

콜레스키 선 부호 기반의 직교 Faster-Than-Nyquist 신호 전송

김 호 준*, 정 태 진^o

Orthogonal Faster-Than-Nyquist Signal Transmission Based on Cholesky Precoding

Hojun Kim*, Taejin Jung^o

요 약

본 레터에서는 송신단에서 roll-off factor α 의 SRRC 송신 필터를 사용할 경우, 심볼 간격을 Nyquist 간격에 비하여 최대 $1/(1+\alpha)$ 까지 줄이더라도 수신단에서 전송 심볼들 간 직교 특성이 유지되는 콜레스키 선 부호화기 기반의 새로운 직교 FTN (Faster-Than-Nyquist) 전송 기법을 제안하고자 한다. 제안된 기법은 전송 심볼들 간 직교 특성으로 기존 FTN 기법의 높은 수신 복잡도 및 성능 저하 문제점들을 완벽히 해결하게 된다.

Key Words : Faster-Than-Nyquist, Cholesky Precoder, Square-Root Raised Cosine

ABSTRACT

In this letter, a new orthogonal FTN (Faster-Than-Nyquist) signaling based on a Cholesky precoder is proposed. When using a SRRC transmit filter with a roll-off factor α , the orthogonal FTN guarantees the orthogonality between all transmitted symbols with a condition of that a symbol period is larger than the $1/(1+\alpha)$ times of the Nyquist rate. Due to this orthogonal property, the proposed FTN perfectly resolves the problems of higher decoding

complexity and performance loss imposed in the conventional FTN.

I. 서 론

디지털 통신 Nyquist 이론^[1] 결과로서, 주어진 대역폭 W 으로 수신단에서 심볼들 간의 간섭 (ISI: Inter-Symbol-Interference)이 발생하지 않고 송신단에서 전송 가능한 최소 심볼 간격은 $T_{nq} = 1/(2W)$ 이다. 기존의 FTN (Faster-Than-Nyquist) 전송 방법^[2-4]은 이러한 Nyquist rate, T_{nq} 보다 빠른 심볼 주기로 전송 심볼들을 전송하여 전체 비트 전송 용량을 증대시키는 새로운 전송 방법이다.

하지만 이러한 T_{nq} 보다 빠른 심볼 주기는 수신단에서 전송 심볼들 간 ISI를 필히 발생시켜 전체 전송 심볼 수에 따라 ML (Maximum Likelihood) 수신 복잡도가 급격히 증가하고, 직교 성능에 비해 수신 성능이 저하되는 여러 문제점들이 발생한다. 이러한 이유로 기존의 FTN 수신단에서는 구현 가능한 iterative-BCJR 등화기^[3]를 사용하여 ISI를 최대한 제거하지만 여전히 높은 수신 복잡도 및 수신 성능 저하 문제점들이 존재한다.

따라서 본 레터에서는 이러한 ISI 문제점을 해결하기 위하여 기존 FTN 송신 신호 이전에 콜레스키 선부호화기를 적용하여 일정 전송 시스템 조건으로 전송 심볼들 간 직교성이 보장, 즉 ISI가 발생하지 않는 새로운 직교 FTN (OFTN : Orthogonal FTN) 전송 기법을 제안하고자 한다.

II. 기존의 FTN 전송 방법

그림 1의 기존의 FTN 전송 방법^[2-4]에서 τT_{nq} ($\tau \leq 1$) 주기로 변조된 총 N 개의 심볼 a_i 들은 roll-off factor α , 즉 대역폭 $(1+\alpha)/(2T_{nq})$ 의 SRRC (Square-Root Raised Cosine) 송신 필터 $g(t)$ 를 통과하게 된다. 통과된 신호는 AWGN $w(t)$ 가 더해진 뒤 SRRC 수신 정합필터 $g(t)$ 를 통과하고, τT_{nq} 간격으로 샘플링된다. 이와 같이 수신 정합 필터의 샘플값들을 벡터 형태로 표현하면 아래와 같다.

* 이 논문은 전남대학교 학술연구비(과제번호:2016-0173) 지원에 의하여 연구되었음

• First Author : Chonnam N. University Department of Electronics and Computer Engineering, friendlyguy@ejnu.net, 학생회원

o Corresponding Author : Chonnam N. University Department of Electronics and Computer Engineering, tjjung@jnu.ac.kr, 종신회원
 논문번호 : KICS2017-06-171, Received June 12, 2017; Revised August 7, 2017; Accepted August 7, 2017

