

# 특이값 분해를 이용한 블라인드 부분 간격 등화기

김금비\*, 이정원\*  
 남해운\*, 박대영\*

## Fractionally Spaced Blind Equalization Using Singular Value Decomposition

Geumbee Kim\*, Jeongwon Lee\*,  
 Haewoon Nam\*\*, Daeyoung Park\*

### 요약

이 논문은 새로운 블라인드 부분 간격 등화기를 제안한다. 기존의 선형 계획법을 이용한 등화기는 등화기 필터 탭의 자유도를 강제로 줄였기 때문에 성능이 저하된다. 제안 방법은 특이값 분해를 통해 신호 공간을 구해 표본을 최대한 사용하여 등화기 성능을 향상시킨다. 제안 방법은 핵 노름을 이용한 등화기와 성능은 비슷하면서도, 기존 선형 계획법을 이용한 등화기와 비슷한 낮은 복잡도를 갖는다.

**Key Words** : blind fractionally spaced equalization, degree of freedom, rank minimization, singular value decomposition.

### ABSTRACT

This letter proposes a new blind fractionally spaced equalization (FSE). The conventional linear program (LP) FSE reduces the degree of freedom (DOF) by abandoning many equalization filter taps, which causes severe performance degradations. We use singular value decomposition (SVD) to obtain the signal subspace and to fully utilize all samples

for performance improvement. The proposed scheme has similar performance with the nuclear norm minimization and has as low complexity as the LP equalizer.

### I. 서론

블라인드 등화기는 훈련 신호(training signal)를 사용하지 않고 채널을 추정하는 방식이다<sup>[1]</sup>. 훈련 신호를 보내지 않기 때문에 전송률과 대역폭 측면에서 이득을 볼 수 있다. 기존 블라인드 등화기는 수렴에 필요한 표본의 길이가 길기 때문에 이를 줄이기 위한 노력이 필요하다.

QAM 신호를 등화할 때 사용하는 기존의 선형 계획법을 이용한 등화기는 수신 신호 표본의 일부를 사용하지 않는 단점이 있다<sup>[2]</sup>. 반면에 핵 노름(nuclear norm)을 최소화하는 등화기는 복잡하지만 등화 성능이 우수하다<sup>[3]</sup>. 또한, 기존 등화기에서는 채널의 길이를 모르기 때문에 채널의 길이가 충분히 크다는 가정을 해서 등화 성능이 저하되는 단점이 있다. 본 논문에서는 특이값 분해를 사용하여 수신 신호 표본을 span하는 부분 공간(subspace)에서의 최적 등화 필터를 제안한다. 제안하는 방법은 채널 길이를 정확하게 추정할 수 있다.

### II. 블라인드 부분 간격 등화기

블라인드 부분 간격 등화기는 모르는 채널을 통과한 신호를 복원한다. 수신 신호의 식은

$$x(t) = \sum_{m=1}^P d_m h(t-mT) + n(t) \quad (1)$$

으로서,  $d_m$ 는 송신 신호,  $h(t)$ 는 채널 임펄스 응답,  $n(t)$ 은 잡음이다. 부분 간격 등화기에서는  $T/L$  주기로  $L$ 배 과표본화(oversampling)를 하면

$$x\left(kT - (l-1)\frac{T}{L}\right) = \sum_{m=1}^P d_m h\left((k-m)T - (l-1)\frac{T}{L}\right) + n\left(kT - (l-1)\frac{T}{L}\right) \quad (2)$$

\* 이 연구는 방위사업청 및 국방과학연구소의 재원에 의해 설립된 신호정보 특화연구센터 사업의 지원을 받아 수행되었음

• First Author : Department of Information and Communication, Inha University, kimgeumbee@gmail.com, 학생회원

◦ Corresponding Author : Department of Information and Communication, Inha University, dpark@inha.ac.kr, 중신회원

\* Department of Information and Communication, Inha University, jwlee267@gmail.com

\*\* Department of Electrical Engineering, Hanyang University, hnam@hanyang.ac.kr, 정회원

논문번호 : KICS2016-08-185, Received August 5, 2016; Revised September 5, 2016; Accepted September 13, 2016

