\frac{n_k^2}{2(\sigma_{GN}^2 + \sigma_{IN}^2)}\right] \quad (21)$$

적용 등화기는 11 개 탭 ($L=11$)을 가진 TDL 구조이고 MCC의 N , σ , β 와 μ_{NMCC} 는 각각 24, 0.5, 0.95와 0.007로 하였다. 그리고 초기 전력 $\sum_{j=1}^N (x_{j,0}^{MC})^2$ 는 1로 하였다. 그림 2에 충격성 잡음 n_k 의 한 예를 나타냈으며 그림 3에 두 채널 CH1과 CH2에 대한 MSE 수렴 성능을 나타냈다. CH1에 대한 MCC알고리즘인 MCC-CH1을 초록색으로, CH1에 대한 NMCC알고리즘인 NMCC-CH1을 적색으로 나

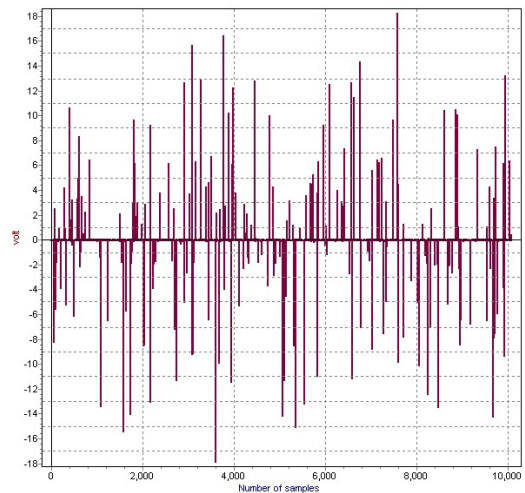


Fig. 2. Impulsive noise sample with $\varepsilon=0.03$.

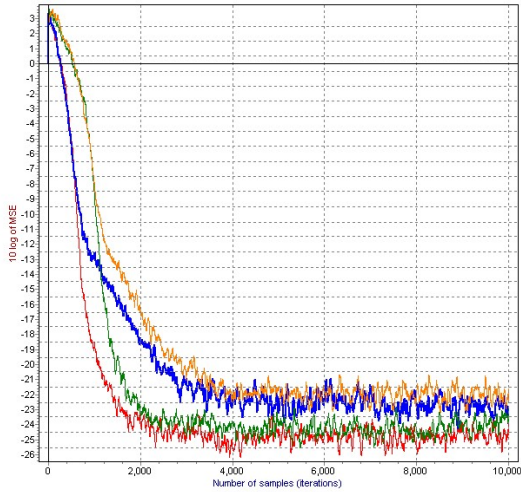


Fig. 3. MSE learning curves for the impulsive noise (green: MCC-CH1, red: NMCC-CH1, orange: MCC-CH2, blue: NMCC-CH2).

타냈고, CH2의 경우, MCC-CH2를 주황색으로, NMCC-CH2를 청색으로 나타냈다.

그림 2의 충격성 잡음하에서 채널 모델 CH1에 경우, MCC 알고리즘은 -24 dB에 머무르고 있는 반면 제안한 NMCC 알고리즘은 -25 dB까지 이르면서 1 dB 정도의 정상상태 MSE 성능 향상을 보였고 수렴 속도에서도 500 샘플 정도 빠른 성능을 나타냈다. 채널 모델 CH2에서도, MCC 알고리즘과 제안한 NMCC 알고리즘은 정상상태 MSE 값이 각각 -22 dB와 -23 dB를 보이며 1 dB 정도의 향상을 보였고, 수

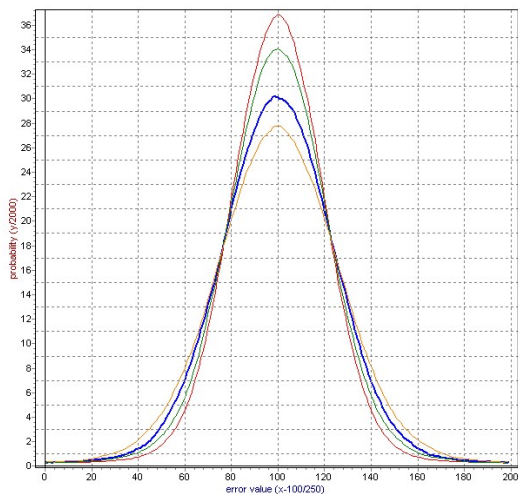


Fig. 4. Error distribution for the impulsive noise (green: MCC-CH1, red: NMCC-CH1, orange: MCC-CH2, blue: NMCC-CH2).