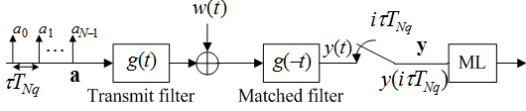


그림 1. 기존의 FTN 시스템 블록도
Fig. 1. Block diagram of conventional FTN systems

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & p_1 & p_2 & \cdots & p_{N-2} & p_{N-1} \\ p_1 & 1 & p_1 & \cdots & p_{N-3} & p_{N-2} \\ p_2 & p_1 & 1 & \cdots & p_{N-4} & p_{N-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{N-2} & p_{N-3} & p_{N-4} & \cdots & 1 & p_1 \\ p_{N-1} & p_{N-2} & p_{N-3} & \cdots & p_1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$= \mathbf{R}\mathbf{a} + \mathbf{n}, \quad (2)$$

여기에서, $p_i = p(i\tau T_{nq})$ 이고 $p(t) = g(t) * g(-t)$ 는 roll-off factor α 의 전체 송신인 RC 필터이다. 또한 $n_i = n(i\tau T_{nq})$ 이고 $n(t) = w(t) * g(-t)$ 이다. 여기에서 노이즈 벡터 \mathbf{n} 의 covariance 행렬은 $E\{\mathbf{nn}^T\} = \mathbf{R}N_0/2$ [5]이다.

식 (2)에서 $\tau=1$ 이면 Nyquist 직교 전송으로 인하여 모든 $p_i (i \geq 1)$ 값들은 0이 되어, $N \times N$ 행렬 \mathbf{R} 은 단위행렬이 된다. 하지만 기존의 FTN 전송 방법처럼 $\tau < 1$ 이면 \mathbf{R} 은 더 이상 단위행렬이 아니며, 따라서 수신단에서는 ISI가 발생하게 되고, 더불어 노이즈 벡터 \mathbf{n} 은 white 조건을 만족하지 않게 된다. 이러한 이유로 수신단에서는 각 송신 심볼에 대한 독립적인 ML 복호가 불가능하게 된다[3].

III. 새로운 직교 FTN 전송 방법

본 장에서는 새로운 직교 FTN 기법을 제안하기 이전에 먼저 아래와 같이 식 (2) 내 대칭 행렬 \mathbf{R} 에 대한 singularity 여부를 검토하고자 한다.

기존 연구 결과[6]로서 송신 필터가 $\alpha=0$, 즉 $p(t) = \text{sinc}(t/T_{nq})$ 일 경우, \mathbf{R} 은 $N \rightarrow \infty$ 이면 총 N 개의 고유값 및 고유벡터, $(\lambda_k, \mathbf{u}_k)$, $k=0, 1, \dots, N-1$ 는 아래와 같은 값들에 근접함이 증명되었다.

$$\lambda_k = P(2\pi k/N) \quad (3)$$

$$\mathbf{u}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \left[1, e^{-j\frac{2\pi k}{N}}, \dots, e^{-j\frac{2\pi(N-1)k}{N}} \right]^T \quad (4)$$

식 (3) 내 $P(\Omega) = FT\{\text{sinc}(i\tau)\}$ ($0 \leq \Omega < 2\pi$)는 대역폭 $W=1/(2T_{nq})$ 의 $\text{sinc}(t/T_{nq})$ 함수를 τT_{nq} 간격으로 샘플링된 값, 즉 $\text{sinc}(i\tau)$ 의 이산 푸리에 변환을 나타낸다. 따라서 기존의 샘플링 이론으로, $\tau=1$, 즉 Nyquist 조건을 만족할 경우 식 (3)의 모든 λ_k 는 1을 가지지만, $\tau < 1$ 이면 $\lambda_{N/2} = P(\pi) = 0$ 이 되어 $N \rightarrow \infty$ 이면 \mathbf{R} 은 singular하게 된다[6].

위와 같은 sinc 함수의 결과들을 $\alpha > 0$ 인 임의의 RC 함수, 즉 $p_i = \text{sinc}(i\tau) \frac{\cos(\pi\alpha i\tau)}{1-4\alpha^2 i^2 \tau^2}$ 로 구성된 \mathbf{R} 에 도 적용 가능한데, 먼저 아래와 같이 임의의 RC 신호 기반의 \mathbf{R} 역시 $N \rightarrow \infty$ 이면 식 (3), (4)와 같은 동일한 λ_k 와 \mathbf{u}_k 를 가짐을 증명하고자 한다.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\mathbf{R}\mathbf{u}_k - \lambda_k \mathbf{u}_k\| \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N/2} \sum_{i=j}^{N-j} |p_i|^2 \quad (5)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N/2} \sum_{i=j}^{N-j} \text{sinc}^2(i\tau) \left(\frac{\cos(\pi\alpha i\tau)}{1-4\alpha^2 i^2 \tau^2} \right)^2 \quad (6)$$

$$\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N/2} \sum_{i=j}^{N-j} \text{sinc}^2(i\tau) \quad (7)$$

$$\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{N/2} \sum_{i=j}^{\infty} \frac{1}{i^2} = 0 \quad (8)$$