이 된다. 채널의 길이를  $K+1$ 이라 하고, 잡음은  $CN(0, \sigma^2)$ 인 가우시안 분포를 갖는다고 하자. 수신 신호는

$$x_k^{(l)} = \sum_{m=0}^K d_{k-m} h_m^{(l)} + n_k^{(l)} \quad l = 1, 2, \dots, L \quad (3)$$

이 된다<sup>[3]</sup>. 이 수식은 수신 안테나  $L$ 개로 수신한 경우에도 동일하게 적용할 수 있다. 길이가  $N+1$ 인 등화 필터를  $\theta_k^{(l)}$ 라 하면, 등화 필터를 통과하여 등화시킨 신호는

$$y_k = \sum_{l=1}^L \sum_{m=0}^N (\theta_m^{(l)})^H x_{k-m}^{(l)} \quad (4)$$

와 같다. 이 신호를 행렬로 나타내기 위해서

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_k &= [d_k \ d_{k-1} \ \dots \ d_{k-N-K}]^T \in C^{N+K+1}, \\ \mathbf{n}_k &= [n_k^{(1)} \ \dots \ n_{k-N}^{(1)} \ \dots \ n_k^{(L)} \ \dots \ n_{k-N}^{(L)}]^T \in C^{L(N+1)}, \\ \mathbf{x}_k &= [x_k^{(1)} \ \dots \ x_{k-N}^{(1)} \ \dots \ x_k^{(L)} \ \dots \ x_{k-N}^{(L)}]^T \in C^{L(N+1)}, \\ \boldsymbol{\theta} &= [\theta_0^{(1)} \ \dots \ \theta_N^{(1)} \ \dots \ \theta_0^{(L)} \ \dots \ \theta_N^{(L)}]^T \in C^{L(N+1)}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$H_l = \begin{bmatrix} h_0^{(l)} & \dots & h_K^{(l)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_0^{(l)} & \dots & h_K^{(l)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & h_0^{(l)} & \dots & h_K^{(l)} \end{bmatrix} \in C^{(N+1) \times (N+K+1)}, \quad (6)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_L \end{bmatrix} \in C^{L(N+1) \times (N+K+1)}$$

라고 하면,

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{H} \mathbf{d}_k + \mathbf{n}_k \quad (7)$$

$$y_k = \boldsymbol{\theta}^H \mathbf{x}_k = \boldsymbol{\theta}^H (\mathbf{H} \mathbf{d}_k + \mathbf{n}_k) \quad (8)$$

로 표현할 수 있다.  $\mathbf{H}$ 는  $L(N+1) \geq N+K+1$ 이라 하면, tall matrix이면서 동시에 full column 랭크인 행렬이 된다. 등화 필터를 통과한 최종 채널응답은

$$\boldsymbol{\theta}^H \mathbf{H} = \exp(jn\pi/2) [0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0] \quad (9)$$

이 되도록 한다. 이는  $n\pi/2$  만큼 위상이 변한  $N+K+1$ 차원의 벡터이다. 기존에는  $\boldsymbol{\theta}$ 의 원소의 자유도를 줄여주기 위해서, 제한 조건으로  $\boldsymbol{\theta}$ 의  $N+K+2$ 번째 원소부터 모두 0으로 처리하였다<sup>[2]</sup>.

이 방법은 과표본화를 통해 많은 표본을 얻었음에도 불구하고 표본을 일부 버리기 때문에 효율적이지 못하다. 또한 채널의 길이  $K+1$ 을 알지 못하므로, 충분히 큰  $K$ 로 가정하고  $\boldsymbol{\theta}$ 를 추정해야하므로 등화기의 성능이 저하된다<sup>[3]</sup>. 그러므로 본 논문은 과표본화한 표본을 효율적으로 사용할 수 있는 방안을 제시한다.