렴 속도에서도 빠른 성능을 나타냈다. 무작위 크기로 발생하는 충격성 잡음하에서는 BER (bit error rate) 성능 평가가 현실적이지 못하므로 오차 확률 분포 (error probability density) 로 비교한 성능 평가가 그림 4에 나타나있다. 두 가지 채널 각각에 대해 MCC 알고리즘이 만든 오차 샘플들보다 NMCC 알고리즘이 만든 오차 샘플들은 0에 더 집중되어 분포하며 그 차이가 큰 것을 확인할 수 있다.

VI. 결 론

상호 코렐트로피를 성능기준으로 하는 MCC 알고리즘은 MSE 기반 알고리즘과 달리, 충격성 잡음하에서 최적 가중치가 동요 없이 안정을 유지하며 그 요인이 IMC에 있음이 밝혀졌다. 이 논문에서는 MCC 알고리즘의 고정된 스텝사이즈 대신, IMC를 통과한 신호의 전력을 사용하여 정규화된 스텝사이즈를 제안하였다. 두 가지 다중경로 채널 모델과 충격성 잡음 환경에서 시뮬레이션한 결과 정규화된 NMCC 알고리즘은 MCC 알고리즘에 비해 1 dB 정도의 정상상태 MSE 성능 향상을 나타냈고 수렴 속도에서도 500 샘플 정도 빠른 성능을 나타냈다. 이러한 실험 결과로부터 IMC 신호의 전력으로 정규화된 NMCC 알고리즘은 충격성 잡음에 더욱 강인하며 향상된 성능을 발휘할 수 있음을 알 수 있다.

References

- [1] Y. Cho, H. Yu, B. Kim, J. Cho, J. Kim, J. Lee, and H. Park, "Proposal of optimum equalizer hardware architecture for cable modem and analysis of various LMS algorithms," *J. KICS*, vol. 27, pp. 150-159, Feb. 2002.
- [2] L. Bharani and P. Radhika, "FPGA implementation of optimal step size nlms algorithm and its performance analysis," *IJRET*, vol. 2, pp. 885-890, Jul. 2013.
- [3] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, Prentice Hall, Upper Saddle River, 4th Ed., 2001.
- [4] R. Chinaboina, D. Ramkiran, H. Khan, M. Usha, B. Madhav, K. Srinivas and G. Ganesh, "Adaptive algorithms for acoustic echo cancellation in speech processing," *IJRRAS*, vol. 7, pp. 38-42, Apr. 2011.

- [5] I. Santamaria, P. Pokharel, and J. Principe, "Generalized correlation function: Definition, properties, and application to blind equalization," *IEEE Trans. Sign. Process.*, vol. 54, pp. 2187-2197, Jun. 2006.
- [6] W. Liu, P. Pokharel, and J. Principe, "Correntropy: Properties and applications in non-gaussian signal processing," *IEEE Trans. Sign. Process.*, vol. 55, pp. 5286-5298, Nov. 2007.
- [7] N. Kim, S. Kang, and D. Hong, "Blind equalization based on maximum cross-correntropy criterion using a set of randomly generated symbols," *J. KICS*, vol. 35, pp. 33-39, Jan. 2010.
- [8] N. Kim, "Practical approach to blind algorithms using random-order symbols and cross-correntropy," *J. KICS*, vol. 39A, pp. 149-154, Mar. 2014.
- [9] N. Kim, "Performance analysis of correntropy-based blind algorithms robust to impulsive noise," *J. KICS*, vol. 40, pp. 2324-2330, Dec. 2015.
- [10] E. Parzen, "On the estimation of a probability density function and the mode," *Ann. Math. Stat.* vol. 33, p. 1065, 1962.
- [11] J. Proakis, *Digital Communications*, McGraw-Hill, 2nd Ed, 1989.

김 남 용 (Namyong Kim)



1986년 2월 : 연세대학교 전자공학과 졸업

1988년 2월 : 연세대학교 전자공학과 석사

1991년 8월 : 연세대학교 전자공학과 박사

1992년 8월~1998년 2월 : 관동대학교 전자통신공학과 부교수

1998년 3월~현재 : 강원대학교 공학대학 전자정보통신공학부 교수

<관심분야> Adaptive equalization.