식 (5)의 관계식은 기존 논문[6] 내 식 (17)을 이용하였고, 식 (7)의 부등식은 $\frac{\cos(\pi x)^2}{(1-4x^2)^2} \leq 1, \forall x$ 관계식을 이용하였다. 마지막으로 식 (8)의 결과는 논문[6] 내 식 (18)을 이용하였다. 여기에서 $\alpha > 0$ 의 식 (3) 내 $P(\Omega)$ 는 대역폭 $W=(1+\alpha)/(2T_{nq})$ 의 RC 함수 $p(t)$ 를 τT_{nq} 간격으로 샘플링한 값들의 이산 푸리에 변환이다. 따라서 앞에서 언급한 동일한 샘플링 이론으로 $2W=(1+\alpha)/T_{nq} \geq 1/\tau T_{nq}$, 즉 $\tau \geq 1/(1+\alpha)$ 이면 $P(\Omega)$ 는 모든 Ω 에서 0이 아닌 값들을 가지게 되며, 즉 식 (3)의 모든 λ_k 값들은 0이 아닌 값들을 가지게 된다.

결론적으로 $\tau \geq 1/(1+\alpha)$ 이면 대칭 행렬 \mathbf{R} 은 nonsingular 즉 positive definite임이 보장되며, 기존 선형대수 이론으로 콜레스키 (Cholesky) 분해, $\mathbf{R} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$ 이 가능하다. 여기에서 $N \times N$ \mathbf{L} 은 non-singular 하부대각행렬이다. 또한 $\mathbf{w} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{n}$ 는

$E\{ww^T\} = E\{\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}(\mathbf{L}^{-1})^T\}N_0/2 = \mathbf{I}_N$ 조건으로 white 특성을 가짐을 확인할 수 있으며, 따라서 식 (2)의 FTN 수신 신호는 아래와 같이 \mathbf{L} 과 \mathbf{w} 기반으로 새롭게 정리가 가능하다.

$$\mathbf{y} = \mathbf{R}\mathbf{a} + \mathbf{n} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T\mathbf{a} + \mathbf{L}\mathbf{w} = \mathbf{L}(\mathbf{L}^T\mathbf{a} + \mathbf{w}). \quad (9)$$

식 (9) 내 \mathbf{L}^T 는 기존의 FTN 전송으로 발생하는 ISI이며, 수신단에서 ISI를 제거하기 위해서는 \mathbf{L}^T 를 필히 제거하여야 한다. 이를 위하여 본 레터에서는 \mathbf{a} 에 먼저 $(\mathbf{L}^T)^{-1}$ 를 곱한 $(\mathbf{L}^T)^{-1}\mathbf{a}$ 를 수행한 뒤, 기존의 FTN 기법으로 전송하는 새로운 직교 FTN (OFTN) 전송 기법을 제안한다. 이때 $(\mathbf{L}^T)^{-1}$ 를 곱한 송신 신호 $(\mathbf{L}^T)^{-1}\mathbf{a}$ 의 평균 심볼 에너지는 $E_s^{OFTN} = E_{x_a}\{\langle g(t)(\mathbf{L}^T)^{-1}\mathbf{a}, g(t)(\mathbf{L}^T)^{-1}\mathbf{a} \rangle\}/N = E_{x_a}\{\mathbf{a}^T\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}(\mathbf{L}^T)^{-1}\mathbf{a}\}/N = E_{x_a}\{\|\mathbf{a}\|^2\}/N = E_s$ 이다. 여기에서 E_s 는 \mathbf{a} 의 평균 송신 에너지이며, $g(t) = [g(t)g(t-\tau T_{nq}) \cdots g(t-(N-1)\tau T_{nq})]$ 이다. 이와 같은 새로운 OFTN의 수신 신호는 아래와 같다.

$$\mathbf{y} = \mathbf{L}(\mathbf{L}^T(\mathbf{L}^T)^{-1}\mathbf{a} + \mathbf{w}) = \mathbf{L}(\mathbf{a} + \mathbf{w}). \quad (10)$$

이러한 $(\mathbf{L}^T)^{-1}$ 선 부호기는 기존의 FTN 전송방법에서 직교 기저가 아닌 SRRC 송신필터를 Gram-Schmidt 직교 과정과 동일하게 새로운 기저로 맵핑하여 직교 전송이 가능하도록 한다. 식 (10)을 보면 기존 식 (9)와 달리 송신 벡터 \mathbf{a} 앞에 \mathbf{L}^T 가 존재하지 않아 수신단에서 ISI가 발생하지 않게 된다. 따라서 수신단에서는 노이즈 백색화 필터 \mathbf{L}^{-1} 를 적용한 후, 아래와 같이 송신 벡터에 대한 ML 복호 수행이 가능하게 된다.