### III. 특이값 분해를 이용한 부분 간격 등화기

특이값 분해를 위해 벡터  $\mathbf{x}_k$ 로 이뤄진 행렬을

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{N+1}^{(1)} & x_{N+2}^{(1)} & \dots & x_{N+1+P}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \dots & x_P^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{N+1}^{(L)} & x_{N+2}^{(L)} & \dots & x_{N+1+P}^{(L)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{(L)} & x_2^{(L)} & \dots & x_P^{(L)} \end{bmatrix} \in C^{L(N+1) \times P} \quad (10)$$

이라고 하고  $\mathbf{X}$ 를 특이값 분해하면

$$\mathbf{X} = [\mathbf{U}_1 \ \mathbf{U}_2] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} [\mathbf{V}_1 \ \mathbf{V}_2]^H = \mathbf{U}_1 \boldsymbol{\Sigma}_1 \mathbf{U}_1^H + \sigma^2 \mathbf{U}_2 \mathbf{V}_2 \quad (11)$$

이 된다.  $\mathbf{H}$ 의 랭크가  $N+K+1$ 이므로,  $\boldsymbol{\Sigma}_1$ 에  $N+K+1$ 개의 dominant 특이값이 존재한다. 따라서,  $\mathbf{X}$ 의 크기가 큰 특이값의 개수를 확인하면,  $K$ 를 알아낼 수 있다. 수신 신호  $\mathbf{X}$ 는 (11)식의 우변에서  $\mathbf{U}_1$ 으로 span되는 첫 번째 항의 신호 성분과  $\mathbf{U}_2$ 로 span되는 두 번째 항의 잡음 성분으로 분해된다, 따라서, 등화 필터  $\boldsymbol{\theta}$ 도  $\mathbf{U}_1$ 으로 span되는 벡터면 충분하다. 즉,

$$\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{U}_1^H \mathbf{X} \in C^{(N+K+1) \times P} \quad (12)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{U}_1^H \boldsymbol{\theta} \in C^{N+K+1} \quad (13)$$

라 하면,  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}^H \tilde{\mathbf{X}} = \boldsymbol{\theta}^H \mathbf{U}_1 \boldsymbol{\Sigma}_1 \mathbf{U}_1^H$ 이 되어, 신호 성분만 통과하고 잡음은 제거되므로 등화 성능이 향상된다. 송신한 신호가 QAM 심볼이라면, 수신 신호의 정상도의 점의 실수부 혹은 허수부의 가장 멀리 떨어진 점의 거리를 최소화하여 성공적으로 등화시킬 수 있다<sup>[2]</sup>. 따라서, 좌측 특이벡터  $\mathbf{U}_1$ 으로 span되는 신호 공간을 구하고 이 수신 신호를 등화시켜 얻은 결과의 실수부의 절댓값의 최댓값을 최소로 만들기 위해 다음과 같은 선형 계획법 최적화 문제를 풀면 된다.

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \max_k |Re\{\tilde{\theta}^H \mathbf{x}_k\}| \\ & \text{subject to} && Re\{\tilde{\theta}_0\} + Im\{\tilde{\theta}_0\} = 1 \end{aligned} \quad (14)$$

$\tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{U}_1^H \mathbf{x}_k$ 이고, 사소한 해인  $\tilde{\theta} = \mathbf{0}$ 를 얻지 않기 위해 제한 조건을 추가한다. 특이값 분해로 채널의 길이  $K+1$ 을 알 수 있고,  $\theta$ 를 신호 공간에 제한시킨 최적 등화 필터  $\theta$ 를 찾을 수 있다.

앞서 언급했듯, 수신 신호 식 (3)은  $L$ 개 수신 안테나로 수신한 경우에도 적용된다. 따라서, 제안하는 등화기는 수신 안테나의 수신 신호들을 결합하여 QAM 성상이 얻어지도록 수신 다이버시티를 효과적으로 이용하는 등화기가 된다.

#### IV. 모의실험 결과

$P=1000$ 개의 16QAM 신호를 채널의 길이가 4인 레일리 페이딩 채널에 통과시켰다. 신호 대 잡음비는 30dB인 수신 신호를  $L=4$ 배만큼 과표본화하였고 부 등화기의 길이는  $N+1=7$ 이다.