$$\hat{\mathbf{a}} = \underset{\mathbf{a}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{L}^{-1}\mathbf{y} - \mathbf{a}\|^2 \quad (11)$$

$$= \underset{\mathbf{a}}{\operatorname{argmin}} \sum_{k=1}^N |z_k - a_{k1}|^2 \quad (12)$$

여기에서 z_k 는 $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{y}$ 의 k 번째 성분 값이다. 식 (12)의 ML 복호는 더 이상 ISI가 존재하지 않는 신호 벡터 \mathbf{a} 의 복호이므로 기존 Nyquist 직교 전송 기법과 동일하게 각 a_k 에 대한 독립적인 ML 복호가 가능하게

된다.

$$\hat{a}_k = \underset{a_k}{\operatorname{argmin}} |z_k - a_{k1}|^2 \quad (13)$$

IV. 실험 결과 및 결론

본 장에서는 송신단에서 $\alpha > 0$ 의 SRRC 필터 $g(t)$ 와 $\tau = 1/(1+\alpha)$ 값으로 신호들을 전송할 경우, 기존의 FTN과 제안된 OFTN의 ML 성능 결과를 제시한다. 성능 비교를 위하여 $\tau = 1$ 인 Nyquist 직교 성능도 추가로 포함하였다. 제안된 OFTN의 ML 복호는 식 (13)의 방법을 사용하였다.

그림 2는 BPSK 전송하였을 경우 각 α 에 따른 평균 BER의 성능을 나타낸다. 먼저 제안된 OFTN은 앞장 식 (10)에서 설명하였듯이 수신단에 ISI가 발생하지 않으며, 따라서 α 값에 상관없이 직교 전송과 동일한 성능을 가진다. 본 실험에서 사용한 $\tau = 1/(1+\alpha)$ 값은 α 가 증가할수록 작은 값, 즉 더 작은 신호 간격으로 전송되어 기존의 FTN 기법은 ISI가 증가하게 되며, OFTN에 비하여 α 가 커질수록 성능 차이가 크게 발생하게 된다.

본 논문에서 제안한 OFTN 전송 기법은 $\tau \geq 1/(1+\alpha)$ 전송 조건으로 전송 심볼들간 ISI의 완벽한 제거가 보장되며, 따라서 기존 FTN 기법의 높은 수신 복잡도 및 성능 저하 문제들을 완벽히 해결할 수 있다.

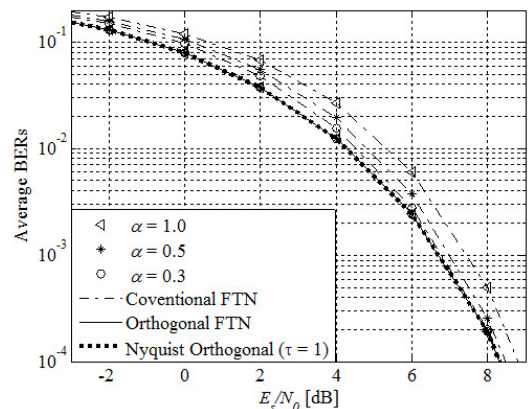


그림 2. 각 α 에 따른 평균 BERs
Fig. 2. Average BERs versus SNR for each α

References

- [1] H. Nyquist, "Certain topics in telegraph transmission theory," *AIEE Trans.*, vol. 47, no. 2, pp. 617-644, Apr. 1928.
- [2] J. E. Mazo, "Faster-than-Nyquist signaling," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 54, no. 8, pp. 1451-1462, Apr. 1975.
- [3] J. B. Anderson, F. Rusek, and V. Öwall, "Faster-than-Nyquist signaling," in *Proc. IEEE*, vol. 101, no. 8, pp. 1817-1830, Aug. 2013.
- [4] S. Kwak, J. Yun, M. Back, and H. Lim, "Performance evaluation criterion of FTN-Based transmission system," *J. KICS*, vol. 41, no. 11, pp. 1645-1652, Nov. 2016.
- [5] D. Bedeer, H. Yanikomeroglu, and M. H. Ahmed, "Reduced complexity optimal detection of binary Faster-than-Nyquist signaling," in *Proc. IEEE ICC 2017*, Paris, France, May 2017.
- [6] R. Menon, P. Gerstoft, and W. S. Hodgkiss, "Asymptotic eigenvalue density of noise covariance matrices," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 60, no. 7, pp. 3415-3424, Jul. 2012.