그림 1은 등화기를 통과하기 전 신호와 선형 계획법(LP)<sup>[2]</sup>, 핵 노름 최소화(NU)<sup>[3]</sup>, 제안하는 SVD-LP로 등화시킨 신호의 성상도이다. MSE는 1.0720, 0.7561, 0.5540로 SVD-LP의 성능은 LP보다 우월하고, NU와 비슷하다.

그림 2는 위와 동일한 실험 조건에서  $K$ 가 5와 8일 때 각각 부 등화기의 order  $N$ 에 따른 LP, NU, SVD-LP를 이용한 등화기의 실행 시간을 나타낸다. 실행 시간은 등화기와 채널의 order가 높을수록 증가한다. NU는 LP에 비해 약 10배의 시간을 더 필요로

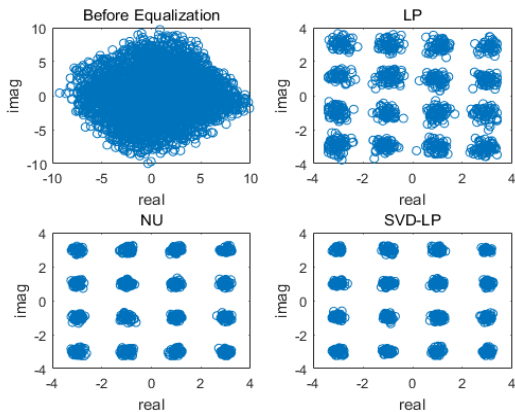


그림 1. 입력 신호 및 LP, NU, SVD-LP 등화기의 출력 신호 성상도.  
Fig. 1. Constellations of input signal and outputs of LP, NU, and SVD-LP equalizer.

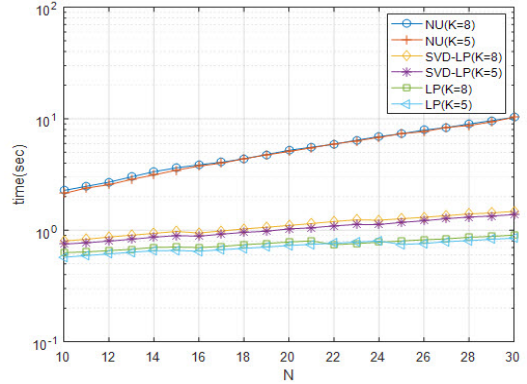


그림 2. 등화기의 order에 따른 각 등화기 별 실행 시간.  
Fig. 2. Running time of each equalizer with respect to the order of equalizer.

한다. SVD-LP는 SVD 연산 때문에 실행시간이 LP보다 조금 길지만, NU보다 적게 걸림을 알 수 있다. i7-6700 쿼드코어 3.40GHz의 CPU, 8GB RAM의 컴퓨터에서 MATLAB R2016a를 사용했다.

#### V. 결론

본 논문은 특이값 분해를 이용하여 수신 신호를 신호 공간과 잡음 공간으로 분해하여, 신호 공간에 있는 부분만 등화기에 사용하는 QAM 심볼 블라인드 등화기를 제안하였다. 제안하는 SVD-LP 등화기는 채널의 order를 모르더라도 표본을 효율적으로 사용하여 등화기를 동작하게 했다. 등화 성능은 기존의 LP 등화기보다 좋고 NU 등화기와 비슷함을 확인하였다. 복잡도는 LP 등화기보다는 조금 높지만, NU 등화기보다는 낮아, 제안 방식이 성능과 복잡도 측면에서 우수함을 확인하였다.

#### References

- [1] S.-K. Lee and J.-C. Lee, "On the performance analysis of blind equalization for partial response channel," *J. KICS*, vol. 28, no. 4, pp. 413-423, Feb. 2003.
- [2] Z.-Q. Luo, M. Meng, K. M. Wong, and J.-K. Zhang, "A fractionally spaced blind equalizer based on linear programming," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 50, no. 7, pp. 1650-1660, Jul. 2002.
- [3] K. Konishi and T. Furukawa, K. M. Wong, and J.-K. Zhang, "A nuclear norm heuristic approach to fractionally spaced blind channel equalization," *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 18, no. 1, pp. 59-62, Jan. 2011.